Lógica de Primer Orden, Segunda Parte

En esta segunda parte de la lógica de primer orden comenzaremos a estudiar la semántica de los lenguajes de primer orden. Para ello precisamos previamente considerar algunas cuestiones sintácticas en relación a las fórmulas. Cuando introducimos la noción de fórmula hemos utilizado, al igual que en la lógica proposicional, la noción de cadena de formación. Análogamente, podemos asignar a una fórmula definida en un lenguaje de primer orden un número natural denominado la complejidad. Más precisamente, si $\mathcal{L}$ es un lenguaje de primer orden y $\alpha \in Form$ definimos la *complejidad de* α como el número de conectivos, contados con repetición, que aparece en α. Dicha complejidad será denotada con $c(\alpha)$. Por ejemplo si $\mathcal{L}$ es un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado binario P^2 y $\alpha = (\forall x_1 \exists x_2 P^2(x_1 x_2) \Rightarrow \exists x_1 \exists x_2 P^2(x_2 x_1))$ entonces $c(\alpha) = 5$.

Por medio de la complejidad podemos definir la noción de variable ligada y variable libre en una fórmula. Más precisamente tenemos la siguiente definición inductiva:

Definición 1 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sea $\alpha \in Form$ tal que $c(\alpha) = k$. Si x_i una variable diremos que x_i *aparece libre* en α si verifica las siguientes condiciones: (i) Si $k = 0$ entonces α es una fórmula atómica. Luego $\alpha = P^n(t_1 \dots t_n)$ donde P^n es un símbolo de predicado n-ario y $t_1, \dots, t_n$ son términos. Entonces x_i aparece libre en α si y sólo si x_i aparece en algún término t_j para algún $1 \leq j \leq n$. (ii) Si $\alpha = \neg\beta$ con $\beta \in Form$ entonces x_i aparece libre en α si y sólo si aparece libre en β. (iii) Si $\alpha = (\beta_1 \circ \beta_2)$ donde $\beta_1, \beta_2 \in Form$ y $\circ$ es un conectivo binario, entonces x_i aparece libre en α si y sólo si x_i aparece libre en β_1 o bien aparece libre en β_2. (iii) Si $\alpha = \forall x_k \beta$ o bien $\alpha = \exists x_k \beta$ con $\beta \in Form$ y $x_k \in Var$ entonces x_i aparece libre en α si y sólo si $x_i \neq x_k$ y x_i aparece libre en β. Diremos que x_i es una *variable ligada* de α si x_i es variable de α pero no aparece libre en α. En el caso que x_i sea una variable que aparezca libre en α diremos simplemente que x_i es variable libre de α.

Por ejemplo si $\alpha = (P^2(x_1 x_2) \Rightarrow \exists x_3 P^1(x_3))$ donde P^2 y P^1 son símbolos de predicados binario y unario respectivamente. Entonces x_1 y x_2 son variables libres de α y x_3 es una variable ligada de α.

Definición 2 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sea $\alpha \in Form$. Diremos que α es un *enunciado* o *sentencia* si todas las variables que aparecen en α son ligadas.

Ejemplo 3 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un símbolo de constante c, un símbolo de función unario f^1 y un símbolo de predicado unario P^1. Las siguientes fórmulas de $\mathcal{L}$ son enunciados:

(A) $\forall x_1(P^1(x_1) \Rightarrow P^1(c))$.

(B) $P^1(f^1(c))$.

Notar que si una fórmula no posee variables, es decir todos los términos que aparecen en α son términos sin variables, entonces automáticamente α resulta ser un enunciado. El rol de los enunciados es de fundamental importancia en la lógica de primer orden, ya que como veremos, el valor de verdad que se le asigna a dichas fórmulas, depende solamente de la interpretación de los símbolos de predicado, de función y de constante.

Semántica de los lenguajes de Primer orden

En esta sección introduciremos la semántica de la lógica de primer orden. Si fijamos un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ debemos interpretar en primer lugar a los términos y en segundo lugar a las fórmulas. Para ello debemos comenzar interpretando los símbolos de Predicado, los símbolos de función y los símbolos de constante. Por medio de la interpretación de estos símbolos veremos a continuación como se interpretan los términos y las fórmulas.

Definición 4 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Una interpretación I de $\mathcal{L}$ consiste de los siguientes elementos.

(i) *Un conjunto no vacío U denominado el universo o dominio de la interpretación I.*

(ii) *Si P^n es un símbolo de predicado n-ario, le asociamos a P^n una relación P^n_I de n variables en el conjunto U, es decir un subconjunto $P^n_I \subseteq U^n$ del producto cartesiano $U^n = U \times \ldots \times U$ (n-veces U).*

(ii) *Si f^n es un símbolo de función n-ario, le asociamos a f^n una función de n variables $f^n_I : U^n \to U$ de n variables.*

(iii) *Si c es un símbolo de constante, le asociamos un elemento $c_I \in U$.*

Notemos en primer lugar que la terminología utilizada para describir a los símbolos de predicado, de función y de constante es coherente con la manera que se interpretan dichos símbolos. Es decir los símbolos de predicado, de función y de constante se interpretan respectivamente como relaciones, funciones y constantes en el universo de la interpretación. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 5 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un símbolo de predicado unario P^1, un símbolo de función binario f^2 y un símbolo de constante c. Las siguientes son interpretaciones de $\mathcal{L}$:

(A) $U = \mathbb{N}$, P^1_I es el subconjunto de $\mathbb{N}$ determinado por los números pares, $f^2_I = +$ y $c_I = 7$.

(B) U es el conjunto de habitantes de Rusia, P^1_I es el conjunto de los rusos que pesan más de 60 kilos, f^2_I es la proyección en la primer coordenada, es decir $f^2_I(x, y) = x$ $\forall x \forall y \in U$, $c_I =$ Vladimir Putin.

El ejemplo anterior muestra que el tipo de interpretación que se puede definir en un lenguaje de primer orden puede ser de naturaleza arbitraria. Lo único que hay que verificar es que los símbolos sean correctamente interpretados. Por ejemplo si en el ejemplo (A) interpretamos al símbolo de función f^2 como la función resta, es decir $f_I^2(x,y) = x - y$ para todo $x, y \in \mathbb{N}$, la función f_I no devuelve un número natural cuando $x < y$ y por ende la interpretación no es correcta.

Una clase importante de lenguajes son los denominados lenguajes con igualdad. Diremos que un lenguaje es *con igualdad* si aparece como símbolo de predicado binario en el lenguaje dado el símbolo $=$. En este caso este símbolo si interpreta siempre del mismo modo como la relación de identidad, es decir si I es una interpretación con universo U, $=_I = \{(x,y) \in U \times U : x = y\}$.

A partir de una interpretación de un lenguaje de primer orden, nuestro próximo paso será interpretar los términos del lenguaje. Para ello debemos interpretar a las variables. Para ello procederemos de un modo similar a lo que ocurre en la lógica proposicional pero en un contexto diferente. Recordemos que en la lógica proposicional, para interpretar a las fórmulas basta intepretar en primer lugar a las variables proposicionales asignándoles a las mismas un valor de verdad bajo una valuación. Pero en la lógica de primer orden las variables no toman valores en el conjunto $\{0,1\}$ sino en el *universo de la interpretación*. Basados en este criterio tenemos la siguiente definición.

Definición 6 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sea I una interpretación cuyo universo es U. Una *valuación* es una función $v : Term \to U$ que satisface las siguientes condiciones:

(i) *Si c es un símbolo de constante, entonces $v(c) = c_I$.*

(ii) *Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos y f^n es un símbolo de función,*
entonces $v(f^n(t_1 \ldots t_n)) = f_I^n(v(t_1), \ldots, v(t_n))$.

El siguiente resultado se prueba en forma análoga al Teorema 2 visto en la primera clase de semántica de la lógica proposicional y la dejamos como ejercicio:

Teorema 7 *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sea I una interpretación con universo U. Si $f : Var \to U$ es una función, entonces existe una única valuación $v_f : Term \to U$ que extiende a f, es decir $v_f(x_i) = f(x_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Más aún, si v_1, v_2 son dos valuaciones que coinciden en las variables que figuran en un término t, entonces $v_1(t) = v_2(t)$.*

Ilustremos con un ejemplo como se determina el valor de una valuación, a partir del valor de la misma en las variables. Consideremos el lenguaje del ejemplo anterior, y la interpretación del punto (A). Sea $f : Var \to \mathbb{N}$ la función definida por $f(x_i) = i$ para todo i. Sean t_1, t_2 los siguientes términos; $t_1 = f^2(x_4c))$, y $t_2 = f^2(cf^2(cc))$. El el primer caso tenemos que $v_f(t_1) = f(x_4) + 7 = 4 + 7 = 11$, mientras que $v_f(t_2) = 7 + (7 + 7) = 21$. Notar que para determinar el valor de v_f en el segundo término no es preciso conocer el valor de la función f ya que es un término *sin variables*. Moticados por este ejemplo tenemos el siguiente resultado

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sea I una interpretación de $\mathcal{L}$ con universo U. Si t es un término sin variables, podemos asignarle a t un único elemento $t_I \in U$ mediante las reglas descriptas en la definición anterior. Más precisamente, si t es un símbolo de constante c, entonces $t_I = c_I$. Mientras que si $t = f^n(t_1 \dots t_n)$ donde f^n es un símbolo de función n-ario y $t_1, \dots, t_n$ son términos sin variables, entonces $t_I = f_I^n((t_1)_I, \dots, (t_n)_I)$.

Vale la pena destacar que la interpretación de un término (con o sin variables) depende de como se interpretan los símbolos que figuran en dicho término.

Usando la interpretación de los términos, pasaremos a continuación a interpretar a las fórmulas.

Definición 8 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, sea I una interpretación con universo U y sea $w : Term \to U$ una valuación. Si α es una fórmula, definimos por inducción el $c(\alpha)$ el *valor de verdad* $V_I^w(\alpha)$ de α bajo la interpretación I y la valuación w como sigue.

(i) *Si $c(\alpha) = 0$ entonces α es una fórmula atómica. Luego existe un símbolo de predicado P^n y n términos $t_1 \dots t_n$ tales que $\alpha = P^n(t_1 \dots t_n)$. En este caso $V_I^w(\alpha) = 1$ si y sólo si $(v(t_1), \dots, v(t_n)) \in P_I^n$.*

(ii) *Si $\alpha = \neg\beta$ con $\beta \in Form$, entonces $V_I^w(\alpha) = 1 - V_I^w(\beta)$.*

(iii) *Si $\alpha = (\beta_1 \wedge \beta_2)$ con $\beta_1, \beta_2 \in Form$, entonces $V_I^w(\alpha) = min(V_I^w(\beta_1), V_I^w(\beta_2))$.*

(iv) *Si $\alpha = (\beta_1 \vee \beta_2)$ con $\beta_1, \beta_2 \in Form$, entonces $V_I^w(\alpha) = max(V_I^w(\beta_1), V_I^w(\beta_2))$.*

(v) *Si $\alpha = (\beta_1 \Rightarrow \beta_2)$ con $\beta_1, \beta_2 \in Form$, entonces $V_I^w(\alpha) = max(1 - V_I^w(\beta_1), V_I^w(\beta_2))$.*

(vi) *Si $\alpha = \forall x_k \beta$ con $\beta \in Form$ y $x_k \in Var$, entonces $V_I(\alpha) = 1$ si y sólo si para cualquier $u \in U$, $V_I^{w(x_k/u)}(\beta) = 1$, donde $w(x_k/u)$ es la valuación definida del siguiente modo:*

$$w(x_k/u)(x_i) = \begin{cases} u & si\ i = k \\ w(x_i) & si\ i \neq k \end{cases}$$

(vii) *Si $\alpha = \exists x_k \beta$ con $\beta \in Form$ y $x_k \in Var$, entonces $V_I(\alpha) = 1$ si y sólo si existe $u \in U$ tal que $V_I^{w(x_k/u)}(\beta) = 1$, donde $w(x_k/u)$ es la valuación definida arriba.*

Es interesante observar que la interpretación de los cuantificadores dados en el punto (vi) y (vii) de la definición anterior se pueden reformular usando el siguiente hecho. Sabemos que el conjunto **2** es un álgebra de Boole finita, por lo tanto todo subconjunto de **2** tiene ínfimo y supremo. A partir de esto podemos definir el valor de verdad de $\alpha = \forall x_k \beta$ como

$$(A)\ V_I(\forall x_k \beta) = \bigwedge_{u \in U} V_I^{w(x_k/u)}(\beta)$$

donde $\bigwedge_{u \in U} V_I^{w(x_k/u)}(\beta)$ denota el ínfimo del conjunto de valores $\{V_I^{w(x_k/u)}(\beta) : u \in U\}$. Notar que al ser este conjunto finito, se puede afirmar además que tiene un mínimo dado que el orden en $\{0, 1\}$ es total. Por lo tanto podemos también escribir

$$(B)\ V_I(\forall x_k \beta) = min_{u \in U} V_I^{w(x_k/u)}(\beta)$$

Análogamente, podemos definir

$$(C)\ V_I(\exists x_k \beta) = \bigvee_{u \in U} V_I^{w(x_k/u)}(\beta)$$

o

$$(D)\ V_I(\exists x_k \beta) = max_{u \in U} V_I^{w(x_k/u)}(\beta)$$

donde $\bigvee_{u \in U} V_I^{w(x_k/u)}(\beta)$ denota el supremo del conjunto de valores $\{V_I^{w(x_k/u)}(\beta) : u \in U\}$.

Las fórmulas (A) y (C) permite por otro lado definir la noción de valor de verdad sobre un *álgebra de Boole completa*. Un álgebra de Boole se dice *completa* si todo subconjunto de B tiene ínfimo (o equivalentemente tiene supremo). Un ejemplo de un álgebra de Boole completa es el álgebra de Boole $\mathcal{P}(X)$ de las partes de un conjunto X. En este caso el ínfimo de una familia de subconjuntos de X es simplemente la intersercción de dichos subconjuntos. Si bien este tema no lo trataremos en este curso, es importante observar las diferentes nociones de valores de verdad que se pueden definir usando la teoría de álgebras de Boole.

Por otro lado las fórmulas (A) y (C) permiten interpretar a los cuantificadores $\forall$ y $\exists$ del siguiente modo. El cuantificador $\forall$ se puede interpretar como una *conjunción infinita*, mientras que el cuantificador existencial como una *disjunción infinita*.

La noción inductiva de valor de verdad de una fórmula depende de la interpretación del lenguaje y de la valuación v definida en el conjunto de los términos. Cuando dicha fórmula es un enunciado, entonces dicho valor de verdad depende solamente de la interpretación. Este será el contenido de nuestro próximo resultado.

Proposición 9 *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sea $\alpha \in Form$. Sea $Free(\alpha)$ el conjunto de variables libres de α. Sea I una interpretación con universo U y sean w_1, w_2 dos valuaciones que coinciden en $Free(\alpha)$. Entonces $V_I^{w_1}(\alpha) = V_I^{w_2}(\alpha)$. En particular si α es un enunciado entonces el valor de verdad de α depende solamente de I.*

Demostración. Para la prueba usaremos inducción en la complejidad de α. Si $c(\alpha) = 0$, sabemos que α es una fórmula atómica. Luego existe un número natural n, un símbolo de predicado P^n y n términos $t_1, \ldots, t_n$ tales que $\alpha = P^n(t_1 \ldots t_n)$. En este caso todas las variables que aparecen en α son variables libres. Como w_1 y w_2 coinciden en las variables que aparecen en cada término t_i, con $1 \leq i \leq n$, se sigue del Teorema 7 que $w_1(t_i) = w_2(t_i)$ para todo $1 \leq i \leq n$. Se sigue de la definición de valor de verdad para las fórmulas atómicas que $V_I^{w_1}(\alpha) = 1$ si y sólo si $(w_1(t_1), \ldots, w_1(t_n)) \in P_I^n$ si y sólo si $(w_2(t_1), \ldots, w_2(t_n)) \in P_I^n$ si y sólo si $V_I^{w_2}(\alpha) = 1$. Por lo tanto $V_I^{w_1}(\alpha) = V_I^{w_2}(\alpha)$. Asumamos ahora que α tenga complejidad positiva. Luego tenemos los siguientes casos:

(A) $\alpha = \neg\beta$ con $\beta \in Form$. Como $Free(\alpha) = Free(\beta)$ se sigue de la hipótesis inductiva que $V_I^{w_1}(\beta) = V_I^{w_2}(\beta)$. Luego $V_I^{w_1}(\alpha) = 1 - V_I^{w_1}(\beta) = 1 - V_I^{w_2}(\beta) = V_I^{w_2}(\alpha)$.

(B) $\alpha = (\beta_1 \wedge \beta_2)$ con $\beta_1, \beta_2 \in Form$. Como $Free(\alpha) = Free(\beta_1) \cup Free(\beta_2)$ se sigue de la hipótesis inductiva que $V_I^{w_1}(\beta_1) = V_I^{w_2}(\beta_1)$ y $V_I^{w_1}(\beta_2) = V_I^{w_2}(\beta_2)$.

Por lo tanto $V_I^{w_1}(\alpha) = min(V_I^{w_1}(\beta_1), V_I^{w_1}(\beta_2) = min(V_I^{w_2}(\beta_1), V_I^{w_2}(\beta_2) = V_I^{w_2}(\alpha)$.

Los casos (C) $\alpha = (\beta_1 \vee \beta_2)$ y (D) $\alpha = (\beta_1 \Rightarrow \beta_2)$ se prueban análogamente al caso (B).

(D) $\alpha = \forall x_k \beta$ con x_k una variable y $\beta \in Form$. Luego $V_I^{w_1}(\alpha) = 1$ si y sólo si para cualquier $u \in U$, $V_I^{w_1(x_k/u)}(\beta) = 1$. Por hipótesis inductiva tenemos que $V_I^{w_2(x_k/u)}(\beta) = 1$ para cualquier $u \in U$ lo que equivale a decir que $V_I^{w_2}(\alpha) = 1$. Por lo tanto $V_I^{w_1}(\alpha) = V_I^{w_2}(\alpha)$.

(E) $\alpha = \exists x_k \beta$ con x_k una variable y $\beta \in Form$. La prueba es análoga al caso anterior. $\Box$

La proposición anterior nos dice que el valor de verdad de un enunciado o sentencia solo depende de la interpretación I, luego si α es un enunciado e I es una interpretación escribimos el valor de verdad de dicho enunciado como $V_I(\alpha)$, es decir podemos prescindir de las valuaciones.

A partir de la misma proposición anterior se deduce que si cuantificamos una variable que no aparece en una fórmula su valor de verdad coincide con el de la fórmula, es decir la variable *no afecta su valor de verdad*. Más precisamente, si $\alpha \in Form$ y x_i no es variable de α entonces $V_I^w(\forall x_i \alpha) = V_I^w(\exists x_i \alpha) = V_I^w(\alpha)$ para toda interpretación I y toda valuación w. En particular si α es un enunciado, tenemos que $V_I(\forall x_i \alpha) = V_I(\exists x_i \alpha) = V_I(\alpha)$.

Definición 10 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sea α una fórmula de $\mathcal{L}$. Diremos que α es *satisfactible* si existe una interpretación I y una valuación w tal que $V_I^w(\alpha) = 1$. Si α es un enunciado, α es satisfactible si existe una interpretación I tal que $V_I(\alpha) = 1$. En estos casos diremos que α es válida en la interpretación I bajo la valuación w o simplemente que α es válida en I cuando α es un enunciado o sentencia. Diremos que α es *universalmente válida* si para toda interpretación I y toda valuación w se tiene que $V_I^w(\alpha) = 1$. Si α es un enunciado, α es universalmente válido si $V_I(\alpha) = 1$ para toda interpretación I. Una estructura I que satisface a un enunciado se dice un *modelo* de α, más generalmente si α es una fórmula, un modelo es un par (I, w) tal que $V_I^w(\alpha) = 1$, donde I es una interpretación y w una valuación. Llamaremos *teoría* a un conjunto T de enunciados. Un modelo de una teoría T es una interpretación I que es modelo de cada enunciado de T.

El rol de las fórmulas universalmente válidas es el rol que juegan tal tautologías en la lógica proposicional. Pero en este caso verificar que una fórmula dada o enunciado es universalemnte válido requiere verificar que la fórmula es válida en *todas las interpretaciones*, como el conjunto de dichas interpretaciones es arbitraria y representa un número infinito, no existe una manera directa de verificar en un número finito de pasos si una fórmula dada es universalmente válida. La próxima clase daremos algunos ejemplo de fórmulas universalmente válidas y de ciertas teorías desde el punto de vista de la definición anterior.