Lógica y Computabilidad

Primer Cuatrimestre – 2024

Práctica 8 – Recursividad Primitiva

Nota En cada ejercicio puede asumir como primitivas recursivas las funciones primitivas recursivas estudiadas en ejercicios y/o ítems anteriores.

1. Probar que son primitivas recursivas las funciones

$$\text{máx}(x,y)\ ,\quad par(x) \quad \text{y} \quad psq\,(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es cuadrado perfecto,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   Se define $\text{máx}(x,y)$ en el sentido usual y $par(x)$ como el predicado que vale 1 sii x es par. Para las funciones par y psq, conviene probar primero que son primitivas recursivas las funciones auxiliares $hf(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ y $sqrt\,(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

2. Dadas funciones totales ψ y ϕ de una y dos variables respectivamente, decidir si f se obtiene por recursión primitiva a partir de ellas en cada caso:

   a) $f(x,0) = \psi(x)\ ,\ f(x,y+1) = f(x,y) + \phi(y,x);$

   b) $f(x,0) = \phi(0,x)\ ,\ f(x,y+1) = \psi(f(x,y)+1);$

   c) $f(x,0) = 17\ ,\ f(x,y+1) = f(0,y);$

   d) $f(x,0) = 17\ ,\ f(x,y+1) = f(0,\phi(x,y)).$

3. Sean ψ y ϕ funciones recursivas primitivas de una y dos variables respectivamente. Probar que cada una de las funciones siguientes es también primitiva recursiva.

   a) La función f_1 de una variable dada por $f_1\,(0) = \psi\,(0) + 1$ y

$$f_1\,(x) = \psi\,(\psi\,(\ldots(\psi\,(x)+1)\ldots)+1)+1,$$

   donde la cantidad de veces que aparece ψ es $x+1$. Por ejemplo, $f_1\,(1) = \psi\,(\psi\,(1)+1)+1$.

   b) La función f_2 de dos variables dada por $f_2\,(x,0) = \phi\,(x,0)$ y

$$f_2\,(x,y) = \phi\,(\phi\,(\phi\,(\ldots\phi\,(\phi\,(x,y)\,,y-1)\ldots 2)\,,1)\,,0)\,,$$

   donde la cantidad de veces que aparece ϕ es $y+1$. Por ejemplo, $f_2\,(x,1) = \phi\,(\phi\,(x,1)\,,0)$.

4. Sea g una función recursiva primitiva unaria. Usando sumas y productos acotados, probar que cada una de las siguientes funciones es recursiva primitiva:

$$f_1(y) = \#\,\{i \in [0,y] \mid g(i) > 3\}\ ,\quad f_2\,(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } g\,(i+1) > g\,(i) \text{ cuando } i \in [x,y], \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$f_3\,(w,x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le y \text{ y } w \text{ es el mayor entre } g\,(x)\,,g\,(x+1)\,,\ldots,g\,(y), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

5. Sean g una función recursiva primitiva de $n+1$ variables y s,t funciones recursivas primitivas de una variable. Probar que son recursivas primitivas las funciones

$$f_1\,(x_1,\ldots,x_n,y) = \text{máx}_{0\le i\le y}\ g\,(x_1,\ldots,x_n,i)\,,$$

$$f_2\,(x_1,\ldots,x_n,y) = \begin{cases} \text{máx}_{s(y)\le i\le t(y)}\ g\,(x_1,\ldots,x_n,i) & \text{si } s\,(y) \le t\,(y), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

6. Probar que las funciones dadas a continuación son primitivas recursivas.

   a) $shr\,(x,n) = \lfloor \frac{x}{2^n} \rfloor$

   b) $lg\,(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \lfloor log_2\,(x) \rfloor + 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$

   c) La función $\mathrm{dig}\,(\mathrm{x}, \mathrm{n})$ definida como el n-ésimo dígito en la representación binaria de x, contando desde la derecha y comenzando con 0. Por ejemplo, $\mathrm{dig}\,(13,0) = 1$, $\mathrm{dig}\,(13,1) = 0$, $\mathrm{dig}\,(13,2) = 1$, $\mathrm{dig}\,(13,3) = 1$ y $\mathrm{dig}\,(13,4) = 0$.

   d) El número $f\,(x)$ de unos en la representación binaria de x.

   e) La función $f\,(n)$ dada por el último dígito del desarrollo decimal de n.

   f) La función $f\,(n)$ dada por el primer dígito del desarrollo decimal de n.

   g) La función $G\,(n,m)$ definida como la cantidad de números primos entre n y m.

   h) La función $G\,(n,m)$ definida como $f^n\,(m)$, donde f es recursiva primitiva unaria.

   i) La función de Fibonacci $F(n)$ definida por

   $$F\,(0) = 0\,, \quad F\,(1) = 1 \quad \text{y} \quad F\,(n+2) = F\,(n+1) + F\,(n)\,.$$

   j) La función $H(n)$ definida por $H\,(0) = 0$ y $H\,(n+1) = 1 + \prod_{i=1}^{n} H\,(i)\,.$

Clases PRC

7. Sea $\mathcal{C}$ una clase PRC y sean g_1, g_2, g_3, $g_4 \in \mathcal{C}$. Probar que están en $\mathcal{C}$ las funciones

   $$h_1(x,y,z) = g_1(z,y,x)\,,\ h_2(x) = g_2(x,x,x) \ \text{ y } \ h_3(w,x,y,z) = h_1(g_3(w,y), z, g_4(2, g_4(y,z))).$$

8. Probar que la clase TOT de todas las funciones totales es PRC mientras que la clase TOT$[n]$ formada por todas las funciones totales de no más de n variables no lo es.

9. Sea $\mathcal{C}$ una clase PRC, demostrar que se encuentra cerrada por *recursión doble*, i.e., dadas $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$ en $\mathcal{C}$, demotrar que la función $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ que cumple lo siguiente también lo está:

   $$\begin{aligned} h(x,0,z) &= f(x,0,z) \\ h(x,y,0) &= f(x,y,0) \\ h(x,y+1,z+1) &= g(x,y,z,h(x,y,z)) \end{aligned}$$

   Notar que h queda completamente determinada por el esquema de recursión doble.

10. Sea $\mathcal{C}_{i+p}$ la clase de funciones que extiende a la clase de funciones iniciales $\mathcal{C}_i$ con la función codificadora de pares $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y las observadoras $l, r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Sea $\mathcal{C}_{Ack}$ la mínima clase que incluye a $\mathcal{C}_{i+p}$ y se encuentra cerrada por composición y por *iteración de funciones unarias*, i.e., si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ está en $\mathcal{C}_{Ack}$ entonces también está $h(n,x) = f^n(x) = f \circ \cdots \circ f$

    a) Demostrar que toda función en $\mathcal{C}_{Ack}$ es primitiva recursiva.

    b) Observar que en $\mathcal{C}_{Ack}$ se tienen las funciones codificadoras de n-tuplas y sus observadoras.

    c) Demostrar que si $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ pertenecen a la clase $\mathcal{C}_{Ack}$ y h se obtiene mediante el esquema de recursión de f y g, entonces la función $s : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ definida por $s(\overline{x}, y) = \langle \overline{x}, y, h(\overline{x}, y) \rangle$ también pertenece a la clase $\mathcal{C}_{Ack}$.

    d) Concluir que la clase $\mathcal{C}_{Ack}$ coincide con la de primitivas recursivas.