Optimización

Primer Cuatrimestre 2023

Práctica N°0: Repaso de álgebra lineal y análisis.

Ejercicio 1 Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\langle v, w\rangle_A = v^t A w$ define un producto interno si y sólo si A es simétrica y definida positiva.

Ejercicio 2 (*Caracterización de matrices ortogonales)* Sea $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $O^{-1} = O^t$.
2. $||Ov|| = ||v||$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.
3. $\langle Ov, Ow\rangle = \langle v, w\rangle$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$.
4. Las columnas de O forman una base ortonormal.
5. Las filas de O forman una base ortonormal.

Ejercicio 3 Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que A es simétrica si y sólo si O^tAO es simétrica para toda $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal.

Ejercicio 4 Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que:

(a) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de A, entonces existe $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que A se descompone de la siguiente forma:
$$A = O \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix} O^t,$$
con $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$.

(b) *(Descomposición de Schur)* Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ son los autovalores de A (no necesariamente distintos), entonces existen $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal y $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular superior tal que $A = OTO^t$.

Ejercicio 5 Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica. Probar que:

(a) Todos los autovalores de A son reales.

(b) *(Descomposición espectral)* Existen $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal y $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonal tal que $A = O\Lambda O^t$, es decir, A admite una base ortonormal de autovectores.

Ejercicio 6 Probar que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica y definida positiva si y sólo si admite una descomposición de Cholesky: $A = LL^t$, con L triangular inferior e invertible.

Ejercicio 7 Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ de rango r con valores singulares σ_j. Probar que:

(a) A se puede escribir de la forma:

$$A = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j B_j,$$

donde las matrices B_j tienen rango 1.

(b) *(Teorema de Eckart-Young)* La matriz de rango k ($\leq r$) que mejor aproxima a A en norma matricial 2 es:

$$A_k = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j B_j,$$

Ejercicio 8 Escribir funciones que despejen un sistema de ecuaciones de la forma $Ax = b$ si:

- A es triangular inferior.
- A es triangular superior.

Observar que combinando estos programas con una descomposición adecuada (LU, Cholesky o QR, por ejemplo), se puede resolver un sistema cuando A no es triangular.

Ejercicio 9 Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, calcular el gradiente y el hessiano de la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por: $f(x) = \frac{1}{2}x^t Ax$. Probar que existe una matriz simétrica B tal que $f(x) = \frac{1}{2}x^t Bx$.

Ejercicio 10 Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 para la función $f(x, y) = xe^y$ en $(0, 0)$. Utilizar el polinomio para aproximar el valor de la función en $(0{,}98, 0{,}02)$ y estimar el error cometido.

Ejercicio 11 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Probar que:

(a) Para toda dirección unitaria d se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot d.$$

(b) Si $\nabla f(x_0) \neq 0$, entonces $\nabla f(x_0)$ es la dirección de máximo crecimiento de f en $x = x_0$.

(c) Si $\nabla f(x_0) \neq 0$, entonces para toda dirección unitaria se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) > 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \measuredangle(\nabla f(x_0), d) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Ejercicio 12 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla f(x_0) \neq 0$. Probar que $\nabla f(x_0)$ es ortogonal a la superficie de nivel $\{x : f(x) = f(x_0)\}$ en el punto x_0.

Ejercicio 13 Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de clase C^1, $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ el vector de puntos equiespaciados tales que $x_0 = a$, $x_n = b$ e $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ el vector con $y_i = f'(x_i)$. Escribir un programa que devuelva un vector z tal que $z_i \approx f'(x_i)$, donde la aproximación se realiza usando el método de diferencias finitas, tomando como datos los vectores x e y y el tipo (*backward*, *forward* y *centradas*).

Ejercicio 14 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que se anula sólo una vez en el intervalo. Escribir el algoritmo de Newton para aproximar la raíz de f. Usar alguna variante de diferencias finitas del ejercicio anterior para estimar los valores de f'.