

PRÁCTICA 8: ESPACIOS NORMADOS

Ejercicio 1. Probar que cada uno de los siguientes es un espacio normado sobre \mathbb{R} , y decidir si es un espacio de Banach.

i) $\ell^1 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} / \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$, con $\|(x_n)\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$.

ii) ℓ^1 con $\|(x_n)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

iii) $C[a, b]$ con $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

iv) $C^1[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es de clase } C^1\}$ con $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$.

Ejercicio 2. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado (sobre $k = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}). Probar que se verifican:

i) La función “tomar norma” $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

ii) Las operaciones $+: V \times V \rightarrow V$ y $\cdot : k \times V \rightarrow V$ son funciones continuas.

iii) $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$ (es decir, la clausura de la bola abierta es la bola cerrada).

iv) $(\overline{B}(x, r))^\circ = B(x, r)$ (es decir, el interior de la bola cerrada es la bola abierta).

v) $\text{diam}(B(x, r)) = 2r$ (suponiendo que $V \neq \{0\}$).

Ejercicio 3. Sea V un k -espacio vectorial ($k = \mathbb{R}$ o \mathbb{C}) y sea $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una métrica que satisfice:

i) $d(x+z, y+z) = d(x, y) \quad \forall x, y, z \in V$

ii) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y) \quad \forall x, y \in V \quad \forall \lambda \in k$

Se define $N : V \rightarrow \mathbb{R}$ como $N(x) = d(0, x)$. Probar que N es una norma en V y verificar que la distancia inducida por N es d .

Ejercicio 4. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $C \subset V$. Decimos que C es *convexo* si para todos $x, y \in C$ y $t \in [0, 1]$ se tiene que $tx + (1-t)y \in C$.

i) Probar que la bola abierta $B(x, r)$ es convexa.

ii) Probar que si C es convexo, entonces C° y \overline{C} también lo son.

iii) Probar que si $(C_i)_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos convexos de V , entonces $\bigcap_{i \in I} C_i$ es convexo. Deducir que dado un subconjunto $A \subset V$, existe un único conjunto convexo minimal (respecto de la inclusión) que lo contiene. Este conjunto se llama la *cápsula convexa* de A , y lo notamos $\text{Conv}(A)$.

iv) Probar que si $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ es un subconjunto finito de V , entonces $\text{Conv}(A) = \{\sum_{i=1}^n a_i x_i / a_i \geq 0 \text{ para todo } i, \sum_{i=1}^n a_i = 1\}$.

Ejercicio 5. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $S \subset V$ un subespacio (vectorial). Probar que:

- i) \overline{S} también es un subespacio.
- ii) Si $S \neq V$, entonces $S^\circ = \emptyset$.

Ejercicio 6. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$. Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge si existe $\lim \sum_{i=1}^n x_i$, y decimos que converge absolutamente si $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge en \mathbb{R} .

- (i) Probar que si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge, entonces $x_n \rightarrow 0$.
- (ii) Probar que si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente y V es de Banach, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

Ejercicio 7. Sean $(V, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y X un conjunto. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de X en V . Probar el criterio de Weierstrass:

Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales positivos tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y $\|f_n(x)\| \leq a_n$ para cualesquiera $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente.

Ejercicio 8. Dado un k -espacio vectorial V , un subespacio (vectorial) $H \subset V$ se dice un hiperplano si existe $x \in V$, $x \neq 0$, tal que $H \oplus \langle x \rangle = V$.

- i) Probar que si H es un hiperplano, entonces para todo $y \in V \setminus H$ se tiene que $H \oplus \langle y \rangle = V$.
- ii) Probar que H es un hiperplano si y sólo si existe $\phi : V \rightarrow k$ lineal, $\phi \neq 0$, tal que $H = \text{Nu}(\phi)$.
- iii) Probar que si V es un espacio normado y H es un hiperplano, entonces H es o bien cerrado o bien denso en V .

Ejercicio 9. Para cada uno de los siguientes ejemplos de subespacios decidir si son cerrados, si son densos y si son hiperplanos.

- i) $c = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n\} \subset \ell^\infty$.
- ii) $c_0 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \rightarrow 0\} \subset c$.
- iii) $\{x \in \ell^1 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\} \subset \ell^1$.
- iv) $\mathbb{R}[X] \subset C[0, 1]$.

Ejercicio 10. Sean V y W espacios normados. Sea $T : V \rightarrow W$ un operador lineal. Probar que son equivalentes:

- i) T es continuo en 0;
- ii) existe $x_0 \in v$ tal que T es continuo en x_0 ;
- iii) T es continuo;

- iv) T es uniformemente continuo;
- v) existe $M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in V$ (T es acotado);
- vi) $\forall A \subset V$ acotado, $T(A)$ es acotado.

Ejercicio 11. Sean $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ espacios normados. Consideramos $L(V, W) := \{T : V \rightarrow W / T \text{ es lineal y continua}\}$, y para cada $T \in L(V, W)$ sea

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_V \leq 1} \|T(x)\|_W.$$

Probar que:

- i) $(L(V, W), \|\cdot\|)$ es un espacio normado.
- ii) Si W es de Banach entonces $L(V, W)$ también lo es.

Ejercicio 12. Sean V y W espacios normados y sea $T : V \rightarrow W$ un operador lineal y continuo. Verificar las siguientes fórmulas:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{M > 0 / \|Tx\| \leq M\|x\| \text{ para todo } x\}.$$

Ejercicio 13. Sean V_1, V_2 y V_3 espacios normados, y sean $f : V_1 \rightarrow V_2$ y $g : V_2 \rightarrow V_3$ operadores lineales continuos. Probar que $\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|$.

Ejercicio 14. Sea $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$ el espacio normado formado por todos los polinomios con coeficientes reales con la norma $\|P\| = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$. Sea $\varphi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(P) = P(3)$.

Probar que φ es lineal pero no continua.

Ejercicio 15. Sea $C_0(\mathbb{R})$ el espacio normado formado por las funciones continuas con soporte compacto con la norma $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Definimos $\varphi : C_0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ como $\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t) dt$.

Estudiar la continuidad de φ .

Ejercicio 16. Sean $S, T : \ell^1 \rightarrow \ell^1$, definidos por:

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$$

Probar que $S, T \in L(\ell^1)$ y calcular sus normas.

Ejercicio 17. Sea $T : c \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Probar que T es lineal y continuo y hallar $\|T\|$. (Recordar: c es el conjunto de las sucesiones en \mathbb{R} convergentes).

Ejercicio 18. Sea $\phi \in C[0, 1]$ y sea $T_\phi : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$T_\phi f = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx.$$

Probar que T_ϕ es un funcional lineal continuo y que $\|T_\phi\| = \int_0^1 |\phi(x)|dx$.

Ejercicio 19. Sea V un espacio normado sobre k ($k = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}) y sea $\phi : V \rightarrow k$ un funcional lineal. Probar que ϕ es continuo si y sólo si $\text{Nu}(\phi)$ es cerrado.

Ejercicio 20.

i) Sea V un espacio normado y sea H el hiperplano cerrado de V de ecuación $\varphi(x) = 0$, donde φ es un funcional lineal continuo. Probar que para cada $a \in V$ vale que $d(a, H) = \frac{|\varphi(a)|}{\|\varphi\|}$.

ii) En el espacio $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, sea H el hiperplano de ecuación $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} = 0$.

a) Verificar que H es cerrado.

b) Probar que si $a \notin H$, no existe ningún punto $b \in H$ tal que $d(a, H) = d(a, b)$.

Ejercicio 21. Sea V un espacio normado y sea (W, i) su completación. Recordar que W es un espacio normado. Sea U un espacio de Banach y $T : V \rightarrow U$ un operador lineal continuo.

(i) Probar que existe un único operador lineal continuo $T' : W \rightarrow U$ tal que $T' \circ i = T$.

(ii) Probar que $\|T'\| = \|T\|$.

(iii) Probar que $L(V, U)$ y $L(W, U)$ son isométricamente isomorfos.

Ejercicio 22. Sea V un espacio de Banach de dimensión infinita. Probar que no puede tener una base algebraica numerable.

Sugerencia: si la tuviera se escribiría como unión numerable de subespacios de dimensión finita. Usar el teorema de Baire.