Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Análisis Complejo

Práctica N°4.

1. Demostrar la siguiente identidad
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 2.$$
(*Sugerencia: derivar la función* $f(z) = \frac{1}{1-z}$ *con* $|z| < 1$.)

2. Dado $\alpha \in \mathbb{C}$ consideramos la serie de potencias
$$f_\alpha(z) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$
donde $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}$. Probar f_α es holomorfa en $|z| < 1$ y mostrar que
$$f'_\alpha(z) = \frac{\alpha f_\alpha(z)}{1+z}$$
$$f_\alpha(z) f_\beta(z) = f_{\alpha+\beta}(z)$$
se cumple para todo $|z| < 1$.

3. (a) Hallar todas las $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ tales que $f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Hallar todas las f enteras tales que $f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Demostrar que si Ω es un abierto conexo del plano complejo, f y g son analíticas en Ω y $\overline{f}g$ es analítica en Ω, entonces $g \equiv 0$ o f es constante.

5. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo simétrico con respecto a $\mathbb{R}$ tal que $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica tal que para todo $z \in \Omega \cap \mathbb{R}$ vale que $f(z) \in \mathbb{R}$. Probar que para todo $z \in \Omega$ vale que
$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}.$$

6. Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, f(z) = \cos\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$. Verificar que los ceros de f son los puntos de la forma $z_n = \frac{n\pi-2}{n\pi+2}$ con n impar, que f es analítica en $\mathbb{D}$ y que los ceros de f tienen un punto de acumulación. ¿Es $f \equiv 0$ en $\mathbb{D}$? ¿Contradice esto el teorema de los ceros aislados?

7. Hallar todas las funciones enteras f tales que $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 5$.

8. Sea f entera tal que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Probar que $f(z) = \alpha z^n$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y donde $\alpha \in \mathbb{C}$ es una constante.

9. Sea f entera tal que existen dos números complejos, z_0 y z_1, $\mathbb{R}$-linealmente independientes, tales que $f(z+z_0) = f(z)$ y $f(z+z_1) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Probar que f es constante.

10. Sea $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polinomio no constante. Probar que la imagen de p es $\mathbb{C}$.

11. Sean $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \partial\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$. Probar que existe un punto $P \in \partial\mathbb{D}$ tal que el producto de las longitudes de los segmentos $\overline{PP_1}, \ldots, \overline{PP_n}$ es mayor a 1.

12. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo con $\overline{\Omega}$ compacto y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ continua, analítica en Ω y no constante tal que $|f(z)|$ es constante en $z \in \partial\overline{\Omega}$. Probar que existe $z \in \Omega$ tal que $f(z) = 0$.

13. Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analítica tal que $f(0) = 0$. Mostar que la serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(z^n)$$
converge para todo $z \in \mathbb{D}$.

14. Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analítica tal que $f(0) = 0$ y $f(1/2) = 1/2$. Mostrar que $f(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

15. Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analítica y $d = \sup_{z,w\in\mathbb{D}} |f(z) - f(w)|$ el diámetro de su imagen. Mostrar que $2|f'(0)| \leq d$.