ÁLGEBRA II

ENTREGA OPCIONAL

El splitting lemma[1]

Ejercicio (Producto semidirecto interno). *Sean G un grupo y N, H dos subgrupos. Supongamos que N es normal en G. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) *Se tiene que $G = NH$ y $N \cap H = \{1\}$. Es decir, todo elemento de G se escribe de manera única como un producto de un elemento de N y uno de H.*

(II) *La composición de la inclusión $i_H \colon H \to G$ con la proyección canónica al cociente $\pi \colon G \to G/N$ es un isomorfismo,*

$$\pi \circ i_H \colon H \xrightarrow{\cong} G/N.$$

(III) *Existe un morfismo de grupos $r : G \to H$ que se restringe a la identidad de H y cuyo núcleo es N,*

$$r \circ i_H = \mathrm{id}_H\,.$$

Concluir que en cualquiera de los casos anteriores, existen un morfismo de grupos $\phi : H \to$ $\mathrm{Aut}(N)$ y un ***isomorfismo*** *de grupos $\varphi : N \rtimes_\phi H \to G$ tales que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & N \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & N \rtimes_\phi H \arrow[r, two heads] \arrow[d, dashed, "\exists\varphi"'] & H \arrow[r] \arrow[d, "\pi\circ i_H"] & 1 \\
1 \arrow[r] & N \arrow[r, hook, "i_N"'] & G \arrow[r, two heads, "\pi"'] & G/N \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

---

[1] Este anglicismo es estándar. Su traducción es «lema de escisión».