Análisis Real - Medida y Probabilidad

Primer Cuatrimestre 2024

Guía de problemas N° 5: El Teorema de cambio de variables

Ejercicio 1 (Coordenadas polares)**.** Probar que para cualquier función medible no negativa f de $\mathbb{R}^2$ se cumple

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\ dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, drd\theta.$$

Ejercicio 2 (Coordenadas polares en $\mathbb{R}^d$)**.** Definimos los abiertos $G, H \subset \mathbb{R}^d$ como

$$G = (0,\infty)\times(0,\pi)\times\cdots\times(0,\pi)\times(0,2\pi) \quad \text{y} \quad H = \{x\in\mathbb{R}^d\colon x_d \neq 0 \text{ o } x_{d-1} < 0\}.$$

Sea $S\colon G \to H$ la aplicación definida como

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\theta_1, \\ x_2 = \rho\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ \vdots \\ x_{d-1} = \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{d-2}\cos\theta_{d-1}, \\ x_d = \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{d-2}\sin\theta_{d-1}. \end{cases}$$

Notamos $x = (x_1,\dots,x_d)$, $\theta = (\theta_1,\dots,\theta_{d-1})$ entonces tenemos que $x = S(\rho,\theta)$.

1. Probar que $S\colon G\to H$ es biyectiva y que $\mathbb{R}^d \setminus H$ tiene medida cero.
2. Verificar que $\rho^2 = |x|^2$.
3. Probar que el Jacobiano de S viene dado por la fórmula
$$J = \rho^{d-1}g(\theta), \quad \text{donde } g(\theta) = \sin^{d-2}\theta_1\sin^{d-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{d-2}.$$
Sugerencia: expresar S como $S_2\circ S_1$, donde S_1 está dada por
$$x_1 = \rho\cos\theta_1,\ \rho_1 = \rho\sin\theta_1,\ \theta_2 = \theta_2,\dots,\theta_{d-1} = \theta_{d-1},$$
y S_2 está dada por
$$x_1 = x_1,\ x_2 = \rho_1\cos\theta_2,\ x_3 = \rho_1\sin\theta_2\cos\theta_3,\dots,x_d = \rho_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{d-1},$$
y usar inducción con respecto a d.
4. Poniendo $\omega = S(1,\theta)$, la transformación S puede escribirse de la forma $x = \rho\omega$, donde $\rho = |x|$ y ω es un punto de la esfera unitaria $\mathbb{S}^{d-1} = \{x\in\mathbb{R}^d\colon |x| = 1\}$. Mostrar que para toda función medible no negativa se cumple
$$\int_{\mathbb{R}^d} f\,dx = \int_0^{\infty}\int_{\Theta} f(\rho\omega)g(\theta)\,d\theta\rho^{d-1}\,d\rho,$$
donde $\Theta = (0,\pi)\times\cdots\times(0,\pi)\times(0,2\pi)$.
La integral respecto de θ es una integral de superficie sobre la esfera unitaria $\mathbb{S}^{d-1}$ y se la denota usualmente como
$$\int_{\Theta} f(\rho\omega)g(\theta)\,d\theta = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\rho\omega)\,dS_\omega.$$

Ejercicio 3. Si f es integrable en $\mathbb{R}^d$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda x)\,dx = |\lambda|^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx.$$

Ejercicio 4. Sea $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ una matriz simétrica y sea $Q\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática asociada definida por $Q(x) = xAx^t$. Probar que la función $f(x) = e^{-Q(x)}$ es integrable en $\mathbb{R}^d$ si y sólo si todos los autovalores de A son positivos.

Probar, además, que en tal caso

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\, dx = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Ejercicio 5. Decimos que $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es una *función radial* si existe $\phi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \phi(|x|)$. Probar que existe una constante C que depende sólo de la dimensión d tal que para toda función radial f vale que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\, dx = C \int_0^\infty r^{d-1}\phi(r)\, dr.$$

Ejercicio 6. ¿Para qué valores de p es $|x|^p$ integrable en la bola unitaria? ¿Y en el complemento de la bola unitaria?

Ejercicio 7. Calcular

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{\frac{d+1}{2}}}.$$

Ejercicio 8. Se define la *función Gamma* a la función $\Gamma\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\, dt.$$

1. Probar que $0 < \Gamma(x) < \infty$ si $x > 0$.
2. Calcular $\Gamma(1)$.
3. Probar que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ para $x > 0$.
4. Concluir que si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Ejercicio 9. Se define la *función beta* a la función $\beta\colon (0,\infty)\times(0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt.$$

1. Probar que β es simétrica. Es decir $\beta(x,y) = \beta(y,x)$ para todo $x, y > 0$.
2. Probar que
$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$
donde $\Gamma(x)$ es la función Gamma definida en el ejercicio anterior.

Ejercicio 10. Demostrar que la integral biparamétrica

$$\int_0^1 x^{p-1}|\ln(x)|^{q-1}\, dx$$

es finita si $p, q > 0$ y expresar su valor en términos de la función Γ.

Sugerencia: Considere el cambio de variables $x = e^{-t}$.

Ejercicio 11. Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto boreliano tal que para cada $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$, $|\mathbf{v}| = 1$, el conjunto

$$A_{\mathbf{v}} = \{t \in \mathbb{R} \colon t\mathbf{v} \in A\}$$

tiene medida nula. Probar que A tiene medida nula.

Ejercicio 12. Sea M un conjunto convexo en $\mathbb{R}^d$. Probar que la frontera de M tiene medida nula y que M es medible.

Ejercicio 13.

1. Probar que
$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2}\,dx = \frac{C}{2}\Gamma(\tfrac{d}{2}),$$
donde C es una constante que depende sólo de la dimensión d y Γ es la función Gamma introducida en el ejercicio 8.
Sugerencia: usar un cambio de coordenadas polares.
2. Usando el ejercicio 4 concluir que
$$|B_1(0)| = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}.$$
Observar que $\lim_{d\to\infty} |B_1(0)| = 0$.