CLASIFICANDO GRUPOS DE ORDEN PEQUEÑO

RESUMEN. Listado de problemas para la clase práctica del 15 de abril, en la cual clasificaremos grupos de orden pequeño a menos de isomorfismo. Incluimos algunos resultados de relevancia a modo de recordatorio.

LOS PROBLEMAS

Ejercicio 1. Pruebe que los grupos de orden $56 = 2^3 \cdot 7$ y $1210 = 11^3 \cdot 5 \cdot 2$ no son *simples*, es decir, tienen algún subgrupo normal.

Ejercicio 2. Pruebe que si H y K son dos grupos de órdenes coprimos, entonces

$$\mathrm{Aut}(H \times K) \cong \mathrm{Aut}(H) \times \mathrm{Aut}(K).$$

Deduzca que si $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r} \in \mathbb{N}$ con $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{N}$ primos distintos, entonces $\mathcal{U}_n = U_{p_1^{a_1}} \times \cdots \times U_{p_r^{a_r}}$.

Demostración. Notar que si $f \in \mathrm{Aut}(H)$ y $g \in \mathrm{Aut}(K)$, entonces $f \times g \colon H \times K \to H \times K$ es un automorfismo de $K \times H$. Además, vale la igualdad $(f \times g) \circ (f' \times g') = (f \circ f') \times (g \circ g')$ y se tiene que $f \times g = f' \times g'$ si y sólo si $f = f'$ y $g = g'$. En otras palabras, tenemos un monomorfismo de grupos

$$\Lambda \colon (f, g) \in \mathrm{Aut}(H) \times \mathrm{Aut}(K) \mapsto f \times g \in \mathrm{Aut}(H \times K).$$

Resta ver entonces que Λ es sobreyectivo, es decir, que todo automorfismo de $H \times K$ es de la forma $f \times g$ para ciertos $f \in \mathrm{Aut}(H)$, $g \in \mathrm{Aut}(K)$.

Sea $\phi \in H \times K \to H \times K$ un automorfismo. Observemos que

$$\phi(h, k) = \phi((h, 1)(1, k)) = \phi(h, 1)\phi(1, k) \qquad (\forall h \in H, k \in K),$$

por lo que ϕ se puede determinar completamente a partir de $\phi_1 = \phi(-, 1)$ y $\phi_2 = (1, -)$.

A su vez, por la propiedad universal del producto sabemos que $\phi_1 \colon H \to H \times K$ debe ser de la forma (f, β) con $f \colon H \to H$ y $\beta \colon H \to K$. Afirammos que β es el morfismo trivial. En efecto, si $h \in H$ entonces $\mathrm{ord}(\beta(h))$ divide a $\mathrm{ord}(h)$, que a su vez divide a $|H|$, y por otro lado $\mathrm{ord}(\beta(h)) \mid |K|$ ya que $\beta(h) \in K$. Como $(|H| : |K|) = 1$, necesariamente $\mathrm{ord}(\beta(h)) = 1$; es decir, $\beta(h) = h$. En consecuencia, se tiene que $\phi_1(h) = (f(h), 1)$.

De forma simétrica se pueba que $\phi_2(k) = (1, g(k))$ para cierto morfismo de grupos $g \colon K \to K$. Por lo tanto,

$$\phi(h, k) = \phi_1(h)\phi_2(k) = (f(h), 1)(1, g(k)) = (f(h), g(k)) = (f \times g)(h, k)$$

para todo $h \in H$, $k \in K$. Resta notar que f y g no son solo endomorfismos sino automorfismos. Hay varias formas de proceder, una es escribir $\phi^{-1} = f' \times g'$ y deducir de la identidad $\mathrm{id} = \phi \circ \phi^{-1} = \phi^{-1} \circ \phi$ que $f' = f^{-1}$, $g' = g^{-1}$. Otra es notar que como $\phi = f \times g$ es epi, entonces f y g necesariamente deben serlo; como H y K son finitos esto alcanza para afirmar que los endomorfismos f y g son biyectivos.

$\square$

Ejercicio 3. Sean G, H, K tres grupos y supongamos que H y K tienen órdenes coprimos. Pruebe que si $\mathrm{Hom}(G, \mathrm{Aut}(H)) = 1$ entonces todo producto semidirecto $(H \times K) \rtimes_\phi G$ es isomorfo a un grupo de la forma $H \times (K \rtimes_\psi G)$.

Demostración. Sea $\phi\colon G \to \mathrm{Aut}(H \times K)$ y $\Lambda\colon \mathrm{Aut}(H) \times \mathrm{Aut}(K) \to \mathrm{Aut}(H \times K)$ el isomorfismo del ejercicio anterior. Luego, si $\phi_x = f_x \times g_x$, entonces $\phi' = \Lambda^{-1}\phi\colon G \to \mathrm{Aut}(H) \times \mathrm{Aut}(K)$ envía x a (f_x, g_x). Notar que ϕ' se corresponde con dos morfismos, uno de la forma $\xi\colon G \to \mathrm{Aut}(H)$, $\xi_x = f_x$ y otro de la forma $\psi\colon G \to \mathrm{Aut}(K)$, $\psi_x = g_x$. La hipótesis nos asegura que el primero de estos morfismos es el trivial; por lo tanto $f_x = 1_H$ para todo $x \in G$. Luego

$$(\phi_x)(h,k) = (f_x \times g_x)(h,k) = (h, g_x(k)) = (h, \psi_x(k)). \quad (\forall h \in H, k \in K)$$

La multiplicación en $(H \times K) \rtimes_\phi G$ es entonces

$$((h,k),x) \cdot_\phi (h',k',x') = ((h,k)\phi_x(h',k'), xx') = ((h,k)(h',\psi_x(k')), xx') = ((h', k\psi_x(k')), xx').$$

En consecuencia la biyección

$$\Gamma\colon (H \times K) \rtimes_\phi G \to H \times (K \rtimes_\psi G), \qquad \Gamma((h,k),x) = (h,(k,x))$$

es un isomorfismo de grupos. $\square$

Ejercicio 4. Pruebe que hay dos grupos de orden $3 \cdot 5 \cdot 7$ a menos de isomorfismo, uno abeliano y otro no abeliano.

Resultados a tener en cuenta

Teorema 1 (Cauchy)**.** *Si G es un grupo finito y p un primo que divide a $|G|$, entonces existe un elemento de orden p.* $\square$

Proposición 1 (Órdenes)**.** *Si G es un grupo finito de orden n, y $o_d = \#\{x \in G : \mathrm{ord}(x) = d\}$ para cada $d \in \mathbb{N}$, entonces*

$$n = \sum_{d|n} o_d.$$

Además, si $p \mid n$ es primo y s_p es la cantidad de subgrupos de orden p, entonces

$$o_p = (p-1)s_p.$$

Demostración. Demostramos la última afirmación, que no enunciamos explícitamente en la práctica. Todo subgrupo de orden p tiene exactamente $p-1$ elementos de orden p; a saber, todos excepto el neutro de G. Además, dos tales subgrupos H y K no comparten elementos de orden p a menos que sean iguales, pues $H \cap K$ debe tener orden 1 o p. $\square$

Proposición 2 (Ejercicio, Práctica 3)**.** *Sea G un grupo finito y $H \leq G$.*

(I) *Si G es simple, entonces $|G| \mid [G:H]!$*
(II) *Si $[G:H]$ es el menor primo que divide al orden de G, entonces H es normal en G.*

Teorema 2 (Sylow)**.** *Sea p un primo y G un grupo de orden $p^n m$ con $n > 0$ y $(m:p) = 1$. La cantidad de p-subgrupos de Sylow de G será denotada n_p. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

(I) $n_p \equiv 1 \pmod{p}$.
(II) $n_p \mid m$.
(III) *dos p-Subgrupos de Sylow siempre son conjugados uno del otro, en particular son equivalentes:*

(a) $n_p = 1$;
(b) *hay un p-subgrupo de Sylow normal.*

□

Teorema 3 (Productos (semi)directos)**.** *Sea G un grupo finito y $H, K \leq G$. Si $H \triangleleft G$ y $H \cap K = 1$, entonces HK es un subgrupo de G y se tiene un isomorfismo con un producto semidirecto externo*

$$H \rtimes_\phi K \cong HK, \qquad (h,k) \mapsto hk.$$

El producto es directo si y sólo si H es normal en HK, lo cual sucede por ejemplo si H es normal en G. □