Lógica de Primer Orden, Primera Parte

El objetivo de esta clase es introducir la denominada *Lógica de Primer Orden*. Al igual que en la lógica proposicional, estudiaremos en primer lugar la sintaxis, estudiando la estructura del tipo de lenguaje involucrado a esta lógica. Posteriormente estudiaremos la semántica y finalmente la Teoría de la Prueba. Antes de comenzar a desarrollar la teoría mostraremos mediante algunos ejemplos que ilustran la necesidad del estudio de la lógica de primer orden. Comencemos con la cuestión de *expresividad*. En matemática aparecen diversas teorías que se definen a partir de un conjunto de enunciados llamados *axiomas*. Para escribir correctamente estos axiomas, la lógica proposicional es insuficiente y en general tiene poco *poder expresivo*. Lo mismo ocurre cuando uno quiere definir un concepto o noción en un lenguaje determinado. Por otro lado existen ciertas reglas de inferencia que para expresarlas se precisa de un lenguaje más rico que el de la lógica proposicional y otro tanto ocurre cuando uno quiere formalizar la noción de prueba asociado a una teoría. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos 1 1) *Teoría de las relaciones de equivalencia.* Recordemos que una relación de equivalencia definida en un conjunto X es una relación *binaria* que es reflexiva, simétrica y transitiva. Para definir correctamente esta noción se precisa tener un lenguaje que involucre a un símbolo R que represente la relación, el uso de los conectivos de la lógica proposicional y *el cuantificador* $\forall$. Antes de ver como se escriben los axiomas, es importante destacar como escribir formalmente que un par ordenado pertenezca a la relación R. Como R es una relación binaria, entonces del punto de vista de la teoría de conjuntos tenemos que $R \subseteq X \times X$. Por lo tanto para expresar que un par ordenado (x, y) pertenezca a la relación R debemos escibir $(x, y) \in R$. Precisamos en este sentido tener en lenguaje el símbolo de pertenencia $\in$. Sin embargo podemos precindir del símbolo de pertenencia y en su lugar podemos escribir directamente xRy. Otra opción, que es la que adpotaremos aquí es directamente escribir $R(x, y)$. La ventaja de cualquiera de estas dos opciones es que *no precisamos del conjunto* X para expresar que R es una relación de equivalencia. En efecto, los axiomas que definen que R es de equivalencia están dados por las siguientes tres *fórmulas*.

(EQ1) $\forall x R(x, x)$. *[Reflexividad]*

(EQ2) $\forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow R(y, x))$. *[Simetría]*

(EQ3) $\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z))$. *[Transitividad]*

Notar que para escribir los axiomas (EQ1), (EQ2) y (EQ3) no es preciso hacer mención del conjunto X y tampoco es presico escribir el símbolo $\in$ para expresar *en qué universo están las variables*. Por otro lado es claro que para expresar estos axiomas es fundamental el uso del *cuantificador* $\forall$. Usando estos axiomas podemos decir que una relación de equivalencia definida en un conjunto X es un par ordenado (X, R) donde X es un conjunto, R es una relación binaria definida en X que satiface los axiomas (EQ1),(EQ2) y (EQ3). bajo esta definición es claro que cualquier estructura (X, R) que satisfaga estos axiomas las variables deben pertenecer al universo X.

3) *Grupos abelianos.* Un grupo abeliano o conmutativo es un conjunto G dotado de una operación binaria $*$ que es conmutativa, asociativa, admite un elemento neutro e y tal que todo elemento tiene un inverso respecto a la operación $*$, es decir si $x \in G$ existe $y \in G$ tal que $x * y = e$. Estas estructuras algebraicas son de gran importancia en álgebra y tienen diferentes aplicaciones en otras áreas de la matemática. Al igual que en el ejemplo anterior, estas estructuras se pueden axiomatizar proponiendo como lenguaje un símbolo binario f cuya interpretación representa una *operación binaria*, un *símbolo de constante* c y el símbolo de igualdad $=$. En el caso anterior f representa la operación $*$ y c representa el elemento neutro. Los axiomas correspondiente a la teoría de grupos abelianos es como sigue*:*

(G1) $\forall x \forall y \forall z f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$. *[Asociatividad]*

(G2) $\forall x \forall y f(x, y) = f(y, x)$. *[Conmutatividad]*

(G3) $\forall x f(x, c) = x$. *[Elemento neutro]*

(G4) $\forall x \exists y f(x, y) = c$. *[Existencia del inverso]*

Por ende definimos un grupo abeliano como una estructura $(G, *, e)$ que satisface los axiomas (G1) a (G4), donde f se intrepreta como $*$ y c se intepreta como e. Notar que en lugar de escribir $x * y$ podemos también escribir $*(x, y)$. Ejemplos de grupos abelianos son $(\mathbb{R}, +, 0)$, $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot, 1)$, donde $\mathbb{R}$ denota el conjunto de los números reales y $\mathbb{C}$ denota el conjunto de los números complejos.

Otra limitación de la lógica proposicional es que no se pueden expresar ciertas reglas de inferencia, donde es necesario ampliar la lógica para generar dichas reglas. Un ejemplo de una regla de inferencia de este tipo es como sigue.

1) Todo número positivo admite raíz cuadrada.
2) 5 es un número positivo.
3) 5 admite raíz cuadrada.

En este ejemplo tenemos que 3) se infiere de 1) y 2). Observar que en la lógica proposicional no podemos expresar esta regla ya que nuevamente precisamos el uso del cuantificador universal $\forall$. La regla de arriba se puede poner en forma abstracta donde P y H son *predicados* de una variable y c representa una constante:

1) $\forall x(P(x) \Rightarrow H(x))$.
2) $P(c)$.
3) $H(c)$.

Lenguajes de primer orden

Nuestro próximo paso será definir la noción de lenguaje de primer orden. A diferencia de la lógica proposicional, donde el alfabeto es único, en la lógica de primer orden no existe un único alfabeto. Como veremos un alfabeto consiste de dos partes. Un conjunto de símbolos que serán comunes a todos los lenguajes y otro conjunto de símbolos que dependen del lenguaje propiamente dicho.

El conjunto de símbolos que comparten todos los lenguajes de primer orden es el siguiente:

(A) Un conjunto infinito numerable de símbolos: $x_0, \ldots, x_n, \ldots$ denominadas *variables*.

(B) Un conjunto denominado conectivos. Los conectivos serán los cuatro conectivos de la lógica proposicional y dos conectivos nuevos llamados *cuantificadores*: $\forall, \exists$. El símbolo $\forall$ se denomina *cuantificador universal*, mientras que el símbolo $\exists$ se denomina *cuantificador existencial*.

(C) Dos paréntesis: $(,)$.

En la lógica proposicional las variables se llamaban variables proposicionales, en cambio en la lógica de primer orden se llaman simplemente variables. La razón de ello es que cuando veamos la semántica correspondiente, dichas variables van a representar elementos de un cierto conjunto. En el ejemplo que vimos al comienzo de la teoría de las relaciones de equivalencia, el rol de las variables son los símbolos x, y y z. Notaremos con Var al conjunto de las variables.

El otro conjunto de símbolos del alfabeto consiste de los siguientes símbolos:

(D) Un conjunto no vacío $\mathcal{P}$ de símbolos denominados *símbolos de predicado*. Más precisamente, para cada número natural $n \geq 1$, notaremos con $\mathcal{P}_n$ al conjunto de símbolos cuyos elementos se denominan *símbolos de predicado n- arios*. A partir de estos conjuntos definimos $\mathcal{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$. Notar que al pedir que $\mathcal{P}$ sea no vacío se tiene que $\mathcal{P}_n$ debe ser no vacío para algún $n \geq 1$.

(E) Un conjunto (eventualmente vacío) $\mathcal{F}$ de símbolos denominados *símbolos de función*. Más precisamente, para cada número natural $n \geq 1$, notaremos con $\mathcal{F}_n$ al conjunto de símbolos cuyos elementos se denominan *símbolos de función n- arios*. A partir de estos conjuntos definimos $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$.

(F) Un conjunto (eventualmente vacío) $\mathcal{C}$ se símbolos, denominados símbolos de constante.

Una notación que adoptaremos para los símbolos de predicado n-arios es colocar la letra P con un supraíndice n, y en el caso que haya varios símbolos de predicado con la misma ariedad, se pondrán subíndices, por ejemplo si el alfabeto posee dos símbolos de predicado n-ario, podemos escribir P_0^n y P_1^n para denotar dichos símbolos. La misma metodología adoptaremos para los símbolos de función.

Esto nos dice que hay infinitos alfabetos posibles que uno puede construir. Para definir un lenguaje de primer orden debemos por lo tanto prefijar un alfabeto que corresponde a los puntos (D),(E) y (F), ya que los símbolos que se corresponden con los puntos (A),(B) y (C) deben aparecer *siempre*.

Para definir a continuación los elementos de un lenguaje de primer orden propiamente dicho debemos definir dos nociones a saber: la noción de *término* y la noción de *fórmula*.

Definición 2 Sea $\mathcal{A}$ un alfabeto del tipo descripto anteriormente. Una expresión sobre $\mathcal{A}$ se denomina un *término* si se obtiene por medio de un número finito de pasos a partir de las siguientes reglas:

(i) *Las Variables son términos.*

(ii) *Los símbolos de constante son términos.*

(iii) *Si f^n es un símbolo de función n-ario y $t_1, \ldots, t_n$ son términos, entonces $f^n(t_1 \ldots t_n)$ es un término.*

Notar que para dar una definición precisa de la noción de término y determinar qué significa la palabra *en un número finito de pasos* podemos recurrir en forma análoga a lo que hicimos en la lógica proposicional, introduciendo la noción de *cadena de formación* en el contexto de los términos. En efecto podemos definir una cadena de formación de términos como una secuencia finita $t_1 \ldots t_n$ que verifica las siguientes condiciones: para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, t_i es una variable o bien un símbolo de constante o bien existen $j_1, j_2, \ldots, j_n < i$ y un símbolo de función n-ario f^n tal que $t_i = f^n(t_{j_1} \ldots t_{j_n})$.

Notaremos con $Term$ al conjunto de todos los téminos.

Ejemplos 3 1) Consideremos un alfabeto en el que no haya símbolos de función ni de constante, es decir $\mathcal{F} = \emptyset$ y $\mathcal{C} = \emptyset$. En este caso $Term = Var$.

2) Sea $\mathcal{A}$ un alfabeto que contiene un único símbolo de función unario f^1 y no posee símbolos de constante. En este caso los términos de este alfabeto son variables o bien del tipo siguiente $f^1(x_i), f^1(f^1(x_i)), \ldots, f^1(\ldots(f^1(x_i)\ldots)$ donde $x_i \in Var$. Es decir aplicar iteradamente el símbolo f^1

Para terminar definir la noción de lenguaje de primer orden precisamos definir la noción de fórmula.

Definición 4 Sea $\mathcal{A}$ un alfabeto del tipo descripto anteriormente. Una fórmula *atómica* es una expresión del tipo $P^n(t_1 \ldots t_n)$ donde $t_1, \ldots, t_n$ son términos y P^n es un símbolo de predicados n-ario. Una *cadena de formación* de fórmulas es una secuencia finita $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ de expresiones sobre $\mathcal{A}$ que verifica las siguientes condiciones: si $1 \leq i \leq n$ entonces α_i es una fórmula atómica o bien existe $j < i$ tal que $\alpha_i = \neg\alpha_j$, o bien existen índices $j, k < i$ y un conectivo binario $\circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow\}$ tal que $\alpha_i = (\alpha_j \circ \alpha_k)$ o bien existe $j < i$ y una variable x_k tal que $\alpha_i = \forall x_k \alpha_j$ o $\alpha_i = \exists x_k \alpha_j$. Una expresión α sobre $\mathcal{A}$ se dice *fórmula* si existe una cadena de formación de fórmulas $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ tal que $\alpha_n = \alpha$.

Al igual que en la lógica proposicional notaremos con $Form$ al conjunto de todas las fórmulas.

Definición 5 Sea $\mathcal{A}$ un alfabeto del tipo descripto anteriormente. El lenguaje de primer orden asociado a A es el subconjunto $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}^*$ determinado por $Term \cup Form$.

De ahora en más omitiremos el subscripto $\mathcal{A}$ para denotar a un lenguaje de primer orden especificando de entrada cual es el alfabeto que usaremos. Notar que esta definición de lenguaje de primer orden esta en concordancia con la definición general de lenguaje sobre una alfabeto que vimos la primera clase.

El rol de las llamadas fórmulas atómicas es el mismo rol que juegan las variables proposicionales en la lógica proposicional. Notar que la palabra atómica está justificada por el hecho que son las fórmulas que no tienen conectivos. En el contexto de la lógica de primer orden los conectivos son 6 ya que incluyen a los cuantificadores $\forall$ y $\exists$.

Ejemplo 6 1) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un símbolo de constante c, un símbolo de función binario f^2 y un símbolo de predicado binario P^2. Las siguientes expresiones son fórmulas*:*

(a) $P^2(cx_1)$. *(Fórmula atómica)*

(b) $\exists x_3 P^2(cc)$.

(c) $\forall x_1 \exists x_2 P^2(x_1 f^2(x_2 x_3)$.

(d) $\forall x_1 \forall x_2 (P^2(x_1 x_2) \Rightarrow P^2(x_2 x_1))$.