Análisis Real - Medida y Probabilidad

Primer Cuatrimestre 2024

Guía de problemas N° 7: Diferenciación

Definición 1. Se define el conjunto de las funciones *localmente integrables*, $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, al conjunto

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) = \{f\colon \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}\colon f \in L^1(K) \text{ para todo } K \subset \mathbb{R}^d \text{ compacto}\}.$$

Definición 2. Dada $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ se definen las funciones maximales de Hardy-Littlewood como

- $M^Q(f)(x) = \sup\left\{\dfrac{1}{|Q|}\displaystyle\int_Q |f|\,dy\colon Q \text{ es un cubo que contiene a } x\right\}$.
- $M^{QC}(f)(x) = \sup\left\{\dfrac{1}{|Q|}\displaystyle\int_Q |f|\,dy\colon Q \text{ es un cubo centrado en } x\right\}$.
- $M^B(f)(x) = \sup\left\{\dfrac{1}{|B|}\displaystyle\int_B |f|\,dy\colon B \text{ es una bola que contiene a } x\right\}$.
- $M^{BC}(f)(x) = \sup\left\{\dfrac{1}{|B|}\displaystyle\int_B |f|\,dy\colon B \text{ es una bola centrada en } x\right\}$.

Ejercicio 1. Probar que todas las funciones maximales de Hardy-Littlewood definidas arriba son equivalentes. Es decir, para cualquier par de maximales consideradas $M^{(i)}(f)$ y $M^{(j)}(f)$ existen constantes $C_1, C_2 > 0$ que dependen únicamente de la dimensión d tales que para toda $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ se verifica

$$C_1 M^{(i)}(f) \leq M^{(j)}(f) \leq C_2 M^{(i)}(f).$$

En lo que sigue notaremos $M(f)$ para referirnos a cualquiera de las cuatro versiones de la función maximal.

Ejercicio 2. Sea $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ el conjunto formado por aquellas funciones medibles que son integrables sobre todo compacto $K \subseteq \mathbb{R}^d$. Probar:

1. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, entonces $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.
2. Si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ entonces $M(f)$ es semicontinua inferiormente.

Ejercicio 3.

1. Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto medible de diámetro finito. Probar que existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que para $|x|$ suficientemente grande vale
$$C_1|E||x|^{-d} \leq M(\chi_E)(x) \leq C_2|E||x|^{-d}.$$
2. Sea $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ no nula. Probar que existe $c > 0$ tal que $M(f)(x) \geq c|x|^{-d}$ para $|x| \geq 1$. Deducir que $M(f) \notin L^1(\mathbb{R}^d)$, salvo que $f = 0$ en casi todo punto.
3. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{|x|\log^2(|x|^{-1})}\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)$. Mostrar que f es integrable pero que $M(f) \notin L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Ejercicio 4. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

1. Probar que si $1 \leq p < \infty$, existe $c > 0$ que no depende de f tal que para todo $\alpha > 0$,
$$|\{x \in \mathbb{R}^d\colon M(f)(x) > \alpha\}| \leq \frac{c}{\alpha}\int_{\{x\in\mathbb{R}^d\colon |f(x)|\geq\alpha/2\}} |f(x)|\,dx.$$
Sugerencia: Considerar $g = f\chi_{\{|f|\geq\frac{\alpha}{2}\}}$ y usar que $|f| \leq |g| + \frac{\alpha}{2}$.

2. Probar que si $1 < p \leq \infty$, entonces $M(f) \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Además existe $c_p > 0$ que no depende de f tal que $\|M(f)\|_p \leq c_p \|f\|_p$.

Ejercicio 5. Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Un punto x se dice *punto de Lebesque de* f si

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f(x)|\, dy \to 0 \text{ cuando } Q \downarrow x.$$

Probar que casi todo punto de $\mathbb{R}^d$ es un punto de Lebesgue de f.

Ejercicio 6. Sea $\mathcal{S} = \{S_i : i \in I\}$ una familia de conjuntos medibles. Se dice que $\mathcal{S}$ se *contrae regularmente* a x si

1. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $S_i \in \mathcal{S}$ tal que $\operatorname{diam}(S_i) < \varepsilon$.
2. Existe una constante $k > 0$ tal que para todo $S_i \in \mathcal{S}$ vale que $|Q_i| \leq k|S_i|$, donde Q_i es el cubo más pequeño con centro en x que contiene a S_i.

Los conjuntos S_i no necesitan contener a x.

1. Probar que las siguientes familias se contraen regularmente a x:
   - $\mathcal{S}^B = \{B : B \text{ bola que contiene a } x\}$
   - $\mathcal{S}^Q = \{Q : Q \text{ cubo que contiene a } x\}$
   - $\mathcal{S}^{BC} = \{B(x,r) : r > 0\}$
   - $\mathcal{S}^{QC} = \{x + [-\ell, \ell]^d : \ell > 0\}$.
2. Probar que si $\mathcal{S}$ es una familia que se contrae regularmente a x entonces existe una constante $C > 0$ tal que
$$\sup_{S_i \in \mathcal{S}} \frac{1}{|S_i|} \int_{S_i} |f(y)|\, dy \leq C M^{QC}(f)(x).$$
3. Probar que si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ entonces en todo punto de Lebesgue de f,
$$\lim_{|S_i| \to 0} \frac{1}{|S_i|} \int_{S_i} |f(y) - f(x)|\, dy = 0,$$
para toda familia $\mathcal{S}$ que se contrae regularmente a x.

Ejercicio 7. Sea $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\phi \geq 0$ tal que $\operatorname{sop}(\phi) \subset \overline{B_1(0)}$ y $\int_{\mathbb{R}^d} \phi\, dx = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$ se define $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} \phi(\frac{x}{\varepsilon})$. Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, probar que:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (f * \phi_\varepsilon)(x) = f(x),$$

para todo punto de Lebesgue de f.

Ejercicio 8. Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f \varphi'\, dx = 0$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Probar que f es constante en casi todo punto.

Ejercicio 9. Sea $K \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ de soporte compacto. Probar que existe $C > 0$ tal que para toda función $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, se tiene

$$\sup_{\varepsilon > 0} |f * K_\varepsilon(x)| \leq C M(f)(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$ donde $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} K(\frac{x}{\varepsilon})$.

Ejercicio 10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ x \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Calcular los cuatro números de Dini f en $x_0 = 0$.

Ejercicio 11. Hallar $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ creciente, continua y tal que

$$\int_0^1 f'(x)\,dx < f(1) - f(0).$$

Ejercicio 12. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable y sea $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ la integral indefinida de f. Probar:

1. F es absolutamente continua.
2. F es derivable en casi todo punto y $F'(x) = f(x)$.

Ejercicio 13. Sea $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente y absolutamente continua con $g(a) = c$ y $g(b) = d$.

1. Si $G \subset [c,d]$ es abierto, entonces $|G| = \int_{g^{-1}(G)} g'(x)\,dx$.
2. Sea $H = \{x : g'(x) \neq 0\}$. Si $E \subset [c,d]$ verifica que $|E| = 0$, entonces $g^{-1}(E) \cap H$ tiene medida nula.
3. Si $E \subset [c,d]$ es medible, entonces $F = g^{-1}(E) \cap H$ es medible y $|E| = \int_F g'(x)\,dx = \int_a^b \chi_E(g(x))g'(x)\,dx$.
4. Si f es medible y no negativa sobre $[c,d]$, entonces $(f \circ g)g'$ es medible sobre $[a,b]$ y $\int_c^d f(y)\,dy = \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$.

Ejercicio 14. Sea $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ absolutamente continua en $[a,b]$ y $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. Definimos

$$G(x) = G(a) + \int_a^x g(t)\,dt.$$

Probar que vale la *fórmula de integración por partes*

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b G(x)F'(x)\,dx.$$

Ejercicio 15. Probar que si f es de variación acotada en $[a,b]$, entonces f se puede escribir como $f = g + h$ donde g es absolutamente continua en $[a,b]$ y h es singular en $[a,b]$. Probar, además, que g y h son únicas salvo constantes aditivas.

Ejercicio 16. Sean $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) funciones absolutamente continuas, crecientes y no negativas tales que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge a un límite finito para todo $x \in [0,1]$. Sea $f(x)$ ese límite. Probar que f es derivable en casi todo punto y $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ en casi todo punto.

Ejercicio 17. Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Probar que f es continua en $[0,1]$, pero $V_0^1(f) = \infty$.
2. Probar que $g(x) = xf(x)$ es de variación acotada sobre $[0,1]$.

Ejercicio 18. Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones de variación acotada. Entonces:

1. $f + g$, $f - g$, fg y $|f|$ son de variación acotada.
2. Si existe $m > 0$ tal que $|f(x)| \geq m$ para todo $x \in [a,b]$, entonces la función $1/f$ es de variación acotada.

Ejercicio 19. Sea $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable Riemann. Probar que $f(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ es de variación acotada.

Ejercicio 20. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada. Para cada $x \in (a,b]$ notemos $V(x) = V_a^x(f)$ y $V(a) = 0$. Dado $x_0 \in [a,b]$ probar que f es continua a izquierda (resp. a derecha) en x_0 si y sólo si V es continua a izquierda (resp. a derecha) en x_0.

Ejercicio 21. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada. Probar que el conjunto de puntos de discontinuidad de f es a lo sumo numerable.

Ejercicio 22. Sea f absolutamente continua en $[\varepsilon, 1]$ para todo $\varepsilon > 0$.

1. Si además f es continua en 0, ¿es f absolutamente continua en $[0,1]$?
2. Si además f es continua en 0 y de variación acotada en $[0,1]$, ¿es f absolutamente continua en $[0,1]$?

Ejercicio 23. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de variación acotada sobre $[a,b]$. Probar que si $\sup_{n\in\mathbb{N}} V_a^b(f_n) < \infty$ y $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $V_a^b(f) < \infty$.

Ejercicio 24. Dar un ejemplo de una sucesión convergente de funciones de variación acotada cuyo límite sea una función de variación no acotada.

Ejercicio 25. Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, donde $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Probar que f es de variación acotada y $V_0^1(f) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Ejercicio 26. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada. Sea $V\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $V(x) = V_a^x(f)$. El objetivo de este ejercicio es el de probar que $V'(x) = |f'(x)|$ en casi todo punto. Para eso se propone lo siguiente:

1. Dada una partición $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, existe una función $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que
   - g(0)=0,
   - para cada $0 \leq j \leq n-1$, $g(x_{j+1}) - g(x_j) = |f(x_{j+1}) - f(x_j)|$,
   - para cada $0 \leq j \leq n-1$, existe una constante $c_j \in \mathbb{R}$ tal que
   $$g|_{[x_j, x_{j+1}]} = f|_{[x_j, x_{j+1}]} + c_j \quad \text{o} \quad g|_{[x_j, x_{j+1}]} = -f|_{[x_j, x_{j+1}]} + c_j.$$
2. Probar que toda función g como en el ítem anterior verifica que
   - $|g'| = |f'|$ en casi todo punto,
   - $g(b) = \sum_{j=1}^{n-1} |f(x_{j+1}) - f(x_j)|$,
   - $V - g$ es monótona creciente.
3. Elegir una sucesión de funciones g_k como en el ítem 1 tales que $\sum_{k=1}^{\infty} V(x) - g_k(x) < \infty$ para casi todo $x \in [a,b]$ y aplicar el ejercicio 16

Ejercicio 27. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada. Sea $V\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $V(x) = V_a^x(f)$. Probar que

1. f es continua si y sólo si V lo es.
2. f es absolutamente continua si y sólo si V lo es. Además, en este caso,
$$V(x) = \int_a^x |f'(x)|\, dx, \text{ para todo } x \in [a,b].$$
3. $\int_a^b |f'(x)|\, dx \leq V_a^b(f)$ y la igualdad vale si y sólo si f es absolutamente continua.

Ejercicio 28. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua. Probar que si $N \subset [a,b]$ tiene medida nula, entonces $f(N)$ tiene medida nula. Concluir que la imagen por f de un conjunto medible es un conjunto medible.

Sugerencia: Probar que la imagen por f de un intervalo $[c,d]$ es un intervalo de medida menor a la variación de f en $[c,d]$.