Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Análisis Real - Medida y Probabilidad

Primer Cuatrimestre 2024

Guía de problemas N° 2: Funciones medibles

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{B}$ la $\sigma-$álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ y $f\colon \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$. Probar:

1. Si f es medible entonces $f^{-1}(B)$ es medible para todo $B \in \mathcal{B}$.
2. Si $\overline{\mathcal{B}} = \{E = B \cup A \colon B \in \mathcal{B} \text{ y } A \subset \{-\infty, \infty\}\}$ entonces, f es medible si y sólo si $f^{-1}(E)$ es medible para todo $E \in \overline{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 2. Sean $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles. Mostrar que los conjuntos $\{f > g\}$ y $\{f = g\}$ son medibles.

Ejercicio 3. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \colon f(x) = \alpha\}$ es medible, ¿es f medible?
2. Si $|f|$ es medible, ¿es f medible?

Ejercicio 4. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Probar que:

1. Si f es monótona, entonces f es medible Borel.
2. Si f es derivable, entonces f' es medible Borel.

Ejercicio 5. Si $f\colon \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible, entonces existe $g\colon \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ medible Borel tal que $f = g$ en casi todo punto.

Ejercicio 6. Sea $f\colon \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ continua en casi todo punto. Probar que f es medible.

Ejercicio 7.
1. Hallar $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en casi todo punto tal que no exista $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua que verifique que $f = g$ en casi todo punto.
2. Hallar $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que g sea continua, $g = f$ en casi todo punto y f sea discontinua en todo punto.

Ejercicio 8. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}^d$.

1. Sea $E \subset I$ medible. Probar que para cada $\varepsilon > 0$, existe $g\colon I \to \mathbb{R}$ continua tal que
$$|\{x \in I \colon g(x) \neq \chi_E(x)\}| < \varepsilon.$$
2. Sea φ una función simple definida sobre I. Probar que para cada $\varepsilon > 0$, existe $g\colon I \to \mathbb{R}$ continua tal que
$$|\{x \in I \colon g(x) \neq \varphi(x)\}| < \epsilon.$$
3. Sea $f\colon I \to \overline{\mathbb{R}}$ medible y finita en casi todo punto. Probar que dados $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, existe φ simple tal que
$$|\{x \in I \colon |\varphi(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| < \delta.$$
4. Sea f como en en ítem anterior. Probar que dados $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, existe g continua tal que
$$|\{x \in I \colon |g(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| < \delta.$$

Ejercicio 9. Sea E medible y $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k\colon E \to \mathbb{R}$, una sucesión de funciones medibles tales que para todo $x \in E$, existe $M_x \in (0, \infty)$ tal que
$$|f_k(x)| \leq M_x \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Probar que si para todo $\alpha > 0$, existe $k_0 = k_0(\alpha) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\{x \in E \colon |f_k(x)| < \alpha\}| \leq \frac{\alpha}{k}, \qquad \text{para todo } k \geq k_0,$$

entonces $|E| = 0$.

Ejercicio 10. Sea E de medida finita y $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k \colon E \to \mathbb{R}$, una sucesión de funciones medibles tal que para todo $x \in E$, existe $M_x \in (0, \infty)$ tal que

$$|f_k(x)| \leq M_x, \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Probar que dado $\varepsilon > 0$, existe $F \subset E$ cerrado y $M \in (0, \infty)$ tales que

$$|E \setminus F| < \varepsilon \quad \text{ y } \quad |f_k(x)| \leq M, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N} \text{ y para todo } x \in F.$$

Ejercicio 11. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = n\chi_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}(x)$. Probar:

1. La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente.
2. Para cada $\delta > 0$, la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en $[\delta, \infty)$.
3. No existe $E \subset [0, \infty)$ tal que $|E| = 0$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converja uniformemente en E^c.

Ejercicio 12.
1. Sea E de medida finita y sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \colon E \to \overline{\mathbb{R}}$, una sucesión de funciones medibles, finitas en casi todo punto de E y tales que $f_n \to f$ en casi todo punto de E cuando $n \to \infty$.

   Probar que existe una sucesión de conjuntos medibles de E, $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que:
   a) $|E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i| = 0$,
   b) para cada $i \in \mathbb{N}$, $f_n \rightrightarrows f$ uniformemente en E_i.
2. El mismo resultado vale si $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ donde A_k es de medida finita para cada $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 13. Sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y f funciones medibles definidas sobre un conjunto A y finitas en casi todo punto. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de A medibles, tales que $|A \setminus A_n| \to 0$ si $n \to \infty$. Probar que si $\chi_{A_n} f_n \overset{m}{\to} f$ entonces $f_n \overset{m}{\to} f$.

Ejercicio 14. Supongamos que $f_k \overset{m}{\to} f$ y $g_k \overset{m}{\to} g$ sobre E. Probar:

1. $f_k + g_k \overset{m}{\to} f + g$ sobre E.
2. Si $|E| < \infty$, entonces $f_k g_k \overset{m}{\to} fg$ sobre E. Mostrar que la hipótesis $|E| < \infty$, es necesaria.
3. Si $|E| < \infty$, $g_k \to g$ en casi todo punto de E y $g \neq 0$ en casi todo punto de E, entonces $f_k/g_k \overset{m}{\to} f/g$ sobre E.

Ejercicio 15. Sea $f_1 \colon [0, 1] \to [0, 1]$ la función de Cantor–Lebesgue y $f \colon [0, 1] \to [0, 2]$ definida por $f(x) = f_1(x) + x$. Probar:

1. f es continua y biyectiva. Además f^{-1} es continua.
2. Si $\mathcal{C}$ es el Ternario de Cantor, entonces $|f(\mathcal{C})| = 1$.
3. Sea $g = f^{-1}$. Mostrar que existe A medible tal que $g^{-1}(A)$ es no medible.
4. Mostrar que existe un conjunto medible que no es boreliano.
5. Hallar $h_1 \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ medible Borel y $h_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible tal que $h_2 \circ h_1$ no es medible.

Ejercicio 16. Si $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es semicontinua superior, o semicontinua inferior o continua, entonces f es medible borel.