Práctica 6: Conexión

Ejercicio 1. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ (con la métrica usual) son conexos:

$$\mathbb{N}, \qquad [0,1), \qquad \mathbb{Q}, \qquad \left\{\frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}\right\}$$

Ejercicio 2. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones en un espacio métrico arbitrario (X, d). Pensar además si las que son falsas se vuelven verdaderas cuando el espacio es $\mathbb{R}^n$.

i) Toda bola abierta $B(a, r)$ es conexa.

ii) Para todo $a \in X$, existe $r > 0$ tal que la bola $B(a, r)$ es conexa.

iii) Si $A, B \subset X$ son conexos entonces $A \cup B$ es conexo.

iv) Si $A, B \subset X$ son conexos entonces $A \cap B$ es conexo.

v) Si $A, B \subset X$ son conexos entonces $A - B$ es conexo.

vi) Si $A \subset X$ es conexo y x es un punto de acumulación de A, entonces $A \cup \{x\}$ es conexo.

vii) Si $A \subset X$ es conexo, entonces A° es conexo.

viii) Si $A \subset X$ es conexo, entonces $\overline{A}$ es conexo.

Ejercicio 3. Probar que el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|(x, y)\| < 2\}$ es conexo.

Ejercicio 4. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $C \subset X$. Probar que son equivalentes:

i) No existen U, V abiertos en C, no vacíos y disjuntos tales que $C = U \cup V$.

ii) No existen $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ abiertos en X tales que $C \cap \mathcal{U} \neq \varnothing$, $C \cap \mathcal{V} \neq \varnothing$, $C \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing$ y $C \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.

iii) Si $A \subset C$ es no vacío y abierto y cerrado en C, entonces $A = C$.

Ejercicio 5. Sea (X, d) un espacio métrico y sea C un subconjunto de X que no es conexo. Probar que existen $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ abiertos en X **disjuntos** tales que $C \cap \mathcal{U} \neq \varnothing$, $C \cap \mathcal{V} \neq \varnothing$ y $C \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.

Ejercicio 6. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ continua. Probar que f es constante.

Ejercicio 7. Probar que un espacio métrico (X, d) es conexo si y sólo si toda función continua $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ es constante.

Ejercicio 8. Probar que si $n \geq 2$ no existe un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$.
(Que $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ no son homeomorfos si $m \neq n$ es un resultado mucho más avanzado, que se verá en Topología.)

Ejercicio 9. Probar que los espacios métricos $(0, 1)$, $[0, 1)$ y $[0, 1]$ (con las métricas que heredan como subespacios de $\mathbb{R}$) son dos a dos no homeomorfos.

Ejercicio 10.

i) Sea (X,d) un espacio métrico conexo y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sean $a, b \in f(X)$ tales que $a \leq b$. Probar que para todo $c \in [a,b]$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = c$.

ii) Probar que si (X,d) es conexo, entonces $\#X = 1$ o $\#X \geq c$.

Ejercicio 11. Hallar las componentes conexas de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^2$:

i) $\operatorname{arcsen}([\frac{\sqrt{2}}{2}, 1])$.

ii) $\mathbb{Q}$.

iii) $B((-1,0),1) \cup B((1,0),1)$.

iv) $B((-1,0),1) \cup B((1,0),1) \cup \{(0,0)\}$.

Ejercicio 12. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$, y sea $X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \cup \{(0,0),(0,1)\}$. Probar que:

i) $\{(0,0)\}$ y $\{(0,1)\}$ son componentes conexas de X.

ii) Si $B \subset X$ es abierto y cerrado en X, entonces $\{(0,0),(0,1)\} \subset B$ o $\{(0,0),(0,1)\} \cap B = \varnothing$.

Ejercicio 13. Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que las componentes conexas de X son conjuntos cerrados. ¿Son abiertos?

Ejercicio 14. Probar que los siguientes conjuntos son totalmente disconexos:

i) Un espacio métrico discreto con cardinal mayor o igual que 2.

ii) Un espacio métrico numerable.

iii) El conjunto de Cantor.

Ejercicio 15. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son arcoconexos:

i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; z = f(x,y)\}$ donde $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

ii) $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$.

iii) $\mathbb{R}^n - B(0,1)$.

iv) $\mathbb{R}^2 - \{(x,0) \;/\; x \in \mathbb{R}\}$.

v) $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Ejercicio 16. Sean (X,d) un espacio métrico arcoconexo, (Y,d') un espacio métrico y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Probar que el conjunto $f(X)$ es arcoconexo.

Ejercicio 17. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos la esfera S^k como el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^{k+1}$ que tienen norma 1. Probar que S^1 no es homeomorfo a S^2.

Ejercicio 18. Sea $n \geq 2$ y sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto contable. Probar que $\mathbb{R}^n - S$ es arcoconexo.

Ejercicio 19. Sea (X, d) un espacio métrico. Se define la siguiente relación: $x \sim y$ si existe un camino de x a y.

i) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia en X.

ii) La *componente arcoconexa* de $x \in X$ se define como $C_x = \{y \in X \ / \ y \sim x\}$. Verificar que:

a) Si $x \sim y$ entonces $C_x = C_y$

b) Si $x \not\sim y$ entonces $C_x \cap C_y = \emptyset$

c) $X = \bigcup_{x \in X} C_x$

iii) Mostrar que X es arcoconexo si y sólo si tiene una única componente arcoconexa.

Ejercicio 20. En el espacio $(C[0,1], d_\infty)$ se considera el conjunto

$$U = \{f \in C[0,1] : f(x) \neq 0 \ \forall \ x \in [0,1]\}.$$

Probar que U es abierto y hallar sus componentes conexas.

Ejercicio 21. Un espacio métrico (X, d) se dice *localmente conexo* (resp. *localmente arcoconexo*) si para todo $x \in X$ y para todo $U \subset X$ entorno de x, existe un entorno conexo (resp. arcoconexo) V de x tal que $x \in V \subset U$. Probar que:

i) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces A es conexo $\iff$ A es arcoconexo

ii) Un espacio métrico X es localmente (arco)conexo si y sólo si para todo U abierto de X, las componentes (arco)conexas de U son abiertas.

iii) Todo espacio métrico conexo y localmente arcoconexo es arcoconexo.

iv) En un espacio métrico localmente arcoconexo todo conjunto abierto y conexo es arcoconexo.

v) Las componentes arcoconexas de un espacio localmente arcoconexo son abiertas.