Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Análisis Real - Medida y Probabilidad

Primer Cuatrimestre 2024

Guía de problemas N° 0: Preliminares

Ejercicio 1. Sean $\{X_i\}_{i\in I}$ y $\{Y_i\}_{j\in J}$ dos familias de conjuntos. Probar:

1. $\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} Y_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (X_i \cup Y_j)$.
2. $\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} Y_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (X_i \cap Y_j)$.
3. $\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \times \left(\bigcap_{j\in J} Y_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (X_i \times Y_j)$.
4. $\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} Y_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (X_i \times Y_j)$.
5. Si $I = J$ y para todo $i \in I$ se tiene que $Y_i \subset X_i$, entonces
$$\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right) \subset \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \quad \text{y} \quad \left(\bigcap_{i\in I} Y_i\right) \subset \left(\bigcap_{i\in I} X_i\right).$$
6. Si $A \subset I$ entonces
$$\left(\bigcup_{i\in A} X_i\right) \subset \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \quad \text{y} \quad \left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \subset \left(\bigcap_{i\in A} X_i\right).$$
7. Para cada conjunto F se tiene
$$F \setminus \bigcup_{i\in I} X_i = \bigcap_{i\in I} (F \setminus X_i) \quad \text{y} \quad F \setminus \bigcap_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I} (F \setminus X_i).$$
8. Encontrar conjuntos $A_{n,k}$ $(n, k \in \mathbb{N})$ tales que
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{n,k} \neq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{n,k}.$$

Ejercicio 2. Sean $(J_l)_{l\in L}$ y $(X_i)_{i\in I}$ dos familias de conjuntos tales que $I = \bigcup_{l\in L} J_l$. Probar que
$$\bigcup_{i\in I} X_i = \bigcup_{l\in L} \left(\bigcup_{i\in J_l} X_i\right) \quad \text{y} \quad \bigcap_{i\in I} X_i = \bigcap_{l\in L} \left(\bigcap_{i\in J_l} X_i\right).$$

Ejercicio 3. Si $A \times B = (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$ con $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = \emptyset$, $A_1 \times B_1 \neq \emptyset$ y $A_2 \times B_2 \neq \emptyset$ entonces
$$(A = A_1 = A_2 \text{ y } B = B_1 \cup B_2) \text{ ó } (A = A_1 \cup A_2 \text{ y } B_1 = B_2 = B).$$

Ejercicio 4. Sea $f\colon E \to F$ y $A, B \subset E$, $C \subset F$. Probar:

1. Si $A \subset B$, entonces $f(A) \subset f(B)$.
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

4. Si f es inyectiva, entonces $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
5. $A \subset f^{-1}(f(A))$ y $f(f^{-1}(C)) \subset C$.
6. Si f es inyectiva, entonces $f(E \setminus A) \subset F \setminus f(A)$.
7. Si f es suryectiva, entonces $f(E \setminus A) \supset F \setminus f(A)$.
8. $f^{-1}(F \setminus C) = E \setminus f^{-1}(C)$.

Ejercicio 5. Sea $f\colon E \to F$ y sean $\{X_i\}_{i\in I}$ e $\{Y_j\}_{j\in J}$ dos familias de subconjuntos de E y F respectivamente. Probar:

1. $f(\bigcup_{i\in I} X_i) = \bigcup_{i\in I} f(X_i)$.
2. $f(\bigcap_{i\in I} X_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(X_i)$.
3. si f es inyectiva $\Rightarrow f(\bigcap_{i\in I} X_i) = \bigcap_{i\in I} f(X_i)$.
4. $f^{-1}(\bigcap_{j\in J} Y_j) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$.
5. $f^{-1}(\bigcup_{j\in J} Y_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$.

Ejercicio 6. Dada una sucesión de subconjuntos de E, $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se definen

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} E_k \quad \text{y} \quad \limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} E_k$$

al límite inferior y superior de la sucesión $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ respectivamente. Probar:

1. $E \setminus \liminf_{n\to\infty} E_n = \limsup_{n\to\infty}(E \setminus E_n)$.
2. $E \setminus \limsup_{n\to\infty} E_n = \liminf_{n\to\infty}(E \setminus E_n)$.
3. $\liminf_{n\to\infty} E_n \subset \limsup_{n\to\infty} E_n$.

Ejercicio 7. Si $\liminf_{n\to\infty} E_n = \limsup_{n\to\infty} E_n$, decimos que existe el límite de la sucesión $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y a este conjunto se lo denota por $\lim_{n\to\infty} E_n$. Probar:

1. Si la sucesión $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, i.e. $E_{n+1} \subset E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces el límite existe y se tiene $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$.
2. Si la sucesión $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, i.e. $E_n \subset E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces el límite existe y se tiene $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.
3. Dada una sucesión de $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se define inductivamente la sucesión $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la forma
$$D_0 = \emptyset \quad \text{y} \quad D_{n+1} = D_n \bigtriangleup E_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$
Probar que existe $\lim_{n\to\infty} D_n$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} E_n = \emptyset$.

Ejercicio 8. Sea $X \neq \emptyset$ y sean $A, B \subset X$. Se define la función característica (o indicadora) del conjunto A a la función $\chi_A\colon X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Verificar las siguientes afirmaciones:

1. $A \subset B$ si y sólo si $\chi_A \leq \chi_B$.
2. $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$.
3. $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$.

Ejercicio 9. Sean $X \neq \emptyset$ y $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X y sea $f\colon X \to Y$. Probar:

1. $f(\liminf_{n\to\infty} E_n) \subset \liminf_{n\to\infty} f(E_n)$.
2. $f(\limsup_{n\to\infty} E_n) \subset \limsup_{n\to\infty} f(E_n)$.
3. Si f es inyectiva, vale la igualdad en los ítems anteriores.

Ejercicio 10. Sea E un conjunto y $f\colon \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ una función monótona con respecto a la inclusión. Es decir, si $A \subset B \subset E$, entonces $f(A) \subset f(B)$. Sean

$$V = \bigcap \{Z \subset E\colon f(Z) \subset Z\} \quad \text{y} \quad W = \bigcup \{Z \subset E\colon f(Z) \supset Z\}.$$

Probar que:

1. $f(V) = V$ y $f(W) = W$.
2. Si $A \subset E$ es tal que $f(A) = A$, entonces $V \subset A \subset W$.