

## PRÁCTICA 5: COMPACIDAD

**Ejercicio 1.**

- i) Mostrar que el intervalo  $(0, 1] \subset \mathbb{R}$  no es compacto.
- ii) Sea  $S = (a, b) \cap \mathbb{Q}$  con  $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ . Probar que  $S$  es un subconjunto cerrado y acotado pero no compacto de  $(\mathbb{Q}, d)$ , donde  $d$  es la métrica usual de  $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 2.** Sea  $E = \{e^{(n)} \in \ell_\infty / n \in \mathbb{N}\}$ , donde cada sucesión  $e^{(n)} = (e_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$  está definida por

$$e_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases}$$

Probar que  $E$  es discreto, cerrado y acotado, pero no compacto.

**Ejercicio 3.** Sea  $c_0 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} / \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$ . Se define en  $c_0$  la métrica

$$d(x, y) = \sup\{|x_n - y_n| / n \in \mathbb{N}\}.$$

- i) Demostrar que la bola cerrada  $\overline{B}(x, 1) = \{y \in c_0 / d(x, y) \leq 1\}$  no es compacta.
- ii) Probar que  $(c_0, d)$  es separable.

**Ejercicio 4.** Sea  $X$  un espacio métrico y sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in X$ . Probar que el conjunto  $K = \{a_n / n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\} \subset X$  es compacto.

**Ejercicio 5.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Probar que:

- i) Si  $(X, d)$  es compacto, todo subconjunto cerrado de  $X$  es compacto.
- ii) Toda unión finita y toda intersección (finita o infinita) de subconjuntos compactos de  $X$  es compacta.
- iii) Un subconjunto  $F \subset X$  es cerrado si y sólo si  $F \cap K$  es cerrado para todo compacto  $K \subset X$ .

**Ejercicio 6.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Se dice que una familia  $(F_i)_{i \in I}$  de subconjuntos de  $X$  tiene la *propiedad de intersección finita* (P.I.F.) si cualquier subfamilia finita de  $(F_i)_{i \in I}$  tiene intersección no vacía. Probar que  $X$  es compacto si y sólo si toda familia  $(F_i)_{i \in I}$  de subconjuntos cerrados de  $X$  con la P.I.F. tiene intersección no vacía.

**Ejercicio 7.** Probar que todo espacio métrico compacto es separable.

**Ejercicio 8.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos. Se considera  $(X \times Y, d_\infty)$ , donde

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}.$$

Probar que  $(X \times Y, d_\infty)$  es compacto si y sólo si  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  son compactos.

**Ejercicio 9.** Sea  $X$  un espacio métrico compacto y sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $f(x) > 0$  para todo  $x \in X$ . Probar que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(x) \geq \varepsilon$  para todo  $x \in X$ .

**Ejercicio 10.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico.

- i) Sean  $F \subset X$  un cerrado y  $x \in X - F$ . Probar que no es cierto en general que exista un punto  $y \in F$  tal que  $d(x, y) = d(x, F)$ . Es decir, la distancia entre un punto y un cerrado puede no realizarse.
- ii) Sean  $K \subset X$  un compacto y  $x \in X - K$ . Probar que existe  $y \in K$  tal que  $d(x, K) = d(x, y)$ . Es decir, la distancia entre un punto y un compacto siempre se realiza.
- iii) Probar que si  $X$  tiene la propiedad de que toda bola cerrada es compacta (por ejemplo, si  $X = \mathbb{R}^n$ ) entonces sí vale que la distancia entre un punto y un cerrado siempre se realiza.
- iv) Sean  $F, K \subset X$  dos subconjuntos disjuntos de  $X$  tales que  $F$  es cerrado y  $K$  es compacto. Probar que la distancia  $d(F, K)$  entre  $F$  y  $K$  es positiva, pero puede no realizarse.
- v) Sean  $K_1, K_2 \subset X$  dos subconjuntos compactos de  $X$  tales que  $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ . Probar que existen  $x_1 \in K_1$  y  $x_2 \in K_2$  tales que  $d(K_1, K_2) = d(x_1, x_2)$ . Es decir, la distancia entre dos compactos siempre se realiza.

**Ejercicio 11.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Se define

$$\mathcal{K}(X) = \{K \subset X / K \text{ es compacto y no vacío}\}.$$

- i) Sea  $\tilde{d}(A, B) = \sup_{a \in A} \{d(a, B)\}$ . Verificar que, en general,  $\tilde{d}$  **no** es una métrica en  $\mathcal{K}(X)$ .
- ii) Se define  $d : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathbb{R}$  como  $d(A, B) = \max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\}$ . Probar que para todo  $\varepsilon > 0$  vale

$$d(A, B) < \varepsilon \iff A \subset B(B, \varepsilon) \quad \text{y} \quad B \subset B(A, \varepsilon),$$

donde  $B(C, \varepsilon) = \{x \in X / d(x, C) < \varepsilon\}$  para cada  $C \subset X$ .

- iii) Probar que  $d$  es una métrica en  $\mathcal{K}(X)$ .

**Ejercicio 12.** Dado un cubrimiento por abiertos  $(U_i)_{i \in I}$  de un espacio métrico  $(X, d)$ , un número  $\varepsilon > 0$  se llama *número de Lebesgue* de  $(U_i)_{i \in I}$  si para todo  $x \in X$  existe  $j \in I$  tal que  $B(x, \varepsilon) \subset U_j$ . Probar que todo cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue.

**Ejercicio 13.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos y  $f : X \rightarrow Y$  continua y biyectiva. Probar que si  $(X, d)$  es compacto, entonces  $f$  es un homeomorfismo.

**Ejercicio 14.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto. Probar que para cada espacio métrico  $(Y, d')$ , la proyección  $\pi : X \times Y \rightarrow Y$  definida por  $\pi(x, y) = y$  es cerrada.

**Ejercicio 15.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espacios métricos, y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función. Probar que si  $Y$  es compacto y el gráfico de  $f$  es cerrado en  $(X \times Y, d_\infty)$ , entonces  $f$  es continua. Comparar con el ejercicio 15 de la práctica 3.

**Ejercicio 16.**

- i) Sea  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua que es uniformemente continua en  $[b, +\infty)$  para cierto  $b > a$ . Probar que  $f$  es uniformemente continua en  $[a, +\infty)$ .
- ii) Deducir que la función  $f(x) = \sqrt{x}$  es uniformemente continua en  $[0, +\infty)$ .

**Ejercicio 17.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Probar que  $f$  es uniformemente continua.

**Ejercicio 18.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto y sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una función semicontinua superiormente (ver ejercicio 26, práctica 3). Probar que  $f$  alcanza máximo en  $X$ .