Lógica de Primer Orden, Tercera Parte

En esta tercera parte ilustraremos mediante diversos ejemplos los conceptos desarrollados en la última clase en relación a la semántica de los lenguajes de primer orden.

Si $\mathcal{L}$ es un lenguaje de primer orden y α es una fórmula de $\mathcal{L}$, recordemos que α es una fórmula universalmente válida si y sólo si para toda interpretación I con universo U y toda valuación $w : Term \to U$ se tiene que $V_I^w(\alpha) = 1$. Observemos primero que si $n \in \mathbb{N}$ es tal que el conjunto de variables libres de $\alpha \subseteq \{x_0, \ldots, x_n\}$ entonces α es universalmente válida si y sólo si $\forall x_0 \ldots \forall x_n \alpha$ es universalmente válida. Esta fórmula se denomina la *clausura universal* de α,

Ejemplos 1 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado binario P^2. Entonces las siguientes fórmulas son universalmente válidas

(i) $\alpha = (P^2(x_1x_2) \vee \neg P^2(x_1x_2))$

(ii) $\alpha = (\forall x_1 \forall x_2 \beta \Rightarrow \forall x_2 \forall x_1 \beta)$, *con* $\beta \in Form$.

(iii) $(\forall x_1 P^2(x_2x_1) \Rightarrow P^2(x_2x_3))$

En los tres casos tomamos una interpretación I con universo U y una valuación $w : Term \to U$.

(i) $V_I^w((P^2(x_1x_2) \vee \neg P^2(x_1x_2)) = max(V_I^w(P(x_1x_2)), 1 - V_I^w(P(x_1x_2)) = 1$. Notar que en este ejemplo α es del tipo una tautología de la lógica proposicional.

(ii) Para probar este ítem probemos primero que si w es una valuación y $u, v \in U$ entonces $w(x_1/u)(x_2/v) = w(x_2/v)(x_1/u)$. Para ello basta ver que para toda variable x_k se tiene que $w(x_1/u)(x_2/v)(x_k) = w(x_2/v)(x_1/u)(x_k)$. Si $k \neq 1$ y $k \neq 2$ se sigue que de la definición de las valuaciones $w(x_i/u)$ con $x_i \in Var$ y $u \in U$ que $w(x_1/u)(x_2/v)(x_k) = w(x_k) = w(x_2/v)(x_1/u)(x_k)$. Luego en este caso coinciden. Si $k = 1$ entonces $w(x_1/u)(x_2/v)(x_1) = w(x_1/u)(x_1) = u$ mientras que $w(x_2/v)(x_1/u)(x_1) = u$. Por lo tanto coinciden en este caso. Si $k = 2$ la prueba es análoga, lo que prueba que las valuaciones $w(x_1/u)(x_2/v)$ y $w(x_2/v)(x_1/u)$ coinciden. Veamos como a partir de este resultado se prueba que α es universalmente válida. Si $V_I^w(\forall x_1 \forall x_2 \beta) = 0$ no hay nada que probar ya que el antecedente de la implicación $(\forall x_1 \forall x_2 \beta \Rightarrow \forall x_2 \forall x_1 \beta)$ es falso. Asumamos que $V_I^w(\forall x_1 \forall x_2 \beta) = 1$. Luego para cualquier $u \in U$ se tiene que $V_I^{w(x_1/u)}(\forall x_2 \beta) = 1$. Se sigue que para cualquier $v \in U$ $V_I^{w(x_1/u)(x_2/v)}(\beta) = 1$. Por lo probado recién inferimos que para cualquier $u, v \in U$ se tiene que $V_I^{w(x_2/v)(x_1/u)}(\beta) = 1$ lo que implica que $V_I^{w(x_2/v)}(\forall x_1 \beta) = 1$ y por ende como el v es arbitrario concluímos que $V_I^w(\forall x_2 \forall x_1 \beta)) = 1$. Por lo tanto $V_I^w((\forall x_1 \forall x_2 \beta \Rightarrow \forall x_2 \forall x_1 \beta)) = 1$ probando de este modo que α es universalmente válida.

(iii) Al igual que en el caso (ii) si $V_I^w(\forall x_1 P^2(x_2x_1)) = 0$ no hay nada que probar. Asumamos que $V_I^w(\forall x_1 P^2(x_2x_1)) = 1$. Debemos probar que $V_I^w(P^2(x_2x_3)) = 1$. Esto equivale a probar que $(w(x_2), w(x_3)) \in P_I^2$. Por hipótesis tenemos que $V_I^{w(x_1/u)}(P^2(x_2x_1)) = 1$ para cualquier $u \in U$. Si tomamos $u = w(x_3)$ llegamos a que el par ordenado $(w(x_1/u)(x_2), (w(x_1/u)(x_1)) = (w(x_2), u) = (w(x_2), w(x_3)) \in P_I^2$ que es lo queríamos probar.

Estos ejemplos muestran que la situación es mucho más compleja que en la lógica proposicional ya que el rol de los cuantificadores hace que tengamos que hacer un análisis en base como aparecen las variables afectadas a los mismos.

Analicemos más de cerca el ejemplo (iii). En dicho ejemplo la fórmula $P^2(x_2x_1)$ tiene dos variables libres que son x_1 y x_2 y la fórmula $\forall x_1 P^2(x_2x_1)$ tiene a x_2 como única variable libre. La implicación $(\forall x_1 P^2(x_2x_1) \Rightarrow P^2(x_2x_3))$ expresa desde el punto de vista semántico que si el predicado $P^2(a, b)$ es verdadero para cualquier b (donde a es un elemento fijo del universo) entonces podemos *reemplazar* la segunda coordenada por un elemento fijo c cualquiera y P^2 es verdadero en el par (a, c). Sin embargo hay que tener cuidado con las substituciones en las fórmulas. Una generalización natural del ejemplo (iii) es el siguiente:

Primero adoptemos la siguiente notación. Si ϕ es una fórmula y $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ son variables libres de ϕ escribimos $\phi = \phi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$. Asumamos por ejemplo que x_1 es variable libre de ϕ y consideremos la fórmula

$$\alpha = (\forall x_1 \phi(x_1) \Rightarrow \phi(t))$$

donde t es un término y $\phi(t)$ denota la fórmula que resulta de sustituir x_1 por t en ϕ. Es α universalmente válida?. En el ejemplo (iii) $\phi(x_1) = P^2(x_2x_1)$ y $t = x_3$.

En general esto es falso como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y sea $\phi(x_1) = \exists x_2 \neg x_2 = x_1$. Entonces $\alpha = (\forall x_1 \phi(x_1) \Rightarrow \phi(x_2))$ no es universalmente válida.

Para probarlo basta encontrar una interpretación I y una valuación w tal que $V_I^w(\alpha) = 0$. Para ello tomamos la siguiente interpretación: como universo tomamos cualquier conjunto U con más de 1 elemento. El antecedente de la implicación es verdadero ya que es la fórmula $\forall x_1 \exists x_2 \neg x_2 = x_1$ expresa que para cualquier elemento u de U existe un elemento v de U diferente de u. Como U tiene al menos dos elementos esta afirmación es verdadera. Sin embargo el consecuente es la fórmula $\exists x_2 \neg x_2 = x_2$ es falso ya que expresa que existe un elemento diferente de el mismo. Por lo tanto el hacer ciertas substituciones pueden afectar el valor de verdad de una fórmula. Una interesante analogía ocurre en análisis matemático cuande se realizan substituciones en las variables de integración. Por ejemplo si $F(x, y)$ es una función de dos variables y queremos evaluar la integral: $\int_0^1 F(x, y)dx$, esta integral depende del parámetro y. Si reemplazamos esta variable por la letra z nos queda la integral $\int_0^1 F(x, z)dx$ que depende del parámetro z, en estos dos caso no importa cuál letra se escriba. Sin embargo si reemplazamos y por x nos queda $\int_0^1 F(x, x)dx$ y esta integral devuelve un número real por ende no depende de *ningún parámetro*. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 3 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sea ϕ una fórmula. Si x_i es una variable libre de ϕ y t es un término de $\mathcal{L}$, diremos que *t es libre para x_i en ϕ* si ninguna aparición libre de x_i en ϕ está al alcance de un cuantificador del tipo $\forall x_k$ o $\exists x_k$ donde x_k es una variable de t, más precisamente tenemos la siguiente definición inductiva:

(i) *Si ϕ es una fórmula atómica, entonces t es libre para x_i en ϕ.*

(ii) *Si $\phi = \neg\beta$, entonces t es libre para x_i en ϕ si y sólo si t es libre para x_i en β.*

(iii) *Si $\phi = (\beta_1 \circ \beta_2)$ y $\circ$ es un conectivo binario de la lógica proposicional, entonces t es libre para x_i en ϕ si y sólo si t es libre para x_i en β_1 y en β_2.*

(iv) *Si $\phi = \forall x_k\beta$ o $\phi = \exists x_k\beta$ con x_k una variable y $\beta \in Form$, entonces t es libre para x_i en ϕ si y sólo si x_k no es variable de t y t es libre para x_i en β, en particular cuando $x_i = x_k$ se tiene que t es libre para x_k ya que x_k no es libre en ϕ.*

La terminología *ser libre para* significa que *ser libre para ser sustituído.* Por ejemplo si $\phi = \exists x_2 P^2(x_1 x_2)$ y $t = x_2$ entonces t no es libre para x_1 en ϕ, pero en cambio t es libre para x_2 en ϕ. La noción de que un término sea libre para una variable en una fórmula permite hacer sustituciones en las fórmulas de modo tal que el efecto de dicha sustitución es que justamente no se altere la validez de la fórmula desde el punto de vista de la semántica. Más precisamente podemos definir la sustitución de una variable x_i por un término t en una fórmula ϕ, notado por $\phi(x_i/t)$, del siguiente modo haciendo inducción en $c(\phi)$, asumiendo que x_i es variable de ϕ.

Si $c(\phi) = 0$ entonces ϕ es una fórmula atómica del tipo $\phi = P^n(t_1 \dots t_n)$. En este caso definimos $\phi(x_i/t) = P^n(t_1(x_i/t) \dots t_n(x_i/t)$, donde $t_j(x_i/t)$ es el término que se obtiene sustituyendo x_i por t en el término t_j. Dejamos como ejercicio dar la definición inductiva de sustituir en un término t una variable x_i por un término s , definiendo como convención que si x_i no es variable de t, entonces $t(x_i/s) = t$, es decir la sustitución no produce ningún efecto.

Si $\phi = \neg\beta$ entonces $\phi(x_i/t) = \neg\beta(x_i/t)$. Si $\phi = (\beta_1 \circ \beta_2)$ y $\circ$ es un conectivo binario de la lógica proposicional, entonces $\phi(x_i/t) = (\beta_1(x_i/t) \circ \beta_2(x_i/t))$. Finalmente, si $\phi = \forall x_k\beta$ o $\phi = \exists x_k\beta$, entonces $\phi(x_i/t) = \phi$ si $x_i = x_k$ y $\phi(x_i/t) = \forall x_k\beta(x_i/t)$ si $x_i \neq x_k$ en el primer caso y $\phi(x_i/t) = \exists x_k\beta(x_i/t)$ si $x_i \neq x_k$ en el segundo caso.

Notar que de la definición de sustitución se sigue que si x_i es una variable ligada en una fórmula ϕ entonces $\phi(x_i/t) = \phi$.

Proposición 4 *Sea ϕ una fórmula de un lenguaje de primer orden y sea ϕ una fórmula de dicho lenguaje. Entonces si t es libre para x_i en ϕ se tiene que $\alpha = (\forall x_i\phi(x_i) \Rightarrow \phi(x_i/t))$ es universalmente válida.*

Demostración. (Ejercicio: hacer inducción en $c(\phi)$.)

Cuando veamos la teoría de la prueba de la lógica de primer orden veremos que para demostrar que una fórmula es universalemnte válida basta ver que es *demostrable* a partir de un conjunto de axiomas prefijados y dos reglas de inferencia, método que ya hemos visto en la lógica proposicional y que desarrollaremos la próxima clase.

Para ver que una fórmula no es universalmente válida basta encontrar una interpretación I y una valuación que no la satisfaga, en el caso que dicha fórmula no sea un enunciado basta encontrar una interpretación que no la satisfaga. Por ejemplo consideremos el siguiente enunciado de un lenguaje con un símbolo de predicado binario P^2:

(A) $\alpha = (\forall x_1 \exists x_2 P^2(x_1 x_2) \Rightarrow \exists x_2 \forall x_1 P^2(x_1 x_2))$.

Veamos que el enunciado (A) no es universalmente válido. Consideremos la siguiente interpretación: $(\mathbb{N}, <)$, es decir el símnolo de predicado se interpreta como la relación de orden estricto $<$. El antecedente de la implicación es un enunciado verdadero bajo esta interpretación ya que expresa la propiedad que para todo número natural n existe un número natural m tal que $n < m$. Por otro lado el concecuente de dicha implicación pues expresa el hecho que existe un número natural n tal que para todo m $m < n$, hecho que es falso ya que $n + 1 \not< n$.

Notar que si consideramos el recíproco del enunciado anterior, es decir el siguiente enunciado:

(B) $\beta = (\exists x_2 \forall x_1 P^2(x_1 x_2) \Rightarrow \forall x_1 \exists x_2 P^2(x_1 x_2))$.

Entonces es universalmente válido. Para ello sea I una interpretación con universo U y sea w una valuación. Si $V_I(\exists x_2 \forall x_1 P^2(x_1 x_2)) = 0$ no hay nada que probar. Asumamos que $V_I(\exists x_2 \forall x_1 P^2(x_1 x_2)) = 1$. Luego existe $u \in U$ tal que $V_I^{w(x_2/u)}(\forall x_1 P^2(x_1 x_2)) = 1$ lo que implica que para cualquier $v \in U$ tenemos que $V_I^{w(x_2/u)(x_1/v)} P^2(x_1 x_2) = 1$ lo que equivale a decir que existe $u \in U$ tal que para cualquier $v \in U$ se tiene que el par $(v, u) \in P_I^2(v, u)$. Esto implica que para cualquier $v \in U$ existe $u \in U$ tal que $(v, u) \in P_I^2(v, u)$ lo que equivale a decir que $V_I(\forall x_1 \exists x_2 P^2(x_1 x_2)) = 1$.

Un hecho importante en los lenguajes de primer orden es determinar cuales son las interpretaciones que satisfacen a una teoría. Este problema en la lógica proposicional es el siguiente: dado un conjunto satisfactible de fórmulas, determinar el conjunto de las valuaciones que la satisfacen. Recordar que una teoría es un conjunto de encunciados.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplos 5 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad. Sean T las siguientes teorías*:*

(A) $T = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, donde $\alpha_1 = \exists x_1 \exists x_2 \neg x_1 = x_2$, y $\alpha_2 = \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3((x_1 = x_2 \vee (x_2 = x_3 \vee x_1 = x_3))$. El primer enunicado expresa el hecho que el universo de una interpretación tenga al menos dos elementos, mientras que el segundo enunciado expresa el hecho que el universo de la interpretación tenga a lo sumo dos elementos. Por lo tanto una interpretación es modelo de T si y sólo si el universo de la misma tiene exactamente dos elementos. Por lo tanto en este caso todos los modelos tiene algo en común y es que todos sus universos tienen tres elementos.

(B) Como generalización de (A) sea n un número natural y sea $T = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ donde α_1 es un enunciado que expresa que el universo de una interpretación tiene por lo menos n elementos y α_2 expresa que el universo de una interpretación tiene a lo sumo n elementos. Dejamos como ejercicio escribir α_1 y α_2. Por ende los modelos de T son los conjuntos que tienen exactamente n elementos.

(C) Dar un ejemplo de una teoría T tal que los modelos de T son las interpretaciones cuyo universo es infinito. Para escribir los enunciados de T, fijamos $n \in \mathbb{N}$ y sea α_n el primer enunciado del ejemplo (B). Luego definimos $T = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots\}$. Notar que esta teoría tiene un número infinito de enunciados.. Se sigue que si I es una interpetación con universo U entonces I es modelo de T si y sólo si $V_I(\alpha_n) = 1$ para todo n, lo que equivale a decir que U tiene al menos n elementos para todo n, si y sólo si U es infinito. Por lo tanto esto prueba que la *teoría* de los conjuntos infinitos se puede axiomatizar en primer orden.

(D) Problema: Es posible definir una teoría en $\mathcal{L}$ tal que los modelos de dicha teoría sean exactamente los conjuntos finitos?.

Otros ejemplos de teorías que hemos visto en la primer clase de la lógica de primer orden es las teoría de las relaciones de equivalencias. En este caso precisamos de un lenguaje con un símbolo de predicados binario P^2. Dichas teoría se puede expresar por el siguiente conjunto T de enunciados:

$T = \{\forall x_1 P^2(x_1 x_1), \forall x_1 \forall x_2 (P^2(x_1 x_2) \Rightarrow P^2(x_2 x_1)), \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (P^2(x_1 x_2) \wedge P^2(x_2 x_3) \Rightarrow P^2(x_1 x_3))$.

Notar que en este ejemplo los modelos de T son exactamente los conjuntos dotados de una relación de equivalencia.