ANÁLISIS REAL - MEDIDA Y PROBABILIDAD

Primer Cuatrimestre 2024

Guía de problemas N° 4: El Teorema de Fubini

Ejercicio 1. Dado $E \subset \mathbb{R}^2$ medible, definimos las proyecciones de E a los conjuntos

$$E_x = \{y \in \mathbb{R} \colon (x, y) \in E\}, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$E_y = \{x \in \mathbb{R} \colon (x, y) \in E\}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

1. Probar que si $|E_x| = 0$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $|E| = 0$ y para casi todo $y \in \mathbb{R}$, $|E_y| = 0$.
2. Sea $f(x, y)$ una función medible y no negativa definida sobre $\mathbb{R}^2$. Supongamos que para casi todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x, y)$ es finita para casi todo y. Probar que para casi todo $y \in \mathbb{R}$, $f(x, y)$ es finita para casi todo x.

Ejercicio 2. Sean f y g funciones medibles definidas sobre $\mathbb{R}^d$ y $\mathbb{R}^k$ respectivamente. Probar que $h(x, y) = f(x)g(y)$ definida sobre $\mathbb{R}^{d+k}$ es medible. Deducir que si $E_1 \subset \mathbb{R}^d$ y $E_2 \subset \mathbb{R}^k$ son conjuntos medibles, entonces su producto cartesiano $E = E_1 \times E_2$ es medible en $\mathbb{R}^{d+k}$ y $|E| = |E_1||E_2|$.

Ejercicio 3. Sea $f \colon (0, 1) \to \mathbb{R}$ medible. Si $h \colon (0, 1) \times (0, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = f(x) - f(y)$ es integrable sobre $(0, 1) \times (0, 1)$, entonces f es integrable sobre $(0, 1)$.

Ejercicio 4. Notemos $I = [0, 1]$ y sea $E \subset I \times I$ tal que

$$|E_x|_e = |I \setminus E_y|_e = 0, \qquad \text{para todo } (x, y) \in I \times I.$$

Probar que E no es medible.

Ejercicio 5. Usar el Teorema de Fubini para probar la identidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Ejercicio 6. Sea f una función medible y no negativa definida sobre $E \subset \mathbb{R}^d$. Para cada $\alpha > 0$, se define

$$\omega(\alpha) = |\{x \in E \colon f(x) > \alpha\}|.$$

La función ω se llama *distribución de f sobre E*. Probar:

1. $\omega \colon (0, \infty) \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función decreciente.
2. $\omega(\alpha+) = \omega(\alpha)$, es decir, ω es continua a derecha.
3. $\omega(\alpha-) \geq |\{x \in E \colon f(x) \geq \alpha\}|$.
4. Si ω es continua en α, entonces $|\{x \in E \colon f(x) \geq \alpha\}| = |\{x \in E \colon f(x) > \alpha\}|$.
5. Para cada $\alpha \in (0, \infty)$, $\{x \colon (x, \alpha) \in R(f, E)\} = \{x \in E \colon f(x) \geq \alpha\}$.
6. $\int_E f\, dx = \int_0^\infty \omega(\alpha)\, d\alpha$.
   (Sug.: Notar que $\int_E f\, dx = |R(f, E)| = \iint_{R(f,E)} dx d\alpha$ y usar el Teorema de Tonelli.)
7. Para cada $p \in (0, \infty)$,
$$\int_E f^p\, dx = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \omega(\alpha)\, d\alpha.$$

Ejercicio 7. Dada $f \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ medible tal que para algún $\alpha \in (0, 1)$, vale la desigualdad $|f(t)| \leq t^\alpha / (1 + t)$ para todo $t \geq 0$, consideramos la función $G \colon [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, definida por $G(x, t) = e^{-xt} f(t)$. Demostrar que G es medible e integrable en $[0, \infty) \times [0, \infty)$.

Ejercicio 8. Definimos $k\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $k(x,y) = xy$. Probar que si $E \subset \mathbb{R}$ es medible entonces $k^{-1}(E)$ es medible. Deducir que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible, entonces $h(x,y) = f(xy)$ es medible.

Ejercicio 9. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos medibles. Probar que la función $h(x) = |(A-x) \cap B|$ es medible y $\int_{\mathbb{R}} h(x)dx = |A||B|$.

Ejercicio 10. Probar el Teorema de Fubini para funciones a valores complejos.

Ejercicio 11. Sea $f \in L(\mathbb{R}^d)$.

1. Probar que para cada $\xi \in \mathbb{R}^d$, la función $e^{-2\pi i \xi \cdot x} f(x)$, donde $\xi \cdot x = \sum_{i=1}^d \xi_i x_i$, es medible e integrable.

   Se define la *Transformada de Fourier de* f como:
$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i \xi \cdot x} f(x)\, dx.$$
2. Probar:
   a) $\hat{f}$ es acotada y uniformemente continua.
   b) $\lim_{|\xi| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0$ (Lema de Riemman–Lebesgue).
   c) Si $f(x) = f_1(x_1) \cdots f_d(x_d)$, donde cada $f_k \in L(\mathbb{R})$, $1 \leq k \leq d$, entonces $\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi_1) \cdots \hat{f}_d(\xi_d)$.
   d) Si $g \in L(\mathbb{R}^d)$, entonces $\widehat{(f * g)} = \hat{f}\hat{g}$.

Ejercicio 12. Sea $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ integrable y tal que $f(x) = 0$ para todo $x \notin [a,b]$. Se define
$$g(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt.$$
Probar que
$$\int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx.$$

Ejercicio 13. Sea $F \subset [a,b]$ un compacto ($a, b \in \mathbb{R}$) y $\lambda > 0$. Notamos con $\operatorname{dist}(x,F)$ a la distancia de un punto $x \in \mathbb{R}$ a F. Para $x \in [a,b]$, definimos
$$M_\lambda(x) = \int_a^b \frac{\operatorname{dist}(y,F)^\lambda}{|x-y|^{1+\lambda}}\, dy.$$
Probar que M_λ es medible e integrable sobre F. Probar además la estimación
$$\int_F M_\lambda(x)\, dx \leq \frac{2}{\lambda} |[a,b] \setminus F|.$$