Lógica de Primer Orden, Ultima Parte

En esta última parte veremos el denominado Teorema de Completitud de la lógica de primer orden. Este teorema fue demostrado por Godel en 1930 y al igual que en la lógica proposicional tenemos dos versiones, donde una de ellas implica la otra. La versión más debil expresa el siguiente resultado:

Teorema 1 *(Teorema de Completitud) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sea ϕ una fórmula de $\mathcal{L}$. Entonces ϕ es universalmente válida si y sólo si ϕ es demostrable.*

Teorema 2 *(Teorema de Completitud, versión general) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, sea ϕ una fórmula de $\mathcal{L}$ y sea T una teoría de $\mathcal{L}$. Entonces $\Gamma \vdash \phi$ si y sólo si $\phi \in C(\Gamma)$.*

En ambos teoremas se puede asumir sin pérdida de generalidad que ϕ es un enunciado ya que $\Gamma \vdash \phi$ si y sólo si $\Gamma \vdash \forall x_0 \ldots \forall x_n \phi$ donde las variables libres de ϕ están contenidas en $\{x_0, \ldots, x_n\}$. Es claro que esta la versión general implica la primera tomando como conjunto $\Gamma = \emptyset$. En ambas versiones ya vimos como se prueba una de las implicaciones a saber: Si ϕ es demostrable entonces ϕ es universalmente válida, mientras que en la versión general, probamos que si $\Gamma \vdash \phi$ entonces $\phi \in C(\Gamma)$. La implicación $\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \phi \in C(\Gamma)$ expresa el hecho que el *cálculo es correcto*, es decir todo lo que es demostrable es verdadero.

La recíproca, que es la parte difícil del teorema, nos dice que si Γ es una teoría y ϕ un enunciado, tal que toda interpretación que hace verdadera a todos los enunciados de Γ entonces dicha interpretación hace verdadera a ϕ, podemos encontrar una prueba de ϕ a partir de Γ. En otras palabras, esto nos dice que ϕ es un *teorema* de la teoría Γ.

La clase pasada vimos que hay que tener cuidado con las relaciones entre la de consecuencia lógica y la de ser demostrable. Vimos que si Γ es un conjunto de fórmulas (no necesariamente enunciados) no es cierto en general que si $\Gamma \vdash \phi$ entonces $\alpha \in C(\Gamma)$. Podemos emmendar este problema definendo la noción de validez de una fórmula en una interpretación en el siguiente sentido:

Si $\mathcal{L}$ es un lenguaje de primer orden y ϕ es una fórmula, diremos que ϕ es *válida* en una interpretación I si su clausura universal es un enunciado válido en I en el sentido de la Definición 10 visto en la segunda clase de lógia de primer orden. Recordar que la clausura universal de una fórmula es cuantificar todas las variables libres de dicha fórmula. Con esta noción deducimos a partir de lo visto la última clase que si Γ es un conjunto de fórmulas y ϕ es una fórmula tal que $\Gamma \vdash \phi$ entonces si I es una interpretación que hace válida a todas las fórmulas de Γ entonces ϕ es válida en I.

Existen diferentes pruebas del Teorema de Completitud. Para ello se precisan introducir algunas nociones previas.

Definición 3 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Un conjunto de fórmulas Γ de $\mathcal{L}$ se dice *consistente* si no existe ninguna fórmula ϕ de $\mathcal{L}$ tal que $\Gamma \vdash \phi$ y $\Gamma \vdash \neg\phi$. Diremos que Γ es *completo* si para todo enunciado ϕ de $\mathcal{L}$ entonces $\phi \in \Gamma$ o $\neg\phi \in \Gamma$.

El Teorema de completitud de Godel se puede formular de una manera equivalente usando la noción de consistencia. En efecto, si $\mathcal{L}$ es un lenguaje de primer orden, Γ un conjunto de fórmulas y ϕ un enunciado del lenguaje $\mathcal{L}$ entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(A) $\Gamma \vdash \phi$.

(B) $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ no es consistente (es decir es inconsistente).

La prueba de la implicación (A) $\Rightarrow$ (B) es obvia ya que $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \phi$ y $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \neg\phi$. Para probar la implicación (B) $\Rightarrow$ (A) asumamos sea β tal que $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \beta$ y $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \neg\beta$. Por el Teorema de la Deducción se sigue que $\Gamma \vdash (\neg\phi \Rightarrow \beta)$ y $\Gamma \vdash (\neg\phi \Rightarrow \neg\beta)$. Por el axioma (AX3) y usando modus ponens concluímos que $\Gamma \vdash \phi$ lo que es imposible. Por otro lado si una teoría T de un lenguaje de primer orden tiene un modelo, debe ser consistente, ya que si existe una fórmula β tal que $T \vdash \beta$ y $T \vdash \neg\beta$ entonces la interpretación I que satisface a T debe satisfacer a β y a $\neg\beta$, es decir $V_I(\beta) = V_I(\neg\beta) = 1 - V_I(\beta) = 1$ lo que es imposible.

Por lo tanto tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4 *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, sea Γ una teoría y sea ϕ un enunciado de $\mathcal{L}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *El Teorema de Completitud (versión general).*

(ii) *Toda teoría consistente tiene un modelo.*

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Asumamos que Γ es una teoría consistente y asumamos que ninguna interpretación satisface a Γ. Tomemos un enunciado α de $\mathcal{L}$. Luego $\neg(\alpha \Rightarrow \alpha) \in C(\Gamma)$. Por (i) obtenemos que $\Gamma \vdash \neg(\alpha \Rightarrow \alpha)$ y como $\Gamma \vdash (\alpha \Rightarrow \alpha)$ llegamos a que Γ es inconsistente, absurdo. (ii) $\Rightarrow$ (i). Sea Γ una teoría y sea α un enunciado tal que $\alpha \in C(\Gamma)$. Luego $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es insatisfactible, es decir ni existe niguna interpretación que satisface a $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$. Por (ii) se sigue que este conjunto es inconsistente. Por lo probado arriba concluímos que $\Gamma \vdash \alpha$. $\square$.

Por lo tanto probar el teorema de completitud se reduce a probar que toda teoría consistente tiene un modelo o una interpretación que hace verdadera a todos los enunciados de dicha teoría. Daremos una prueba solamente para los lenguajes que son *a lo sumo numerables*. Para el caso de los lenguajes no numerables se precisa usar el axioma de elección.

Asumamos entonces que $\mathcal{L}$ es un lenguaje de primer orden y Γ es un conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$ que constituye una teoría consistente. La prueba se basa escencialmente en 4 etapas:

Paso 1) Expandir el lenguaje $\mathcal{L}$ agregando una cantidad numerable de nuevos símbolos de constante: $C = c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$. Llamemos a este nuevo lenguaje $\mathcal{L}_C$. Afirmamos que Γ sigue siendo una teoría consistente en este nuevo lenguaje. Asumamos que no, luego existiría un enunciado α de $\mathcal{L}_C$ tal que $\Gamma \vdash \neg(\alpha \Rightarrow \alpha)$.

Notar que en esta prueba los nuevos símbolos de constante pueden aparecer en los axiomas (AX1)-(AX5) escritos en $\mathcal{L}_\mathcal{C}$ pero no en las fórmulas de Γ. A continuación sustituímos cada aparición de alguna de estos nuevos símbolos de constante que aparezca en alguna fórmula de la prueba por una variable que no aparezca en la prueba. Esta sustitución genera otra prueba cuyo último eslabón sigue siendo una contradicción pero en el lenguaje $\mathcal{L}$. Como las fórmulas de Γ permanecen invariantes bajo esta sustitución entonces llegaríamos a que Γ es inconsistente, lo que es imposible.

Paso 2) Para toda fórmula ϕ del lenguaje $\mathcal{L}_\mathcal{C}$ que tenga a lo sumo una variable libre x_i agregamos a Γ una fórmula del tipo $(\neg\forall x_i\phi(x_i) \Rightarrow \neg\phi(c_j))$ donde c_j es uno de los nuevos símbolos de constante, elegido adecuadamente como sigue. La construcción es como sigue. Como el lenguaje $\mathcal{L}_\mathcal{C}$ es numerable, enumeramos las fórmulas de $\mathcal{L}_\mathcal{C}$ que tienen a lo sumo una variable libre; $\phi_1(x_{i_1}), \dots, \phi_n(x_{i_n}), \dots$. Definimos inductivamente la siguiente secuencia de fórmulas del tipo mencionado como sigue: $\beta_1 = (\neg\forall x_{i_1}\phi_1(x_{i_1}) \Rightarrow \neg\phi(c_{j_1}))$ donde c_{j_1} es el primer símbolo de constante del conjunto C que no aparece en $\phi_1(x_{i_1})$. Asumamos que ya hemos definido las fórmulas $\beta_1, \dots, \beta_n$. Definimos $\beta_{n+1} = (\neg\forall x_{i_{n+1}}\phi_{n+1}(x_{i_{n+1}}) \Rightarrow \neg\phi_{n+1}(c_{j_{n+1}}))$ donde $c_{j_{n+1}}$ es el primer símbolo de constante del conjunto C que no aparece en $\phi_{n+1}(x_{i_{n+1}})$ ni en $\beta_1, \dots, \beta_n$.

Afirmamos que $\Gamma \cup \{\beta_1, \dots, \beta_n, \dots\}$ es consistente. Para ello basta ver que todo subconjunto finito de $\Gamma \cup \{\beta_1, \dots, \beta_n, \dots\}$ es consistente ya que en toda prueba aparecen un número finito de órmulas. Para ello basta ver que para todo n, $\Gamma \cup \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ es consistente. Sino, elegimos el menor número natural n tal que $\Gamma \cup \{\beta_1, \dots, \beta_n, \beta_{n+1}\}$ es inconsistente. Como en todo conjunto inconsistente se puede demostrar cualquier fórmula tendíamos en particular que $\Gamma \cup \{\beta_1, \dots, \beta_n, \beta_{n+1}\} \vdash \neg\beta_{n+1}$. Se sigue del Teorema de la Deducción que $\Gamma \cup \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \vdash (\beta_{n+1} \Rightarrow \neg\beta_{n+1})$ lo que implica $\Gamma \cup \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \vdash \neg\beta_{n+1}$. Como $\beta_{n+1} = (\neg\forall x_{i_{n+1}}\phi_{n+1}(x_{i_{n+1}}) \Rightarrow \neg\phi(c_{j_{n+1}}))$, entonces $\Gamma \cup \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \vdash \neg\forall x_{i_{n+1}}\phi_{n+1}(x_{i_{n+1}})$ y $\Gamma \cup \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \vdash \phi_{n+1}(c_{j_{n+1}})$. Como $c_{j_{n+1}}$ no aparece en las fórmulas de $\Gamma \cup \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ podemos sustituir este símbolo de constante por una variable x_k que no aparece en la prueba y luego usando generalización llegamos a que $\Gamma \cup \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \vdash \forall x_k\phi_{n+1}(x_k)$ lo que implica $\Gamma \cup \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \vdash \forall x_{i_{n+1}}\phi_{n+1}(x_{i_{n+1}})$ y $\Gamma \cup \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \vdash \neg\forall x_{i_{n+1}}\phi_{n+1}(x_{i_{n+1}})$ lo que es imposible pues $\Gamma \cup \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ es consistente.

Paso 3) Construimos un conjunto Δ de fórmula que sea completo, consistente y que contenga a $\Gamma \cup \{\beta_1, \dots, \beta_n, \dots\}$. Para ello como el lenguaje $\mathcal{L}_C$ es numerable, enumeramos los enunciados de este lenguaje: $\delta_1, \dots, \delta_n, \dots$. Definimos una sucesión de teorías $T_0, \dots, T_n, \dots$ definidas inductivamente como sigue: $T_0 = \Gamma \cup \{\beta_1, \dots, \beta_n, \dots\}$. Asumamos que ya hemos definido $T_0, T_1, \dots, T_n$. Para definir T_{n+1} tomamos el enunciado δ_{n+1}. Si $T_n \nvdash \neg\delta_{n+1}$ definimos $T_{n+1} = T_n \cup \{\delta_{n+1}\}$. Si $T_n \vdash \neg\delta_{n+1}$, definimos $T_{n+1} = T_n$. Es claro que $T_0 \subseteq T_1 \subseteq \dots \subseteq T_n \subseteq \dots$ es una sucesión creciente de teorías. Sea $T = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$. Afirmamos que T es consistente. Para ello basta ver que cada T_n es consistente. Para ello hacemos inducción en n. Si $n = 0$, $T_0 = \Gamma \cup \{\beta_1, \dots, \beta_n, \dots\}$ que ya sambemos que es consistente. Asumamos que T_n es consistente. Si $T_{n+1} = T_n$ entonces T_{n+1} es consistente. Sino entonces $T_n \nvdash \neg\delta_{n+1}$ y $T_{n+1} = T_n \cup \{\delta_{n+1}\}$. Luego si T_{n+1} fuera inconsistente tendríamos que $T_{n+1} \vdash \neg\delta_{n+1}$ lo que implicaría $T_n \vdash (\delta_{n+1} \Rightarrow \neg\delta_{n+1})$ lo que es equivalente a decir que $T_n \vdash \neg\delta_{n+1}$, absurdo. Veamos que para todo enunciado δ_n se tiene que $T \vdash \delta_n$ o bien $T \vdash \neg\delta_n$. Si

$T_{n-1} \vdash \neg\delta_n$, entonces no hay nada que probar. Sino, se sigue de la defininción que $\delta_n \in T_n$ y en particular $T_n \vdash \delta_n$. Lueg T es consistente y para todo enunciado β se sigue que $T \vdash \beta$ o $T \vdash \neg\beta$. Definimos $\Delta = Ded(T)$ como el conjunto de todos los enunciados que son deducibles a partir de T. Es claro que al ser T consistente, Δ también lo es y resulta además ser completo.

Paso 4) En este último paso construiremos un modelo de Γ. Como $\Gamma \subseteq \Delta$, basta construir una interpretación I que satisfaga a todos los enunciados de Δ. Tomemos como universo de dicha interpretación los términos del lenguaje $\mathcal{L}_C$ que no tengan variables, es decir contiene solamente símbolos de constante o símbolos de función. Veamos como interpretar a los símbolos del lenguaje $\mathcal{L}_C$. Si c es un símbolo de constante, entonces $c_I = c$. Si f^n es un símbolo de función n-ario y $t_1, \ldots, t_n$ son términos sin variables de $\mathcal{L}_C$ entonces $f^n_I(t_1, \ldots, t_n) = f^n(t_1 \ldots t_n)$. Finalmente si P^n es un símbolo de predicados n-ario y $t_1, \ldots, t_n$ son términos sin variables de $\mathcal{L}_C$, entonces $P^n_I = \{(t_1, \ldots, t_n) \in U^n : P^n(t_1 \ldots t_n) \in \Delta\}$. Es decir el predicado P^n es verdadero en la n-upla $(t_1, \ldots, t_n)$ si y sólo si el enunciado $P^n(t_1 \ldots t_n) \in \Delta$. Sea ϕ un enunciado de $\mathcal{L}_C$. Afirmamos que $V_I(\phi) = 1$ si y sólo si $\phi \in \Delta$. Para ello haremos inducción en la complejidad $c(\phi)$. Si $c(\phi) = 0$, entonces ϕ es una fórmula atómica. Como ϕ es un enunciado se sigue para algún $n \in \mathbb{N}$ existe un símbolo de predicado n-ario P^n y n términos sin variables $t_1, \ldots, t_n$ tal que $\phi = P^n(t_1 \ldots t_n)$. Se sigue de la manera de interpretar a los enunciados atómicos que $V_I(\phi) = 1$ si y sólo si $\phi \in \Delta$. Si $c(\phi) > 0$ entonces se tienen los siguientes casos:

1) $\phi = \neg\beta$ con β un enunciado. Si $V_I(\phi) = 1$ entonces $V_I(\beta) = 0$. Por hipótesos inductiva se tiene que $\beta \notin \Delta$. Como Δ es completo inferimos que $\neg\beta = \phi \in \Delta$. Si $V_I(\phi) = 0$ entonces $V_I(\beta) = 1$ lo que implica nuevamente de la hipótesis inductiva que $\beta \in \Delta$. Como Δ es consistente inferimos que $\neg\beta = \phi \notin \Delta$.

2) $\phi = (\beta_1 \Rightarrow \beta_2)$, con β_1, β_2 enunciados. Notemos que Δ es cerrado por la regla de inferencia Modus Ponens ya que si $\alpha \in \Delta$ y $(\alpha \Rightarrow \beta) \in \Delta$ entonces $\beta \in \Delta$ ya que caso contrario $\neg\beta \in \Delta$. Como $\{\alpha, (\alpha \Rightarrow \beta)\} \vdash \beta$ entonces $\Delta \vdash \beta$ lo que implicaría que tanto β como $\neg\beta$ son demostrables a partir de Δ lo que es imposible pues Δ es consistente. Análogamente se prueba que Δ contiene a los enunciados que son tautologías de la lógica proposicional. Si $V_I(\phi) = 1$ y $V_I(\beta_1) = 0$ entonces por hiótesis inductiva se sigue que $\beta_1 \notin \Delta$ lo que implica $\neg\beta_1 \in \Delta$. Como $(\neg\beta_1 \Rightarrow (\beta_1 \Rightarrow \beta_2))$ es una tautología se sigue que pertenece a Δ y luego $\phi \in \Delta$. Si $V_I(\beta_1) = 1$ entonces $\beta_1 \in \Delta$. Por lo tanto $V_I(\beta_2) = 1$ lo que implica que $\beta_2 \in \Delta$. Como $(\beta_2 \Rightarrow (\beta_1 \Rightarrow \beta_2)$ es un axioma debe pertenecer a Δ y luego $\phi \in \Delta$. Si $V_I(\phi) = 0$ entonces $V_I(\beta_1) = 1$ y $V_I(\beta_2) = 0$. Por lo tanto $\beta_1 \in \Delta$ y $\beta_2 \notin \Delta$ lo que implica $\neg\beta_2 \in \Delta$. Como $\{\beta_1, \neg\beta_2\} \vdash \neg\phi$ inferimos que $\neg\phi \in \Delta$ lo que implica $\phi \notin \Delta$.

3) $\phi = \forall x_k \beta$ con x_k una variable y β una fórmula. Si x_k no es libre en β entonces β es equivalente semánticamente a ϕ. Usando el hecho que es cerrado por la regla de Generalización inferimos de la hipótesis inductiva que $V_I(\phi) = 1$ si y sólo si $\phi \in \Delta$. Asumamos ahora que x_k sea libre en β. Si $V_I(\phi) = 1$ y $\phi \notin \Delta$ entonces $\neg\phi = \neg\forall x_k \beta \in \Delta$. Como ϕ es un enunciado entonces la única variable libre de ϕ es x_k. Se sigue que existe $\beta \in \{\beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots\}$. Luego existe una constante $c_k \in C$ tal que $(\neg\forall x_k \beta(x_k) \Rightarrow \neg\beta(c_k)) \in \Delta$. Luego $\neg\beta(c_k) \in \Delta$. Como $V_I(\forall x_k \beta(x_k)) = 1$ se sigue que $V_I(\beta(c_k) = 1$ lo que sigue de la hipótesis

inductiva que $\beta(c_k) \in \Delta$, absurdo. Si $V_I(\phi) = 0$ entonces existe un término t si variables tal que $V_I(\beta(t)) = 0$. Luego $\beta(t) \notin \Delta$ lo que implica $\neg\beta(t) \in \Delta$. Por otro lado Δ contiene al axioma (AX4) $(\forall x_k \beta(x_k) \Rightarrow \beta(t))$. Luego si el antecedente estuviera en Δ tendríamos que $\beta(t) \in \Delta$ lo que es imposible. Por lo tanto el antecedente, que es ϕ no pertenece a Δ. $\square$

Como consecuencia del Teorema de Completitud tenemos la versión en primer orden del Teorema de Compacidad:

Teorema 5 *(Teorema de Compacidad) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sea T una teoría. Si todo subconjunto finito de T es satisfactible, entonces T es satisfactible.*

Demostración. Asumamos que no. Luego se sigue del Teorema de Completitud que T no es consistente. Por lo tanto si tomamos un enunciado del tipo $\neg(\alpha \Rightarrow \alpha)$ obtenemos $T \vdash \neg(\alpha \Rightarrow \alpha)$. Por lo tanto existen $\beta_1, \ldots, \beta_n \in T$ tales que $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \vdash \neg(\alpha \Rightarrow \alpha)$. Como este conjunto finito de enunciados es satisfactible existiriía una interpretación I que astisface a dicho conjunto, en particular $V_I(\neg(\alpha \Rightarrow \alpha)) = 1$ lo que es imposible. $\square$

El Teorema de Compacidad tiene diversas aplicaciones. Veamos por ejemplo que si $\mathcal{L}$ es un lenguaje con igualdad entonces no existe un enunicado de $\mathcal{L}$ que exprese que un conjunto es finito. Es decir no existe un enunicado ϕ tal que para toda interpretación I, $V_I(\phi) = 1$ si y sólo si el universo de dicha interpretación sea finito. Asumamos que si. Para cada n sea α_n un enunciado que exprese que un conjunto tiene por lo menos n elementos. Sea $T = \{\phi, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots\}$. Es claro que todo subconjunto finito de T tiene un modelo. Luego se sigue del Teorema de Compacidad que T tiene un modelo. Como dicho modelo debe satisfacer a ϕ entonces debe ser finito, pero como debe satisfacer α_n para todo n debe tener al menos n elementos para todo n lo que es imposible.