Lógica de Primer Orden, Cuarta Parte

El objetivo de esta clase es en primer lugar desarrollar la teoría de la prueba de la lógica de primer orden y posteriormente introducir dos nociones fundamentales en la lógica de primer orden que son la de isomorfismo de interpretaciones y expresablidad.

Procederemos en forma similar a lo visto en la lógica proposicional, introduciendo una lista de axiomas-esquemas pero para la lógica de primer orden. Estos axiomas son independientes del lenguaje en el sentido que todos comparten el mismo esquema, aunque los símbolos que figuren en una fórmula que represente un axioma dependa el alfabeto de lenguaje en cuestión.

Definición 1 *(Un sistema de axiomas para la lógica de primer orden)* Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Un *axioma* es una fórmula del lenguaje $\mathcal{L}$ que es de alguno de los siguientes tipos, donde α, β, γ son fórmulas arbitrarias.

(AX1) $(\beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta))$.

(AX2) $((\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)))$.

(AX3) $((\neg\alpha \Rightarrow \neg\beta) \Rightarrow ((\neg\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \alpha))$.

(AX4) $(\forall x_i \alpha(x_i) \Rightarrow \alpha(t))$*, donde t es libre para x_i. (Aquí usamos la notación $\alpha(t)$ para expresar el resultado de sustituir en α cada aparición libre de x_i en α por el término t. Notar que si x_i es una variable ligada de α, $\alpha(t) = \alpha(x_i) = \alpha$).*

(AX5) $(\forall x_i(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \forall x_i \beta))$ *si x_i no es libre en α.*

Los primeros tres axiomas son los axiomas de la lógica proposicional mientras que los otros dos axiomas son los que se corresponden con los axiomas que involucran al cuantificador $\forall$. Estos axiomas son fórmulas universalmente válidas. En efecto ya sabemos que los primeros tres axiomas son del tipo una tautología de la lógica proposicional, mientras la Proposición 4 visto en la última clase dice que el axioma (AX4) es universalmente válida. Veamos que toda fórmula que represente el axioma $(AX5)$ es universalmente válida. Asumamos que no, luego existiría una interpretación I con universo U y una valuación w tal que $V_I^w(\forall x_i(\alpha \Rightarrow \beta)) = 1$ y $V_I^w((\alpha \Rightarrow \forall x_i \beta)) = 0$. Por lo tanto $V_I^w(\alpha) = 1$ y $V_I^w(\forall x_i \beta) = 0$. Se sigue que existe $u \in U$ tal que $V_I^{w(x_i/u)}(\beta) = 0$. Como x_i no es libre en α sabemos que $V_I^w(\alpha) = V_I^{w(x_i/u)}(\alpha) = 1$. Como $V_I^w(\forall x_i(\alpha \Rightarrow \beta)) = 1$ entonces $V_I^{w(x_i/u)}(\alpha \Rightarrow \beta) = 1$. Como $V_I^{w(x_i/u)}(\alpha) = 1$ se sigue que $V_I^{w(x_i/u)}(\beta) = 1$ lo que es una contradicción.

Para introducir la noción de prueba usaremos dos reglas de inferencia:

1) *Modus ponens*: $\{\alpha, (\alpha \Rightarrow \beta)\} \vdash \beta$.

2) *Generalización*: $\{\alpha\} \vdash \forall x_i \alpha$ donde x_i es una variable arbitraria.

La regla de generalización expresa en la práctica que si uno tiene una demostración de una fórmula que contiene a una variable x_i entonces la misma demostración es válida cuantificando la variable x_i, por ejemplo en el caso de escribir la identidad $x \cdot 0 = 0$ (el hecho que el 0 es absorbente para el producto) el cuantificador $\forall x$ se omite en la misma, como el x es arbitrario entonces se sigue $\forall x(x \cdot 0 = 0)$.

Convención: Al igual que en la lógica proposicional podemos trabajar en la Teoría de la prueba con un conjunto reducido de conectivos, en este caso serán $\neg, \Rightarrow$ y $\forall$. Escribimos $\exists x_i \alpha$ en lugar de $\neg\forall\neg x_i \alpha$.

Definición 2 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sea Γ un conjunto de fórmulas. Si $\alpha \in Form$ diremos que α *es demostrable* a partir de Γ si existe una sucesión finita de fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tal que $\alpha_n = \alpha$ y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que α_i es un axioma o bien es un elemento de Γ o bien existen índices $j, k < i$ tales que $\alpha_k = (\alpha_j \Rightarrow \alpha_i)$ o bien existe $j < i$ y una variable x_k tal que $\alpha_i = \forall x_k \alpha_j$. Escribimos $\Gamma \vdash \alpha$ para expresar que α es demostrable a partir de Γ.

Al igual que en la lógica proposicional, cuando $\Gamma = \emptyset$ entonces $\emptyset \vdash \alpha$ significa que α es demostrable a partir de los axiomas $(AX1) - (AX5)$. Las nociones de consecuencia lógica y satisfactibilidad se pueden generalizar en el contexto de la lógica de primer orden como sigue:

Definición 3 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sea Γ un conjunto de fórmulas. Diremos que Γ es *satisfactible* si existe una interpretación I de $\mathcal{L}$ y una valuación w tal que $V_I^w(\gamma) = 1$ para toda $\gamma \in \Gamma$. Si $\alpha \in Form$ diremos que α *es consecuencia lógica* de Γ si y sólo si para toda interpetación I y toda valuación w tal que $V_I^w(\gamma) = 1$ para toda $\gamma \in \Gamma$, entonces $V_I^w(\alpha) = 1$. Notaremos con $C(\Gamma)$ al conjunto de las consecuencias lógicas de Γ.

Notar que $C(\emptyset)$ es el conjunto de las fórmulas universalmente válidas.

Aquí surge una diferencia importante con la lógica proposicional. Sabemos que si Γ es un conjunto de fórmulas de la lógica proposicional, entonces $\Gamma \vdash \alpha$ implica $\alpha \in C(\Gamma)$, es decir toda fórmula que es demostrable a partir de Γ es consecuencia lógica de Γ. En cambio en la lógica de primer orden esto es falso como muestra el siguiente ejemplo. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado unario P^1 y sea $\Gamma = \{P^1(x_1)\}$. Si $\alpha = \forall x_1 P^1(x_1)$ entonces $\Gamma \vdash \alpha$ ya que α se obtiene por Generalización de $P^1(x_1)$. Sin embargo $\alpha \notin C(\Gamma)$. En efecto sea I la intepretación cuyo universo son los números naturales y P^1 se interpreta como el subconjunto formado por $\{0\}$. Sea w la valuación que manda todas las variables a 0. Es claro que $V_I^w(P^1(x_1)) = 1$, sin embargo $V_I^w(\forall x_1 \alpha_1) = 0$. Sin embargo cuando Γ es una teoría el resultado es cierto como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 4 *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sea Γ un conjunto de enunciados de $\mathcal{L}$. Si $\alpha \in Form$ y $\Gamma \vdash \alpha$ entonces $\alpha \in C(\Gamma)$. En particular si α es demostrable entonces α es universalmente válida.*

Demostración Sea I una interpretación que satisface a todos los enunciados de Γ. Luego para toda valuación w se sigue que $V_I^w(\gamma) = 1$ para toda $\gamma \in \Gamma$.

Sea $\alpha_1 \dots \alpha_n$ una demostración de α a partir de Γ. Basta probar por inducción en i que $V_I^w(\alpha_i) = 1$ para todo i. Si $i = 1$ entonces α_1 es un axioma o un elemento de Γ lo que implica en el primero caso que $V_I^w(\alpha_1) = 1$ ya que α_1 es universalmente válida y en el segundo caso $V_I^{w_1}(\alpha_1) = 1$ ya que $\alpha_1 \in \Gamma$. Asumamos que $i > 1$. Si α_i es un axioma o un elemento de Γ o se obtiene por modus ponens, la prueba que $V_I^w(\alpha_i) = 1$ es la misma que vimos para la lógica proposicional. Asumamos que α_i se obtiene por Generalización. Luego existe $j < i$ y una variable x_k tal que $\forall x_k \alpha_j = \alpha_i$. Por hipótesis inductiva sabemos que para cualquier $u \in U$ se tiene que $V_I^{w(x_k/u)}(\alpha_j) = 1$ ya que la valuación es arbitraria por hipótesis, lo que muestra que $V_I(\alpha_i) = 1$. $\square$

Si bien la versión del Teorema de la Deducción vista en la lógica proposicional no es válida en primer orden, tenemos la siguiente versión del Teorema de la Deducción:

Teorema 5 *(Teorema de la Deducción) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sea Γ un conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$. Sean $\alpha, \beta \in Form$. Si $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ donde en la prueba no se usa Generalización sobre ninguna variable libre de α, entonces $\Gamma \vdash (\alpha \Rightarrow \beta)$. En particular si α es un enunciado se tiene que $\Gamma \vdash (\alpha \Rightarrow \beta)$.*

Demostración. Sea $\beta_1 \dots \beta_n$ una prueba de β a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\}$. Probemos por inducción en i que $(\alpha \Rightarrow \beta_i$ es demostrable a partir de Γ. Si $i = 1$ entonces β_1 es un axioma o un elemento de Γ. Usando el mismo argumento que en la prueba del Teorema de la Deducción para la lógica proposicional se tiene en cualquiera de estos dos casos que $\Gamma \vdash (\alpha \Rightarrow \beta_1)$. Asumamos que $i > 1$. Si β_i es un axioma o es un elemento de Γ se sigue del caso base que $\Gamma \vdash (\alpha \Rightarrow \beta_i)$. Si β_i se obtiene por modus ponens, el mismo argumento que en la prueba del Teorema de la Deducción para la lógica proposicional muestra que $\Gamma \vdash (\alpha \Rightarrow \beta_i)$. Luego el caso nuevo para analizar es cuando β_i se obtiene por Generalización. Luego existe $j < i$ y una variable x_k tal que $\beta_i = \forall x_k \beta_j$. Por hipótesis inductiva tenemos que $\Gamma \vdash (\alpha \Rightarrow \beta_j)$. Aplicando Generalización se sigue que $\Gamma \vdash \forall x_k(\alpha \Rightarrow \beta_j)$. A continuación ponemos el axioma (AX5) $(\forall x_k(\alpha \Rightarrow \beta_j) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \forall x_k \beta_j)$ ya que x_k no es libre en α por hipótesis. Aplicando Modus Ponens se sigue que $\Gamma \vdash (\alpha \Rightarrow \forall x_k \beta_j) = (\alpha \Rightarrow \beta_i)$. $\square$

Ejemplos 6 1) Sea $\beta \in Form$, entonces $(\forall x_1 \forall x_2 \beta \Rightarrow \forall x_2 \forall x_1 \beta)$ es demostrable. Para probarlo usaremos el teorema anterior. Luego basta construir una prueba de $\forall x_2 \forall x_1 \beta$ a partir de $\{\forall x_1 \forall x_2 \beta\}$ donde la regla de Generalización no utilice variables libres de $\forall x_1 \forall x_2 \beta$. La siguiente es una prueba:

(1) $\forall x_1 \forall x_2 \beta$ *(Hipótesis)*

(2) $(\forall x_1 \forall x_2 \beta \Rightarrow \forall x_2 \beta)$. *(AX4) (Aquí usamos el hecho que x_1 es libre para x_1 en $\forall x_2 \beta$).*

(3) $\forall x_2 \beta$. *(Modus ponens entre (1) y (2)).*

(4) $(\forall x_2 \beta \Rightarrow \beta)$. *(AX4). (Aquí usamos el hecho que x_2 es libre para x_2 en β)*

(5) β *(Modus Ponens entre (3) y (4)).*

(6) $\forall x_1 \beta$ *(Generalización)*

(7) $\forall x_2 \forall x_1 \beta$ *(Generalización)*

2) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicados unario P^1 y un símbolo de constante c. Entonces $(P^1(c) \Rightarrow \exists x_1 P^1(x_1)$ es universalmente válida. Para probarlo recordemos que $\exists x_1 P^1(x_1) = \neg\forall x_1 \neg P^1(x_1)$. Por los resultados vistos en la teoría de la prueba de la lógica proposicional basta probar que $(\neg\neg\forall x_1 \neg P^1(x_1) \Rightarrow \neg P^1(c))$ es universalmente válida lo que equivale a probar que $(\forall x_1 \neg P^1(x_1) \Rightarrow \neg P^1(c))$ es universalmente válida. Para ello usaremos nuevamente la versión del Teorema de la Deducción para la lógica de primer orden. La siguiente es una prueba de $\neg P^1(c)$ a partir de $\{\forall x_1 \neg P^1(x_1)\}$. La siguiente es una prueba:

(1) $\forall x_1 \neg P^1(x_1)$ *(Hipótesis)*

(2) $(\forall x_1 \neg P^1(x_1) \Rightarrow \neg P^1(c))$. *(AX4).*

(3) $\neg P^1(c)$. *(Modus Ponens entre (1) y (2)).*

Notar que si $\Gamma \vdash (\alpha \Rightarrow \beta)$ entonces $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ para cualquier par de fórmulas de un lenguaje de primer orden y cualquier conjunto de fórmulas Γ de dicho lenguaje. Por otro lado la versión del Teorema de la Deducción en la lógica proposicional deja de ser cierto en general omitiendo la hipótesis del Teorema 5. Para ello tomamos el mismo ejemplo visto antes, si $\alpha = P^1(x_1)$ y $\Gamma = \{P^1(x_1)\}$ y $\beta = \forall x_1 P^1(x_1)$ entonces β es demostrable a partir de Γ usando Generalización pero ya vimos que la fórmula $(\alpha \Rightarrow \beta)$ no es universalmente válida.

La próxima clase veremos el denominado Teorema de Completitud para la lógica de primer orden.

Pasaremos a continuación a introducir dos nociones fundamentales de la semántica de los lenguajes de primer orden que son la de isomorfismo de interpretaciones y la de conjuntos expresables.

Isomorfismos y conjuntos expresables

Definición 7 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Sean I_1, I_2 dos interpretaciones de $\mathcal{L}$ cuyos universos son A_1 y A_2 respectivamente. Un *isomorfismo* entre estas interpretaciones es una función $g : A_1 \to A_2$ que verifica las siguientes condiciones:

(i) *g es biyectiva.*

(ii) *Si P^n es un símbolo de predicados n-ario de $\mathcal{L}$ y $a_1, \ldots, a_n \in A_1$ entonces $(a_1, \ldots, a_n) \in P^n_{I_1}$ si y sólo si $(g(a_1), \ldots, g(a_n)) \in P^n_{I_2}$.*

(iii) *Si f^n es un símbolo de función n-ario de $\mathcal{L}$ y $a_1, \ldots, a_n \in A_1$ entonces $g(f^n_{I_1}(a_1, \ldots, a_n)) = f^n_{I_2}(g(a_1), \ldots, g(a_n))$.*

(iv) *Si c es in símbolo de constante de $\mathcal{L}$ entonces $g(c_{I_1}) = c_{I_2}$.*

Es decir un isomorfismo es una biyección que preserva los símbolos de función, de predicados y de constantes interpretados en cada estructura. Diremos que dos $\mathcal{L}$-estructuras son *isomorfas* si existe un isomorfismo entre ambas estructuras.

Veamos un ejemplo. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad, un símbolo de función binario f^2 y un símbolo de predicados binario P^2. Sean I_1, I_2 las siguientes interpretaciones. El universo de ambas estructuras es el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, el símbolo de función f^2 se interpreta como la suma en las dos estructuras, mientras que el símbolo P^2 se interpreta com $<$ en la primera y como $>$ en la segunda. Entonces la aplicación $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $g(x) = -x$ es un isomorfismo. En efecto es claro que g es biyectiva. Para ver que g preserva los símbolos de función interpretados debemos probar que $g(x+y) = g(x)+g(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Z}$. $g(x + y) = -(x + y) = -x - y = g(x) + g(y)$. Luego g preserva la suma. Para ver que g preserva los símbolos de predicados debemos ver que si $x, y \in \mathbb{Z}$ entonces $x < y$ si y sólo si $g(x) > g(y)$ y esto es claro pues $x < y$ si y sólo si $-x > -y$. Luego g es un isomorfismo.

El siguiente resultado vincula el concepto de isomorfismo con el de validez de una fórmula:

Teorema 8 *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sean I_1, I_2 dos interpretaciones de $\mathcal{L}$ con dominios A_1, A_2 respectivamente. Si $g : A_1 \to A_2$ es un isomorfismo y ϕ es una fórmula de $\mathcal{L}$ entonces para toda valuación $w : Term \to A_1$ se tiene que $V_{I_1}^{w}(\phi) = V_{I_2}^{g \circ w}(\phi)$, donde $g \circ w$ es la valuación $Term \to A_2$ dada por la composición $g \circ w$. En particular, si ϕ es un enunciado de $\mathcal{L}$ se tiene que $V_{I_1}(\phi) = V_{I_2}(\phi)$.*

Demostración La prueba es hace por inducción en $c(\phi)$. Si $c(\phi) = 0$ entonces ϕ es una fórmula atómica. Luego $\phi = P^n(t_1 \ldots t_n)$ siendo $t_1, \ldots, t_n$ términos. Por lo tanto $V_{I_1}^{w}(P^n(t_1 \ldots t_n) = 1$ si y sólo si $(w(t_1), \ldots, w(t_n)) \in P_{I_1}^{n}$ lo que equivale por la parte (ii) de la Definición 7 que $(g(w(t_1)), \ldots, g(w(t_n))) \in P_{I_2}^{n}$ si y sólo si (por la identidad anterior) $V_{I_2}^{g \circ w}(P^n(t_1 \ldots t_n) = 1$. Luego vale la propiedad para el caso base es decir para las fórmulas atómicas. Si ϕ no es atómica tenemos los siguientes casos: a) $\phi = \neg\beta$, b) $\phi = (\alpha_1 \vee \alpha_2)$, c) $\phi = (\alpha_1 \wedge \alpha_2)$, d) $\phi = (\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2)$, e) $\phi = \forall x_i \beta$ y f) $\phi = \exists x_i \beta$, con $\beta, \alpha_1, \alpha_2$ fórmula y x_i una variable. Los casos a),b),c) y d) salen inmediatamente usando la definición inductiva del valor de verdad en términos de los 4 conectivos de la lógica proposicional. Veamos el caso e). Se sigue que $V_{I_1}^{w}(\forall x_i \beta) = 1$ si y sólo si para cualquier $a \in A_1$ se tiene que $V_{I_1}^{w(x_i/a)}(\beta) = 1$. Por hipótesis inductiva se sigue que esto equivale a decir $V_{I_2}^{g \circ w(x_i/a)}(\beta) = 1$ para todo $a \in A_1$. Es inmediato ver que $g \circ w(x_i/a) = (g \circ w)(x_i/g(a))$ para cualquier $a \in A_1$. Como g es suryectiva se sigue que es $V_{I_2}^{g \circ w(x_i/a)}(\beta) = 1$ para todo $a \in A_1$ si y sólo si $V_{I_2}^{(g \circ w)(x_i/b)}(\beta) = 1$ para todo $b \in A_2$ lo que es equivalente al hecho que $V_{I_2}^{g \circ w}(\forall x_i \beta) = 1$. La prueba del caso f) se hace de forma análoga. Cuando ϕ es un enunciado el valor de verdad de ϕ no depende de la valuación que se tome luego ϕ es válido en A_1 si y sólo si es válido en A_2. $\square$

Definición 9 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sea I una interpetación con universo U. Si A es un subconjunto de U diremos que A es *expresable* o *definible* si existe una fórmula ϕ de $\mathcal{L}$ con una única variable libre x_i tal que para toda valuación $w : Term \to U$ se tiene que $V_I^{w}(\phi) = 1$ si y sólo si $w(x_i) \in A$.

Es decir si *reemplazamos* x_i por cualquier elemento de a la fórmula ϕ es verdadera y si reemplazamos x_i por cualquier elemento que no pertenezca a A la fórmula es falsa. En el caso que A sea un conjunto con un único elemento a, A es expresable significa justamente que a es *distinguible.* El siguiente resultado es consecuencia del Teorema anterior.

Teorema 10 *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sea I una interpretación con dominio U. Entonces si $A \subseteq U$ es expresable y $g : U \to U$ es un isomorfismo se tiene que $g(A) = A$.*

Demostración. Sea $d \in A$ y sea $\phi(x_i)$ una fórmula que expresa al conjunto A. Sea w una valuación tal que $w(x_i) = d$. Luego $V_I^w(\phi) = 1$. Como g es isomorfismo se sigue del Teorema anterior que $V_I^{g \circ w}(\phi) = 1$ lo que implica que $g(d) \in A$. En forma análoga se prueba que si $g(a) \in A$ entonces $a \in A$ ya que la inversa de un isomorfismo es un isomorfismo. $\square$.

Estos resultados son importantes desde el punto de vista de las aplicaciones. Veamos algunos ejemplos.

1) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario f^2. Sea $I_1 = (\mathbb{N}, +)$ y $I_2 = (\mathbb{N}, \cdot)$. Veamos que estas interpretaciones no son isomorfas. Para ello basta ver por el primer teorema que existe un enunciado ϕ que sea válida en la primer estructura y no en la segunda. Es decir $V_{I_1}(\phi) \neq V_{I_2}(\phi)$. Para ello debemos encontrar una propiedad que sea expresable en este lenguaje y que sea válido en una estructura y no en la otra. Un ejemplo sencillo es la propiedad cancelativa. La suma es cancelativa pero el producto no lo es ya que por ejemplo $0.3 = 0.2 = 0$ pero $2 \neq 3$. La propiedad cancelativa se expresa mediante el enunciado

$$\phi = \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (f^2(x_1 x_3) = f^2(x_2 x_3) \to x_1 = x_2)$$

2) Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje del ejemplo anterior, $I_1 = (\mathbb{N} \backslash \{0\}, +)$ y $I_2 = (\mathbb{N} \backslash \{0\}, .)$. Probar que estas estructuras tampoco son isomorfas. Un argumento algo mas elaborado que el ejemplo anterior es como sigue. Sabemos que el orden usual de los números naturales es un orden total Por otro lado la relación $\leq$ se puede *expresar* en $\mathbb{N} \backslash \{0\}$ por medio de la suma por la fórmula $x \leq y$ si y sólo si $x = y$ o bien existe $z \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ tal que $x + z = y$. Luego definimos el siguiente enunciado

$$\phi = \forall x_1 \forall x_2 (((x_1 = x_2) \vee (\exists x_3 f^2(x_1 x_3) = x_2)) \vee \exists x_3 f(x_2 x_3) = x_1)$$

Este enunciado en válido en I_1. Sin embargo no es válido en I_2 ya que si cambiamos la suma por el producto lo que expresa el enunciado en esta estructura es que para todo par de números naturales positivos x, y o son iguales o x divide a y o bien y divide a x, hecho que no es cierto por ejemplo 2 no es divisor de 3 ni 3 es divisor de 2.

3) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y que no contiene ningún otro símbolo de predicados ni tampoco contiene símbolos de función ni de constantes. Si I es una interpretación con dominio U, entonces $A \subseteq U$ es expresable si y sólo si $A = \emptyset$ o bien $A = U$. Es decir los únicos subconjuntos expresables son el vacío y todo el universo. Es claro que el vacío es expresable por la fórmula $\neg x_1 = x_1$ y U por la fórmula $x_1 = x_1$. Supongamos que A es un subconjunto expresable que no sea vacío y $A \neq U$. Luego existen elementos a, b con $a \in A$ y $b \notin A$. Sea $g : D \to D$ la función definida por $g(a) = b$, $g(b) = a$ y $g(x) = x$ si $x \neq a$ y $x \neq b$, Es inmediato ver que g es una biyección y por ende un isomorfismo. Notar que en este lenguaje cualquier biyección es automáticamente un isomorfismo. Se sigue del Teorema 2 que $g(A) = A$ lo que es imposible ya que $g(a) = b$ y $b \notin A$.

4) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario f^2. Sean $I_1 = (\mathbb{R}, +)$ y $I_2 = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$. Probar que son interpretaciones isomorfas. En particular un enunciado es válido en el conjunto de los números reales con la suma si y sólo si es válido en los reales positivos con el producto.

La función exponencial con base el número e es un ejemplo de un isomorfismo, en efecto si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ es la función $g(x) = e^x$ es una biyección (la prueba se ve en los cursos de Análisis Matemático) y por propiedades de la exponencial se tiene que $g(x + y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ para todo par $x, y \in \mathbb{R}$.

5) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un símbolo de predicados binario P^2. Sea I la siguiente estructura ordenada, es decir el símbolo P^2 se interpreta como la siguiente relación de orden parcial. El dominio de I es el siguiente conjunto de 4 elementos $U = \{0, a, b, 1\}$ donde 0 es el primer elemento de U, 1 es el último elemento de U, y los elementos a, b son incomparables. Probar que los únicos elementos distinguibles son 0 y 1. Para ello sean ϕ_0, ϕ_1 las siguientes fórmulas:

$$\phi_0 = \forall x_2 P^2(x_1 x_2), \phi_1 = \forall x_2 P(x_2 x_1)$$

Es claro que ϕ_0 expresa al conjunto unitario $\{0\}$ y que ϕ_1 expresa al conjunto unitario $\{1\}$ lo que dice que 0 y 1 son distinguibles. Por otro lado la función $g : U \to U$ dada por $g(0) = 0, g(a) = b, g(b) = a$ y $g(1) = 1$ es un isomorfismo que no deja fijo ni a a ni a b.

6) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario f^2. Sea $I = (\mathbb{N}, \cdot)$. Probar que el conjunto de los números primos es expresable. Recordemos que en este caso un número p es primo si $p \neq 0, p \neq 1$ y si a es un divisor de p entonces $a = 1$ o bien $a = p$.

El problema central aquí es como expresar el complemento del conjunto formado por el 0 y por el 1. Para ello notar que la fórmula $x^2 = x$ se satisface si y sólo si $x = 0$ o bien $x = 1$. Luego la siguiente fórmula expresa al conjunto de los números primos:

$$\phi(x_1) = (\neg f^2(x_1 x_1) = x_1 \wedge \forall x_2 (\exists x_3 f^2(x_2 x_3) = x_1 \Rightarrow (f^2(x_2 x_2) = x_2 \vee x_2 = x_1))$$

7) Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje del ejercicio anterior y sea $I = (\mathbb{N}, +)$. Probar que si $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es un isomorfismo entonces g es la identidad.

Como g debe preservar la suma se sigue que $g(0) = g(0 + 0) = g(0) + g(0)$ lo que implica que $g(0) = 0$. Probemos por inducción en n que $g(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ya vimos que si $n = 0$ entonces $g(n) = n$. Asumamos por hipótesis inductiva que $g(x) = x$ para todo $x < n$, siendo $n > 0$. Como $n = (n - 1) + 1$ se sigue que $g(n) = g(n - 1) + g(1) = n - 1 + 1 = n$. Luego $g(x) = x$ para todo x. Notar que usamos el hecho que $g(1) = 1$. Esto se prueba usando el hecho que $1 = g(x)$ entonces $x = 1$. Es claro que $x \neq 0$. Luego $x = (x - 1) + 1$ lo que implica que $1 = g(x - 1) + g(1)$. Luego $g(1) \leq 1$ lo que implica $g(1) = 1$.