Análisis Real - Medida y Probabilidad

Primer Cuatrimestre 2024

Guía de problemas N° 1: Medida de Lebesgue

Ejercicio 1. Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ medible y tal que $E = A \cup B$, donde $|B| = 0$. Probar que A es medible.

Ejercicio 2. Sea $E \subset A$ con $|A| = 0$. Probar que E es medible y que $|E| = 0$. Deducir que el cardinal de los conjuntos medibles es 2^c. ¿Cuál es el cardinal de los conjuntos no medibles?

Ejercicio 3. Dada un función $f\colon E \to F$ se define el gráfico de f como

$$G(f) = \{(x, f(x))\colon x \in E\} \subset E \times F.$$

1. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Probar su gráfico tiene medida cero.
2. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Probar que su gráfico también tiene medida cero.
3. ¿Qué sucede si f posee finitas discontinuidades?

Ejercicio 4. Si E_1 y E_2 son medibles, mostrar que

$$|E_1 \cup E_2| + |E_1 \cap E_2| = |E_1| + |E_2|.$$

Ejercicio 5. Sean $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ y $T\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ dada por $T(x) = x + \mathbf{v}$. Probar:

1. $|T(E)|_e = |E|_e$ para todo conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$.
2. Si E es medible entonces $T(E)$ resulta medible y $|T(E)| = |E|$.

Ejercicio 6. Sean $A \subset \mathbb{R}^d$ y $r > 0$. Definimos la dilatación de A al conjunto

$$r \cdot A = \{ra\colon a \in A\}.$$

Probar:

1. $|r \cdot A|_e = r^d |A|_e$.
2. Si A es medible entonces $r \cdot A$ es medible y $|r \cdot A| = r^d|A|$.

Ejercicio 7. Sea $B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^d\colon |x| < r\}$, la bola de centro $0 \in \mathbb{R}^d$ y radio $r > 0$.

1. Calcular $|B(0,r)|$ en términos de $\omega_d = |B(0,1)|$.
2. Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ medible. Probar que la función $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, dada por $f(r) = |A \cap B(0,r)|$ es continua.
3. Deducir que si A es medible, entonces para cada $s \in (0, |A|)$, existe $B \subset A$ medible tal que $|B| = s$.
4. Concluir que si $A \subset \mathbb{R}^d$ es medible y $0 < |A| < \infty$, entonces dado $n \in \mathbb{N}$, existen $\{A_j\}_{1 \le j \le n}$ subconjuntos disjuntos de A tales que $|A_j| = \frac{1}{n}|A|$ para todo $1 \le j \le n$.

Ejercicio 8. Sea $T\colon [0,1) \to [0,1)$ definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x < 1/2, \\ 2x - 1 & \text{si } 1/2 \le x < 1. \end{cases}$$

Probar que si $E \subset [0,1)$ es medible, entonces $T^{-1}(E)$ es medible y, además, $|T^{-1}(E)| = |E|$.

Ejercicio 9. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^d$ tales que $\operatorname{dist}(A,B) > 0$. Probar que

$$|A \cup B|_e = |A|_e + |B|_e.$$

Ejercicio 10. Dada una sucesión de conjuntos medibles $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, notamos

$$A_* = \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{y} \quad A^* = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Probar:

1. A_* y A^* son medibles.
2. $|A_*| \le \liminf_{n\to\infty} |A_n|$.
3. Si para algún $n\in\mathbb{N}$, $|\cup_{k=n}^{\infty} A_k| < \infty$, entonces $|A^*| \ge \limsup_{n\to\infty} |A_n|$.
4. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < \infty$, entonces $|A^*| = 0$.
5. ¿Qué pasa si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente? (Es decir si $A_n \subset A_{n+1}$). ¿Y si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente? (Es decir si $A_n \supset A_{n+1}$).

Ejercicio 11. Probar que cualquier conjunto con medida positiva tiene la potencia del continuo.

Ejercicio 12. Construir un subconjunto de $[0,1]$ de manera similar al conjunto de Cantor excepto que en el $k-$ésimo paso, cada intervalo que se extrae tiene longitud $\delta 3^{-k}$ con $0<\delta<1$. Probar que el conjunto obtenido es perfecto, tiene medida $1-\delta$ y no contiene intervalos.

Ejercicio 13. Sea E el conjunto de puntos del intervalo $(0,1)$ tal que $x\in E$ si y sólo si en el desarrollo decimal de x no aparece el dígito 7. Mostrar que E tiene medida de Lebesgue 0.

Ejercicio 14. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

1. E es medible.
2. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $F\subset E$ cerrado tal que $|E\setminus F|_e < \varepsilon$.
3. Existen H de clase $\mathcal{F}_\sigma$ y N de medida cero tales que $E = H\cup N$.

Ejercicio 15. Construya una sucesión de conjuntos $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ disjuntos dos a dos tal que $\left|\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right|_e < \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|_e$. (Sugerencia: considerar translaciones racionales de conjuntos de Vitali).

Ejercicio 16. Para cada $E\subset\mathbb{R}^d$ definimos su medida interior como

$$|E|_i = \sup\{|F|\colon F\subset E,\ F\text{cerrado}\}.$$

Probar:

1. $|E|_i \le |E|_e$.
2. Si E es medible entonces $|E|_i = |E|_e$.
3. Si $|E|_e < \infty$ y $|E|_i = |E|_e$, entonces E es medible.
4. Existe E no medible tal que $|E|_i = |E|_e$.
5. $E_1\subset E_2$ entonces $|E_1|_i \le |E_2|_i$.
6. $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son disjuntos dos a dos, entonces $|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n|_i \ge \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|_i$.

Ejercicio 17. Sea V un conjunto de Vitali. Probar que si E es medible y $E\subset V$ entonces $|E| = 0$. Concluir que $|V|_i = 0$.

Ejercicio 18. Construir una sucesión de conjuntos $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n|_i > \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|_i$. Sugerencia: considerar $V\subset[0,1]$ un conjunto de Vitali y $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una numeración de los racionales del $[-1,1]$. Si definimos $E_n = r_n + V$, entonces $[0,1]\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |E_n|_i = 0$.

Ejercicio 19. Sean $E\subset\mathbb{R}^d$ medible y $A\subset E$. Probar que

$$|E| = |A|_i + |E\setminus A|_e.$$

Ejercicio 20. Sea $Z\subset\mathbb{R}$ tal que $|Z| = 0$. Mostrar que $E = \{x^2\colon x\in Z\}$ tiene medida nula.

Ejercicio 21. Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ medible con $|E| > 0$. Probar que dado $\varepsilon > 0$, existe un intervalo I tal que $|E \cap I| > 0$ y $|I \setminus (E \cap I)| < \varepsilon$.

Ejercicio 22. Mostrar que existe un subconjunto H del intervalo $[0, 1]$ de clase $\mathcal{F}_\sigma$, de medida uno, formado solo por puntos irracionales.

Concluir que H es unión numerable de conjuntos cerrados de interior vacío.

Ejercicio 23. Sea $E \subset \mathbb{R}$ medible con la propidad de que si $x, y \in E$ entonces $\frac{x+y}{2} \notin E$. Probar que E tiene medida cero.

Sugerencia: Probar que si I es un intervalo centrado en un punto de E entonces $|E \cap I| \leq \frac{1}{2}|I|$.