Lógica y Computabilidad

Primer Cuatrimestre – 2024

Práctica 3 – Consecuencia Semántica y Compacidad

Consecuencia Semántica

1. Decidir si los siguientes conjuntos de fórmulas son satisfactibles y, en tal caso, encontrar todas las valuaciones que satisfacen a dichos conjuntos.
   a) $\Gamma = \{((p_1 \to p_2) \to p_3), \neg p_2, (p_1 \vee p_3)\}$.
   b) $\Gamma = \{((p_2 \to p_1) \to p_1), \neg p_1, (p_1 \wedge p_3), (p_3 \to p_1)\}$.

2. Sea $\Gamma \subset \text{Form}$.
   a) Probar que si Γ es satisfactible y $\Gamma' \subset \Gamma$, entonces Γ' es satisfactible.
   b) Mostrar con un ejemplo que la recíproca de *a*) no es cierta.
   c) Probar que Γ es satisfactible si y sólo si $\text{Con}(\Gamma)$ es satisfactible.
   d) Probar que valen $\Gamma \subset \text{Con}(\Gamma)$ y $\text{Con}(\text{Con}(\Gamma)) = \text{Con}(\Gamma)$.
   e) Probar que Γ es infinito si $\Gamma = \text{Con}(\Gamma)$.
   f) Probar que Γ es infinito si lo satisfacen un número positivo y finito de valuaciones.

3. Probar que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $\Gamma_k \subset \text{Form}$ satisfecho por exactamente k valuaciones.

4. Sean Γ_1 y Γ_2 dos conjuntos de fórmulas proposicionales.
   a) Probar que $\text{Con}(\Gamma_1) \cup \text{Con}(\Gamma_2) \subset \text{Con}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$.
   b) Mostrar con un ejemplo que no vale la igualdad en el ítem anterior.
   c) Probar que si $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ entonces $\text{Con}(\Gamma_1) \subset \text{Con}(\Gamma_2)$.
   d) Probar que si $\Gamma_1 \subset \text{Con}(\Gamma_2)$ entonces $\text{Con}(\Gamma_1) \subset \text{Con}(\Gamma_2)$.

5. Sean $\alpha, \beta \in \text{Form}$. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones.
   a) $\text{Con}(\beta) \subset \text{Con}(\alpha)$ si y sólo si $\alpha \to \beta$ es tautología.
   b) $\text{Con}(\alpha \wedge \beta) = \text{Con}(\alpha) \cap \text{Con}(\beta)$.
   c) $\text{Con}(\alpha \vee \beta) = \text{Con}(\alpha) \cup \text{Con}(\beta)$.
   d) $\text{Con}(\alpha \to \beta) \subset \text{Con}(\beta)$.

6. Dadas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \text{Form}$, probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.
   a) La fórmula $\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n)$ es una tautología.
   b) Las fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ no son simultáneamente válidas para ninguna valuación.
   c) Existe una fórmula β tal que $\beta \in \text{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ y $\neg\beta \in \text{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$.
   d) Toda fórmula β es un elemento de $\text{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$.

Definición Un conjunto Γ de fórmulas proposicionales se dice *maximalmente satisfactible* si es satisfactible y para toda fórmula $\alpha \notin \Gamma$ se tiene que $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es insatisfactible.

7. Mostrar un ejemplo de conjunto maximalmente satisfactible.

8. Sea $\Gamma \subset \text{Form}$ un conjunto satisfactible.

   a) Probar que Γ es maximalmente satisfactible si y sólo si existe una valuación $v \in \text{Val}$ tal que $\Gamma = \{\alpha \in \text{Form} : v(\alpha) = 1\}$.

   b) Probar que Γ es maximalmente satisfactible si y sólo si para toda fórmula α se tiene que $\alpha \in \Gamma$ o $\neg\alpha \in \Gamma$.

   c) Probar que existe $\Gamma' \subset \text{Form}$ maximalmente satisfactible tal que $\Gamma \subset \Gamma'$.

   d) Probar que $(\alpha \vee \beta) \in \Gamma$ implica $\alpha \in \Gamma$ o $\beta \in \Gamma$ para Γ maximalmente satisfactible.

   e) Si Γ es maximalmente satisfactible, probar que $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si $\alpha \in \Gamma$.

   f) Si Γ es un conjunto maximalmente satisfactible, ¿es necesariamente $\Gamma = \text{Con}(\Gamma)$?

   g) Si $\Gamma = \text{Con}(\Gamma)$, ¿es necesariamente Γ un conjunto maximalmente satisfactible?

9. Decimos que dos conjuntos $\Gamma, \Gamma' \subset \text{Form}$ son *equivalentes* si para toda fórmula α se tiene que $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si $\Gamma' \models \alpha$. Por otra parte, decimos que un conjunto $\Gamma \subset \text{Form}$ es *independiente* si para toda $\gamma \in \Gamma$ se tiene que $\Gamma \setminus \{\gamma\} \not\models \gamma$.

   a) Probar que todo conjunto finito de fórmulas proposicionales tiene un subconjunto independiente equivalente.

   b) Mostrar con un ejemplo que un conjunto infinito de fórmulas proposicionales no siempre tiene un subconjunto independiente equivalente.

Compacidad

10. Si Γ es un conjunto de fórmulas, una fórmula φ es consecuencia de Γ si y sólo si φ es consecuencia de un subconjunto finito de Γ.

11. Sean Γ_1 y Γ_2 dos conjuntos satisfactibles de fórmulas proposicionales tales que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfactible. Probar que existe una fórmula α tal que $\Gamma_1 \models \alpha$ y $\Gamma_2 \models \neg\alpha$. ¿Qué sucede si consideramos más de dos conjuntos?

12. Sea Γ un conjunto de fórmulas del cálculo proposicional con la siguiente propiedad: si α y β son fórmulas de Γ, entonces $\alpha \to \beta$ es tautología o bien $\beta \to \alpha$ es tautología. Probar que si $\Gamma \models \gamma$, entonces existe una fórmula $\alpha \in \Gamma$ tal que $\alpha \models \gamma$.

13. Sean $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \text{Form}$. Diremos que Γ_2 es *consecuencia débil* de Γ_1 si toda valuación que satisface a Γ_1 satisface también alguna fórmula de Γ_2. Diremos que Γ_2 es *consecuencia fuerte* de Γ_1 si toda valuación que satisface a Γ_1 satisface también a Γ_2.

    Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

    a) Si Γ_2 es consecuencia débil de Γ_1, entonces existe un subconjunto finito S de Γ_1 tal que Γ_2 es consecuencia fuerte S.

    b) Si Γ_2 es consecuencia fuerte de Γ_1, entonces existe un subconjunto finito S de Γ_1 tal que Γ_2 es consecuencia fuerte de S.

14. Sea Γ un conjunto de fórmulas proposicionales. Mostrar que si cada valuación satisface al menos una fórmula de Γ, entonces existe un número finito de fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en Γ tales que $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$ es tautología.

Definición Un conjunto Γ de fórmulas proposicionales se dice *consistente maximal* si es consistente y para toda fórmula $\alpha \notin \Gamma$ el conjunto $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es inconsistente.

15. El *procedimiento de Lindenbaum*, descripto a continuación y llamado así en honor a Adolf Lindenbaum (1904-1941), permite obtener un conjunto consistente maximal Γ_∞ a partir de un conjunto consistente Γ dado, de modo tal que $\Gamma_\infty \supset \Gamma$.

    i) Enumerar las fórmulas de Form, digamos $\psi_0, \psi_1, \ldots$

    ii) Definir la secuencia de conjuntos $(\Gamma_n)_n \subset \text{Form}$ dada por

    $$\Gamma_0 = \Gamma,$$
    $$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\psi_n\} & \text{si este conjunto es consistente,} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\psi_n\} & \text{si no.} \end{cases}$$

    iii) Considerar el conjunto $\Gamma_\infty = \bigcup_{n\geq 0} \Gamma_n$.

    Probar las siguientes afirmaciones.

    a) Cada Γ_n es consistente.

    b) Exactamente una de las fórmulas ψ, $\neg\psi$ está en Γ_∞ para cada $\psi \in \text{Form}$.

    c) Para cada $\psi \in \text{Form}$ con $\Gamma_\infty \models \psi$ se tiene $\psi \in \Gamma_\infty$.

    d) El conjunto Γ_∞ es consistente maximal y contiene a Γ.

16. Dados dos conjuntos de fórmulas $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \text{Form}$ se define

    $$\Gamma_1 \to \Gamma_2 = \{\, \alpha \to \beta \;:\; \alpha \in \Gamma_1,\ \beta \in \Gamma_2 \,\} \subset \text{Form}\,.$$

    Probar que si $\Gamma_1 \to \Gamma_2$ es insatisfactible, entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ fórmulas de Γ_1 y $\beta_1, \ldots, \beta_m$ fórmulas de Γ_2 tales que

    $$(\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n) \to (\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m)$$

    es insatisfactible.