UN MÓDULO QUE NO ES FINITAMENTE GENERADO, PERO CUYOS SUBMÓDULOS PROPIOS LOS SON

RESUMEN. Exhibimos un $\mathbb{C}[X]$ -módulo que no es de finitamente generado –en particular, no es noetheriano– pero tal que todos sus submódulos propios son finitamente generados.

Dada una sucesión $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, su *soporte* es $\text{sop}(a) = \{i \in \mathbb{N} : a_i \neq 0\}$. Sea

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{(\mathbb{N})} &= \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \text{existe } n \text{ para el cual } a_n = 0 \forall k \geq n\} \\ &= \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \#\text{sop}(a) < \infty\}. \end{aligned}$$

el $\mathbb{C}$ -espacio vectorial dado por las sucesiones de soporte finito, es decir, tales que solo hay finitos términos no nulos. En otras palabras, dentro del $\mathbb{C}$ -espacio vectorial $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de todas las sucesiones de números complejos, el subespacio $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ es el generado por las sucesiones

$$e_i = (0, \dots, 0, \overbrace{1}^i, 0, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \quad (e_i)_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Más aún $B = \{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ es una base de $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$. Consideremos ahora la transformación $\mathbb{C}$ -lineal

$$\begin{aligned} \ell: \mathbb{C}^{(\mathbb{N})} &\longrightarrow \mathbb{C}^{(\mathbb{N})} \\ (a_1, a_2, a_3, \dots) &\mapsto (a_2, a_3, a_4, \dots) \end{aligned}$$

Más formalmente, definimos a ℓ en la base B enviando e_1 a 0 y e_{i+1} a e_i para cada $i \geq 1$.

El par $M = (\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}, \ell)$ define un $\mathbb{C}[X]$ -módulo. El objetivo de esta nota es probar que todo submódulo de M es finitamente generado, pero sin embargo M no lo es —en particular no es noetheriano. A lo largo de la demostración será de utilidad considerar, dada $a \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$, el último término en el que a toma un valor no nulo. Para esto definimos la cantidad

$$\wp(a) := \max(\{0\} \cup \text{sop}(a)) \in \mathbb{N}_0.$$

Definición 1. Sean $E_0 = 0$, $E_n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle \leq \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Observación 1. Notar que $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})} = \bigcup_{n \geq 0} E_n$ y que $\wp(a) \leq n \in \mathbb{N}_0$ si y sólo si $a \in E_n$. En particular, como $E_n \subset E_m$ si $n < m$, esto dice que $\wp(a + b) \leq \max\{\wp(a), \wp(b)\}$.

Nuestro primer objetivo será formalizar la siguiente intuición: al actuar sobre una sucesión, el conjunto de índices donde la nueva sucesión es no nula “nunca crece”, ya que X actúa como ℓ y esta última transformación lineal “desplaza los índices hacia la izquierda”.

Lema 1. Si $p \in \mathbb{C}[X]$ y $a \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$, entonces $\wp(p \cdot a) \leq \wp(a)$.

Demostración. Si $p = 0$ entonces $\wp(0 \cdot a) = \wp(0) = 0$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad entonces que $a \neq 0$ y $p \neq 0$, y hacer inducción en $d := \deg(p)$. Si $d = 0$, entonces $p = \lambda \in \mathbb{C}^\times$ y

$$\wp(\lambda \cdot a) = \max\{i \in \mathbb{N} : \lambda a_i \neq 0\} = \max\{i \in \mathbb{N} : a_i \neq 0\} = \wp(a).$$

Supongamos ahora que $d > 0$ y que $\wp(q \cdot a) \leq \wp(a)$ para todo polinomio q de grado menor a d . Como $p = q + \lambda X^d$ con $\deg q < d$ y $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, en vista de la Observación 1

$$\begin{aligned} \wp(p \cdot a) &= \wp(q \cdot a + \lambda \cdot X^d \cdot a) \leq \max\{\wp(q \cdot a), \wp(\lambda X^d a)\} = \max\{\wp(q \cdot a), \wp(X^d a)\} \\ &= \max\{\wp(q \cdot a), \wp(\ell^d(a))\}. \end{aligned}$$

Como $\wp(q \cdot a) \leq \wp(a)$ por hipótesis inductiva, basta ver que $\wp(\ell^d(a)) \leq \wp(a)$. En efecto, dado que

$$\wp(\ell^d(a)) = \max\{i \in \mathbb{N} : \ell^d(a)_i \neq 0\} = \max\{i \in \mathbb{N} : a_{i+d} \neq 0\} = \max(\text{sop}(a) \cap \mathbb{N}_{\geq d})$$

y $\text{sop}(a) \cap \mathbb{N}_{\geq d} \subset \text{sop}(a)$, tomando máximo se obtiene la desigualdad buscada. $\square$

Proposición 1. *El módulo $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \ell)$ no es finitamente generado.*

Demostración. Supongamos que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \ell)$ fuera finitamente generado, y sean $x^1, \dots, x^k \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sus generadores. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \wp(x^j)$ para todo $j \in \{1, \dots, k\}$. Deberían existir $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[X]$ tales que

$$e_N = \sum_{i=1}^k p_i \cdot x^i.$$

Sin embargo, por el Lema 1 y la Observación 1 esto implicaría que

$$N = \wp(e_j) = \wp\left(\sum_{i=1}^k p_i \cdot x^i\right) \leq \max\{\wp(x^1), \dots, \wp(x^k)\}$$

lo cual contradice la elección de N . $\square$

Ahora veremos que todo submódulo propio de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ es finitamente generado. Para distinguir el $\mathbb{C}$ -subespacio generado por un conjunto del $\mathbb{C}[X]$ -submódulo generado por un conjunto, emplearemos la notación $\text{gen}_{\mathbb{C}[X]}\{X\}$ para lo segundo y $\langle X \rangle$ para lo primero.

Lema 2. *Si $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \setminus \{0\}$ y $n = \wp(a)$, entonces $\text{gen}_{\mathbb{C}[X]}\{a\} \supset E_n$.*

Demostración. Basta ver que para todo $1 \leq i \leq n$ se tiene que $e_i \in \text{gen}_{\mathbb{C}[X]}\{a\}$, es decir, que existe $p \in \mathbb{C}[X]$ tal que $p \cdot a = e_i$. Lo demostraremos por inducción en i . Como $\wp(a) = n$, entonces existen $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}^\times$ tales que

$$a = (a_1, \dots, a_n, 0, 0, 0, \dots).$$

Si $i = 1$, podemos considerar $p = a_n^{-1} \cdot X^{n-1}$, pues

$$a_n^{-1} \cdot X^{n-1} \cdot a = a_n^{-1} \cdot (a_n, a_{n+1}, \dots) = a_n^{-1} \cdot (a_n, 0, \dots) = e_1.$$

Supongamos ahora que $e_1, \dots, e_i \in \text{gen}_{\mathbb{C}[X]}\{a\}$ para cierto $i \geq 1$. Notar que

$$X^{n-i-1} \cdot a = (a_{n-i}, \dots, a_n, 0, 0, 0, \dots).$$

pertenece al submódulo generado por a , así que

$$(0, \dots, \overbrace{a_n}^i, 0, 0, \dots) = X^{n-i-1} \cdot a - a_{n-i+1}e_1 - \dots - a_{n-1}e_i =: y$$

también. Por último $a_n^{-1}y = e_i \in \text{gen}_{\mathbb{C}[X]} \{a\}$. $\square$

Proposición 2. Si $S \subset \mathbb{C}^{\langle \mathbb{N} \rangle}$ es un submódulo propio, entonces tiene dimensión finita sobre $\mathbb{C}$. En particular es finitamente generado como $\mathbb{C}[X]$ -módulo.

Demostración. Basta ver que existe n tal que $S \subset E_n$. Si esto no fuera así, debería existir para cada $n \in \mathbb{N}$ una sucesión $x^n \in S$ tal que $\wp(x^n) > n$. En consecuencia el Lema 2 implicaría que $E_n \subset \text{gen}_{\mathbb{C}[X]} \{x^n\} \subset S$ para todo $n \geq 0$, y así

$$S \supset \bigcup_{n \geq 0} E_n = \mathbb{C}^{\langle \mathbb{N} \rangle}$$

Esto es absurdo, pues S es propio, y la contradicción provino de suponer que S no está contenido en ningún subespacio E_n . Por lo tanto $S \subset E_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $\dim S \leq \dim E_n = n < \infty$. $\square$