Práctica 7: Sucesiones de Funciones

Ejercicio 1.

i) En cada uno de los casos siguientes, hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida en el conjunto $A \subset \mathbb{R}$ dado:

a) $f_n(x) = x^n \qquad A = (-1, 1]$

b) $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n} \qquad A = (1, +\infty)$

c) $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n \qquad A = [0, 1]$

ii) Demostrar que la sucesión de (a) converge uniformemente en $B = (0, \frac{1}{2})$. ¿Es uniforme la convergencia en $(-1, 1]$?

iii) Demostrar que la sucesión de (b) converge uniformemente en $B = [2, 5]$. ¿Es uniforme la convergencia en $(1, 2)$? ¿Y en $(2, +\infty)$?

iv) Demostrar que para la sucesión de (c) existe $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ pero el mismo no coincide con la integral del límite puntual (es decir, el límite no puede "pasar adentro de la integral").

Ejercicio 2. Sean X un espacio métrico y A un conjunto. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de A en X y sea $f : A \to X$. Probar que: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **no** converge uniformemente a f sobre A si y solamente si existen $\alpha > 0$, una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en A tales que $d(f_{n_k}(a_k), f(a_k)) \geq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones:

i) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) $f_n(x) = \sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

iii) $f_n(z) = \dfrac{n}{n+1} z$, $z \in \mathbb{C}$.

iv) $f_n(z) = nz^2$, $z \in \mathbb{C}$.

v) $f_n(z) = z^n$, en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Ejercicio 4. Probar que la sucesión de funciones $f_n(x) = \dfrac{x}{1+x^2} - \dfrac{x^3}{1+nx^2}$ converge puntualmente pero no uniformemente, en $\mathbb{R}$, a una función continua.

Ejercicio 5. Sea X un conjunto y sea $B(X) = \{g : X \to \mathbb{C} : g \text{ es acotada}\}$. Consideremos una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(X)$.

i) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función f en X, ¿es cierto que $f \in B(X)$?

ii) Probar que:

   a) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función f en X, entonces $f \in B(X)$.

   b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f si y sólo si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $(B(X), d_\infty)$.

   c) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en X, entonces existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada.

Ejercicio 6. Sea X un espacio métrico, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ y sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua.

i) Probar que si f_n converge uniformemente a f, entonces para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ que converge a $x \in X$ se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

ii) Probar que si X es compacto vale la vuelta, es decir: si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ que converge a $x \in X$ se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$, entonces f_n converge uniformemente a f.

Ejercicio 7. Sea X un conjunto y sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de funciones de X en $\mathbb{R}$ que convergen uniformemente sobre X.

i) Probar que $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre X.

ii) Probar que si las f_n y las g_n son acotadas, entonces $(f_n \cdot g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre X.

iii) Mostrar con un ejemplo que el resultado anterior no es cierto si se permite que las g_n no estén acotadas.

Ejercicio 8. Sean X un espacio métrico compacto y A un conjunto. Probar que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ que converge uniformemente a $f : X \to \mathbb{R}$, y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones que converge uniformemente a una función $g : A \to X$, entonces la sucesión $(f_n \circ g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones de A en $\mathbb{R}$ converge uniformemente a $f \circ g$. Mostrar con un ejemplo que el resultado anterior no es cierto si se omite la hipótesis de X compacto.

Ejercicio 9. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las sucesiones $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx^2}$ y f_n' en $[-1, 1]$.

Ejercicio 10. Sean X e Y espacios métricos. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones de X en Y es equicontinua en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \forall f \in \mathcal{F}, d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

i) Probar que cualquier familia finita de funciones de X en Y continuas en $x_0 \in X$ es equicontinua en x_0.

ii) Sea $B(X, Y)$ el conjunto de todas las funciones de X en Y que son acotadas. Probar que si $\mathcal{F} \subseteq B(X, Y)$ es una familia equicontinua, entonces $\overline{\mathcal{F}}$ también es equicontinua.

iii) Probar que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas de X en Y que converge uniformemente en X, entonces $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia equicontinua.

Supongamos desde ahora que X es compacto.

iv) Probar que si $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua de funciones de X en Y, entonces $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua.

v) Probar que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones de X en Y uniformemente equicontinua que converge puntualmente a $f : X \to Y$, entonces esa convergencia es uniforme en X.

Ejercicio 11. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ integrables y uniformemente acotadas y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $F_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(\xi)d\xi$$

para cada $x \in [a, b]$. Probar que la sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión que converge uniformemente sobre $[a, b]$.

Ejercicio 12. Sea X un espacio métrico compacto y sea Y un espacio métrico completo. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C(X, Y)$ una familia equicontinua tal que $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es relativamente compacto para todo $x \in X$. Observar que por el Teorema de Arzelà-Ascoli, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión que converge uniformemente. El objetivo de este ejercicio es dar una demostración alternativa de este hecho.
Sea $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ denso en X. Probar que existe una subsucesión $(f_{n_{k_1}})_{k_1\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(f_{n_{k_1}}(x_1))_{k_1\in\mathbb{N}}$ converge. Probar que esta subsucesión tiene una subsucesión $(f_{n_{k_{1k_2}}})_{k_2\in\mathbb{N}}$ que converge al ser evaluada en x_2. Probar que la subsucesión diagonal $f_{n_1}, f_{n_{k_{12}}}, f_{n_{k_{1k_{23}}}}, \ldots$ converge unifomemente a cierta $f : X \to Y$.

Ejercicio 13. Sean $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definidas recursivamente por $f_1(x) = 1$ y $f_{n+1}(x) = \sqrt{xf_n(x)}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente. (*Sugerencia:* Usar el Teorema de Dini.)

Ejercicio 14. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable, y sea $[c, d]$ un intervalo contenido en $[a, b]$.

i) Probar que f es integrable en $[c, d]$.

ii) Probar que $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Ejercicio 15. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones integrables, y $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) Probar que $f+g$ es integrable en $[a, b]$, y vale que $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

ii) Probar que λf es integrable en $[a, b]$, y vale que $\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$.

Ejercicio 16. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que entonces f es integrable en $[a, b]$.

Ejercicio 17. Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, x^n\, dx = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que $f \equiv 0$ en $[0, 1]$. (*Sugerencia:* Usar el Teorema de Stone-Weierstrass.)

Ejercicio 18. Sean f_n continuas en $[0, 1]$ tales que $f_n \rightrightarrows f$. Decidir si vale la sigueinte afirmación:

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(x)dx.$$

Ejercicio 19. Hallar (y justificar) los conjuntos de $\mathbb{R}$ de convergencia puntual, uniforme y no convergencia de las siguientes series:

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n \ ; \quad ii) \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n \ ; \ iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ ; \ iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

¿Qué ocurre con la serie que se obtiene derivando término a término?

Ejercicio 20. Consideramos la función dada por la serie:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Probar que la serie converge uniformemente en cada intervalo $(1 + \varepsilon, \infty)$ hacia una función continua, y que es posible derivarla término a término en dicho intervalo.

Ejercicio 21. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares (reales o complejos) tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente. Probar que las dos series de funciones $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ convergen absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 22. Si $x \in \mathbb{R}$, sea $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2 x^2}$.

i) Determine el subconjunto de $\mathbb{R}$ sobre el cual esta definición tiene sentido.

ii) ¿Sobre qué intervalos es uniforme la convergencia?

iii) ¿Sobre qué intervalos no es uniforme la convergencia?

iv) ¿Es f continua en su dominio?

v) ¿Es f acotada?