EXACTITUD DEL PRODUCTO TENSORIAL

Lema 1. *Sean $f\colon M' \to M$ un morfismo de A-módulos y $g\colon M \to M''$ un epimorfismo de A-módulos tales que $g \circ f = 0$. Entonces la sucesión*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

es exacta si y solo si el morfismo inducido en el cociente $\overline{g}\colon M/im(f) \to M''$ es un isomorfismo.

Demostración. Si la sucesión es exacta entonces $\ker(g) = \mathrm{im}(f)$ y el primer teorema del isomorfismo dice exactamente que $\overline{g}$ es un isomorfismo. Recíprocamente, el morfismo inducido en el cociente es el único morfismo $M/\mathrm{im}(f) \to M''$ de manera tal que:

$$g = \overline{g} \circ \pi,$$

donde π es la proyección canónica al cociente. En particular, si $\overline{g}$ es un isomorfismo, entonces

$$\ker(g) = \ker(\overline{g} \circ \pi) = \ker(\pi) = \mathrm{im}(f).$$

□

Proposición 1. *Si*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

es una sucesión exacta de A-módulos, entonces

$$S \otimes_A M' \xrightarrow{1_S \otimes f} S \otimes_A M \xrightarrow{1_S \otimes g} S \otimes_A M'' \to 0$$

es exacta.

Demostración. Comencemos viendo que $1_S \otimes g$ es un epimorfismo. Para ello, como los tensores elementales generan a $S \otimes_A M$, basta ver que para cada $s \otimes m'' \in S \otimes_A M$ existe algún $x \in S \otimes_A M''$ tal que $(1_S \otimes g)(x) = s \otimes m''$. En particular, como g es epimorfismo, existe algún $m \in M$ tal que $g(m) = m''$. Luego, tomando $x = s \otimes m$ se tiene que

$$(1_S \otimes g)(x) = (1_S \otimes g)(s \otimes m) = s \otimes g(m) = s \otimes m''.$$

Por otra parte, tenemos que

$$(1_S \otimes g) \circ (1_S \otimes f) = 1_S \otimes (g \circ f) = 1_S \otimes 0 = 0.$$

Por el Lema 1 basta ver que el morfismo inducido en el cociente es un isomorfismo. En particular, veamos que $\overline{1_S \otimes g}$ admite una inversa

$$\gamma\colon S \otimes_A M'' \to (S \otimes_A M)/\mathrm{im}(1_S \otimes f).$$

Para ello, definamos una función $\mathbb{Z}$-bilineal y A-balanceada[1] $\tilde{\gamma}$ de $S \times M''$ en el cociente y extendámosla por la propiedad universal del producto tensorial. Si $(s, m'') \in S \times M''$, definimos

$$\tilde{\gamma}(s, m'') = \overline{s \otimes m},$$

[1]Para algunos sencillamente una A-bilineal.

donde $m \in M$ es tal que $g(m) = m''$. Si bien esta definición luce poco natural porque depende del m elegido, veamos que en realidad es independiente de la elección. En concreto, si $m_1 \in M$ es tal que $g(m) = g(m_1) = m''$, entonces esto implica que $g(m - m_1) = 0$ y por exactitud $m - m_1 \in \operatorname{im}(f) = \ker(g)$. Por lo tanto, resulta que

$$s \otimes m - s \otimes m_1 = s \otimes (m - m_1) \in \operatorname{im}(1_S \otimes f),$$

y por lo tanto $\overline{s \otimes m} = \overline{s \otimes m_1}$ en el cociente. Luego $\tilde{\gamma}$ no depende del elemento elegido en la preimagen de m'' por g. Es directo verificar que $\tilde{\gamma}$ es $\mathbb{Z}$-bilineal y A-balanceada por lo que se extiende a una tal

$$\begin{aligned} \gamma\colon S \otimes_A M'' &\to (S \otimes_A M)/\operatorname{im}(1_S \otimes f) \\ s \otimes m'' &\to \overline{s \otimes m} \end{aligned}$$

Como $1_S \otimes g$ es epimorfismo, entonces $\overline{1_S \otimes g}$ es epimorfismo y por lo tanto basta ver que $\gamma \circ \overline{1_S \otimes g}$ es la identidad del cociente para concluir que $\overline{1_S \otimes g}$ es un isomorfismo. Más aún, como las clases de tensores elementales $\overline{s \otimes m} \in (S \otimes_A M)/\operatorname{im}(1_S \otimes f)$ generan, resulta suficiente observar que:

$$(\gamma \circ \overline{1_S \otimes g})(\overline{s \otimes m}) = \gamma(s \otimes g(m)) = \overline{s \otimes m},$$

para cada $s \otimes m \in S \otimes_A M$. Luego, por la linealidad se sigue que γ es inversa a izquierda de $\overline{1_S \otimes g}$, lo cual prueba por lo dicho anteriormente que $\overline{1_S \otimes g}$ es isomorfismo y, gracias al Lema 1, la exactitud de la sucesión.

$\square$