EXACTITUD DEL PRODUCTO TENSORIAL, V2

RESUMEN. Enunciamos la *ley exponencial* y la exactitud a derecha del producto tensorial.

Fijamos A un anillo conmutativo[1] a lo largo de la nota.

Lema 1 (Ley exponencial)**.** *Dados A-módulos S, T y U, se tienen isomorfismos inversos de grupos abelianos*

$$(-)^\sharp\colon \operatorname{Hom}_A(S \otimes_A T, U) \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \operatorname{Hom}_A(S, \operatorname{Hom}_A(T, U))\colon (-)^\flat.$$

Para cada $f\colon S \otimes_A T \to U$, la función $f^\sharp\colon S \to \operatorname{Hom}_A(T, U)$ evaluada en $s \in S$ está dada por

$$f^\sharp(s)(t) = f(s \otimes t).$$

Su inversa envía $g\colon S \to \operatorname{Hom}_A(T, U)$ al morfismo $S \otimes_A T \to U$ que en tensores elementales vale

$$g^\flat(s \otimes t) = g(s)(t).$$

Demostración. Verificación directa. □

Proposición 1. *Si*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

es una sucesión exacta de A-módulos, entonces

$$S \otimes_A M' \xrightarrow{1_S \otimes f} S \otimes_A M \xrightarrow{1_S \otimes g} S \otimes_A M'' \to 0$$

es exacta.

Demostración. Sea U un A-módulo. Usando la exactitud a un lado de $\operatorname{Hom}_A(-, U)$ y $\operatorname{Hom}_A(S, -)$ respectivamente, la sucesión

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(S, \operatorname{Hom}_A(M'', U)) \xrightarrow{(g^*)_*} \operatorname{Hom}_A(S, \operatorname{Hom}_A(M, U)) \xrightarrow{(f^*)_*} \operatorname{Hom}_A(S, \operatorname{Hom}_A(M', U))$$

es exacta. Considerando isomorfismos verticales $(-)^\sharp$ como en el Lema 1, esto nos dice que

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(S \otimes_A M'', U) \xrightarrow{(1_S \otimes g)^*} \operatorname{Hom}_A(S \otimes_A M, U) \xrightarrow{(1_S \otimes f)^*} \operatorname{Hom}_A(S \otimes_A M', U)$$

es exacta. Dado que esto es cierto para todo módulo U, por la versión dual del Ejercicio 3 (i) de la guía 6 la sucesión

$$S \otimes_A M' \xrightarrow{1_S \otimes f} S \otimes_A M \xrightarrow{1_S \otimes g} S \otimes_A M'' \to 0$$

es exacta. □

[1] Esta hipótesis no es necesaria; la imponemos por simplicidad.