Análisis Complejo

Práctica N°3.

1. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| < 1$.

   (a) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n$.

   (b) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \big(1 + \alpha + \cdots + \alpha^n\big)$.

2. Calcular, en caso de que existan, los límites de las siguientes sucesiones:

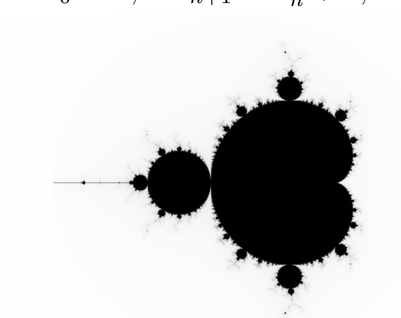
   (i) $\frac{1}{n} i^n$, (ii) $n\big(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\big)^n$, (iii) $\cos(n\pi) + i\frac{\operatorname{sen}(\frac{n}{2})}{n^2}$,

   (iv) $\big(\frac{1+2i^n}{3}\big)^n$, (v) $n\big(\frac{1+i}{2}\big)^n$.

3. Se define el *conjunto de Mandelbrot* como el conjunto $\mathcal{M}$ de los $z \in \mathbb{C}$ tales que la sucesión recursiva definida por:

$$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = z_n^2 + z,$$

   resulta acotada.



   Demostrar que $\mathcal{M} \subset \{|z| \leq 2\}$.

4. Estudiar la convergencia de la serie cuyo término general es el siguiente:

   (i) $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$, (ii) $a_n = \frac{n}{2n^2+3}$, (iii) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+5}}$,

   (iv) $a_n = \log\big(1 + \frac{1}{n}\big)$, (v) $a_n = \operatorname{sen}\big(\frac{1}{n^2}\big)$.

5. Demostrar que la serie de término general $a_n = \frac{1}{n^p \log(n)^q}$, $n \geq 2$,

   (i) converge si $q > 0$ y $p > 1$, (ii) converge si $q > 1$ y $p = 1$,

   (iii) diverge si $q > 0$ si $p < 1$, (iv) diverge si $0 < q \leq 1$ y $p = 1$.

6. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series de potencia:

   (i) $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^3 4^n} z^n$, (ii) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(1+2i)^n}{n^n} z^n$, (iii) $\sum_{n=0}^\infty (\frac{1}{2})^{n^2} z^n$,

   (iv) $\sum_{n=0}^\infty 4^{n^2} z^n$, (v) $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2^n} z^{n^2}$, (vi) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n!}{n^n} z^n$.

7. Sea $k \in \mathbb{N}$. Probar que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n^k z^n$ tienen el mismo radio de convergencia.

8. Sean $(a_n)_{n\geq 0}$ y $(z_n)_{n\geq 0}$ sucesiones de números complejos.

   (a) **Criterio de Dedekind.** Demostrar que si $\lim a_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ converge absolutamente y las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ están acotadas, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n$ converge.

   (b) **Criterio de Bois-Reymond.** Demostrar que si $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ converge absolutamente y $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge.

   (c) **Criterio de Dirichlet**. Deducir de (a) que si (a_n) es una sucesión de números reales no negativos que tiende decrecientemente a cero y las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ están acotadas, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge.

9. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series y estudiar el comportamiento en el borde del disco de convergencia:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$,	(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} z^n$,	(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} z^n$,
(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} z^n$,	(v) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^n} z^n$,	(vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2-i)n^2} z^n$,
(vii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+(1+i)^n} z^n$,	(viii) $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^{n^2}$,	(ix) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$,
(x) $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen} n\, z^n$,	(xi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} z^{n(n+1)}$.	

10. Hallar los valores de $z \in \mathbb{C}$ para los cuales las siguientes series resultan convergentes:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$,	(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\lvert z\rvert}$,	(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\lvert z\rvert}$,
(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{nz^n}$,	(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n^2}$,	(vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n+1}$.

11. Sea $m \in \mathbb{N}$. Demostrar que los conjuntos de convergencia de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n} z^n$ son iguales.

12. Sea $f(z) = \sum_n a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $\rho > 0$.

   (a) Demostrar que $f(-z) = f(z)$ para todo z con $|z| < \rho$ si y solo si $a_n = 0$ para todo n impar.

   (b) Demostrar que $f(-z) = -f(z)$ para todo z con $|z| < \rho$ si y solo si $a_n = 0$ para todo n par.

13. La *sucesión de Fibonacci* se define recursivamente por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 2$.

   (a) Probar que $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia positivo, y la función $R(z)$ es una función racional. Hallar una fórmula explícita para $R(z)$.

(b) Descomponiendo $R(z)$ en fracciones simples y usando la suma de la serie geométrica, obtener un nuevo desarrollo de $R(z)$ en serie de potencias.

(c) Comparar ambos desarrollos y obtener una fórmula cerrada para el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci.