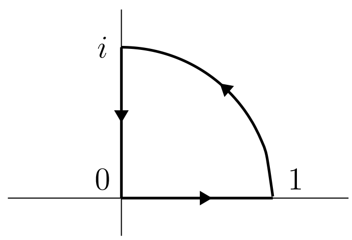
Análisis Complejo

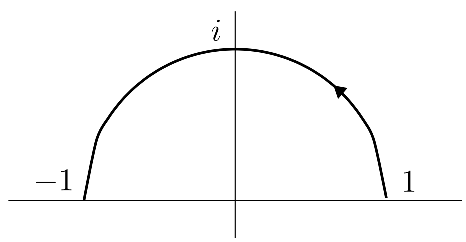
Práctica N°5.

1. Dados $n, m \in \mathbb{N}$ calcular $\int_\gamma z^n \overline{z}^m \, \mathrm{d}z$ para $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = re^{it}$ con $r > 0$ constante.

2. Calcular $\int_\gamma |z|^2 z \, \mathrm{d}z$ para la siguiente curva γ:



3. Sea γ la curva:



Demostrar que
$$\left| \int_\gamma \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2} \, \mathrm{d}z \right| \leq \pi \frac{1+e}{2}.$$

4. Sea $\gamma_r : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma_r(t) = re^{it}$. Probar que $\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} \, \mathrm{d}z = 0$.

5. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(z_1), \mathrm{Re}(z_2) \leq 0$ mostrar que $|e^{z_1} - e^{z_2}| \leq |z_1 - z_2|$.

6. Calcular $\int_\gamma \cos(z) \, \mathrm{d}z$ para las curvas γ de los ejercicios1 y3.

7. Sean $r > 0$, $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $|b - a| \neq r$ y $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = a + re^{it}$.

   (a) Calcular $\int_\gamma (z - b)^n \, \mathrm{d}z$ si n es un entero distinto de -1.

   (b) Probar que si $|b - a| < r$, entonces $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-b} = 2\pi i$.

   (c) Probar que si $|b - a| > r$, entonces $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-b} = 0$.

8. Sea γ la curva cuya imagen es la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ parametrizada por $\gamma(t)=a\cos t+ib$ $sen\,t$ con $0\leq t\leq 2\pi$. Calcular $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}$ y deducir que $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a^2\cos^2 t+b^2\mathrm{sen}^2 t}=\frac{2\pi}{ab}$.

9. Calcular:

   (a) $\int_\gamma \frac{e^z}{z-2}\,\mathrm{d}z, \quad \gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ dada por $\gamma(t)=4e^{it}$,

   (b) $\int_\gamma \frac{z}{z+1}\,\mathrm{d}z, \quad \gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ dada por $\gamma(t)=1+e^{ikt} \quad (k\in\mathbb{Z})$,

   (c) $\int_\gamma \frac{\mathrm{sen} z}{z^3}\,\mathrm{d}z, \quad \gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ dada por $\gamma(t)=e^{it}$,

   (d) $\int_\gamma \frac{\log(1+z)}{(z-\frac{1}{2})^3}\,\mathrm{d}z, \quad \gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ dada por $\gamma(t)=\frac{2}{3}e^{it}$,

   (e) $\int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{(z^2-1)^2}\,\mathrm{d}z, \quad \gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ dada por $\gamma(t)=1+e^{ikt} \quad (k\in\mathbb{Z})$.

10. Hallar los términos de orden ≤ 3 en el desarrollo en serie de potencias de las siguientes funciones (extendiendo su definición a 0 por continuidad en los casos en los que sea necesario):

$$\text{(i)}\quad e^z\mathrm{sen} z, \qquad \text{(ii)}\quad \mathrm{sen} z\cos z, \qquad \text{(iii)}\quad \frac{e^z-1}{z},$$

$$\text{(iv)}\quad \frac{e^z-\cos z}{z}, \qquad \text{(v)}\quad \frac{1}{\cos z}, \qquad \text{(vi)}\quad \frac{\mathrm{sen} z}{\cos z}.$$

11. Sea $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $|f(z)|<|z|^n$ para algún $n\in\mathbb{N}$ y para $|z|$ suficientemente grande. Probar que f es un polinomio de grado a lo sumo n.

12. Sea $f:\Omega\to\mathbb{C}$ continua en Ω y holomorfa en $\Omega\setminus I$, siendo I un segmento. Probar que f es holomorfa. *(Sugerencia: Usar el teorema de Morera.)*

13. Sean Ω un abierto simplemente conexo, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ holomorfa y tal que $f(z)\neq 0$ para todo $z\in\Omega$. Sean $z_0\in\Omega$ y $w_0\in\mathbb{C}$ tales que $e^{w_0}=f(z_0)$.

    (a) Demostrar que existe una función holomorfa $g:\Omega\to\mathbb{C}$ tal que $f(z)=e^{g(z)}$ para todo $z\in\Omega$ y $g(z_0)=w_0$. *(Sugerencia: estudiar la función $\frac{f'}{f}$.)*

    (b) Demostrar que tal g es única.

    (c) Mostrar con un ejemplo que en las condiciones del ítem (a), $z_1,z_2\in\Omega$, $f(z_1)=f(z_2)$ no implica $g(z_1)=g(z_2)$.

    (d) Es necesaria la hipótesis de "simplemente conexo" en el ítem (a)?

14. Sean $\Omega\subset\mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo y $f,g:\Omega\to\mathbb{C}$ funciones holomorfas. Probar que $f^2(z)+g^2(z)=1$ para todo $z\in\Omega$ si y sólo si existe una función $h:\Omega\to\mathbb{C}$ holomorfa tal que $f(z)=\cos(h(z))$ y $g(z)=\mathrm{sen}(h(z))$.