Álgebra II

Primer cuatrimestre - 2024
Práctica 4
Anillos

Ejemplos y construcciones

1. Probar que los siguientes conjuntos son anillos con las operaciones indicadas. Decidir en cada caso si son conmutativos, íntegros, de división, cuerpos, etc.
   (a) $M_8(\mathbb{R})$ con el producto y la suma de matrices.
   (b) $\mathbb{Z}_{12}[X]$ con el producto usual de polinomios.
   (c) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ donde $d \in \mathbb{Z}$ es libre de cuadrados, con la suma y el producto de números complejos.
   (d) $\mathcal{C}^6[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid$ las primeras 6 derivadas de f existen y son continuas$\}$, con la suma y el producto usual de funciones.
   (e) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$, con el producto y la suma de matrices.
   (f) Dado un espacio métrico (X, d), el conjunto $\mathcal{B}(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ es acotada}\}$.

2. Si A es un grupo abeliano entonces $\operatorname{End} A$, el conjunto de endomorfismos de grupo de A, es un anillo con la suma habitual de funciones y la composición como producto. Encontrar descripciones explícitas para este anillo cuando A es $\mathbb{Z}^n$ o $\mathbb{Z}_n$.

3. (a) Sean A un anillo y $\mathcal{C}$ una familia de subanillos de A. Muestre que $B = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ es un subanillo de A.
   (b) Sean A un anillo, $B \subset A$ un subanillo y $X \subset A$. Mostrar que existe un subanillo $B[X]$ de A que contiene a X y a B y tal que cualquier otro subanillo de A que contiene a B y a X contiene a $B[X]$.
   (c) Sea η una raíz primitiva sexta de la unidad y ω una raíz primitiva p-ésima de la unidad, donde p es algún número primo. Describir explícitamente $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{5}]$, $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\eta]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{6}, \sqrt{p}]$ y $\mathbb{Z}[\omega]$ como subanillos de $\mathbb{C}$.

4. (**Anillos de matrices**) Sea A un anillo.
   (a) Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que el conjunto de matrices $M_n(A)$ con coeficientes en A es un anillo con respecto a las operaciones usuales de suma y producto de matrices. Si $n > 1$, entonces $M_n(A)$ no es conmutativo.
   (b) Sea $M_\infty(A) = \{f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A\}$. Decimos que un elemento $f \in M_\infty(A)$ tiene *filas finitas* si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $k(n) \in \mathbb{N}$ tal que $f(n,m) = 0$ si $m > k(n)$; de manera similar, decimos que $f \in M_\infty(A)$ tiene *columnas finitas* si para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $k(m) \in \mathbb{N}$ tal que $f(n,m) = 0$ si $n > k(m)$.
   Sean $M^f_\infty(A)$ y $M^c_\infty(A)$ los subconjuntos de $M_\infty(A)$ de matrices con filas finitas y con columnas finitas, respectivamente, y sea $M^{fc}_\infty(A) = M^f_\infty(A) \cap M^c_\infty(A)$. Mostrar que $M^f_\infty(A)$, $M^c_\infty(A)$ y $M^{fc}_\infty(A)$ son anillos con el producto dado por
$$f \cdot g(n,m) = \sum_{k=1}^{\infty} f(n,k)g(k,m).$$

5. (**Anillos de funciones**)

   (a) Sea A un anillo y X un conjunto no vacío. Sea A^X el conjunto de todas las funciones $X \to A$. Se definen operaciones $+, \cdot : A^X \times A^X \to A^X$ de la siguiente manera: dadas $f, g \in A^X$

   $$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{para todo } x \in X,$$

   y

   $$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) \qquad \text{para todo } x \in X.$$

   Mostrar que $(A^X, +, \cdot)$ es un anillo. ¿Cuándo es conmutativo?

   (b) Sean $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ y sea $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con derivadas parciales de orden k continuas. Muestre que se trata de un subanillo de $\mathbb{R}^{(\mathbb{R}^n)}$.

6. (**Anillos de series formales**) Sea A un anillo.

   (a) Sea $S = \{f : \mathbb{N}_0 \to A\}$ el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{N}_0$ a A. Definimos operaciones $+, \cdot : S \times S \to S$ de la siguiente manera: para cada $f, g \in S$ y cada $n \in \mathbb{N}_0$,

   $$(f+g)(n) = f(n) + g(n)$$

   y

   $$(f \cdot g)(n) = \sum_{\substack{k,l \geqslant 0 \\ k+l=n}} f(k)g(l).$$

   Muestre que $(S, +, \cdot)$ es un anillo.

   Sea X una variable formal. Podemos representar a una función $f \in S$ por una serie

   $$f = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)X^n.$$

   Usando esta notación, las definiciones de la suma y el producto de S imitan formalmente a las correspondientes operaciones con las series. Llamamos a S el *anillo de series formales de potencias con coeficientes en* A, y lo notamos $A[\![X]\!]$.

   (b) Pruebe que la función representada por la serie $1 - X$ es inversible en $A[\![X]\!]$.

   (c) Tomamos ahora $A = \mathbb{R}$ y sea $\mathbb{R}\{X\} \subset \mathbb{R}[\![X]\!]$ el subconjunto de las series formales que tienen radio de convergencia positivo. Mostrar que se trata de un subanillo.

7. Un cuadrado mágico es una matriz cuadrada con entradas enteras, tal que la suma de los elementos de cualquier fila o columna es igual a la suma de los elementos de cualquier otra fila o columna. Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$ los cuadrados mágicos de tamaño n forman un subanillo de $M_n(\mathbb{R})$.

8. (**Idempotentes**) Sea A un anillo. Un elemento $e \in A$ es *idempotente* si $e^2 = e$. Probar las siguientes afirmaciones.

   (a) Si $e \in A$ es idempotente, el subconjunto eAe con las operaciones de A restringidas es un anillo. Se trata de un subanillo de A si y solo si $e = 1$.

   (b) Si $e \in A$ es idempotente, entonces $1 - e$ también lo es.

9. (**Anillos booleanos**) Un anillo A es *booleano* si todos sus elementos son idempotentes.

   (a) Sea X un conjunto. Mostrar que $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ es un anillo booleano. Aquí $\triangle$ es la operación diferencia simétrica.

   (b) Probar que un anillo booleano es conmutativo.

10. Sea A un anillo. Probar las siguientes afirmaciones.

    (a) Si cada elemento de A tiene inverso a izquierda entonces A es un anillo de división.

    (b) Si $a \in A$ es un elemento inversible a izquierda y que no divide a 0 por la derecha, entonces a es inversible.

    (c) Sea $a \in A$. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que a^n es inversible, entonces a es inversible.

11. Sea A un anillo posiblemente sin unidad. Muestre que si A posee una única unidad a izquierda e, entonces A posee una unidad.

    Sugerencia: Sea $a \in A$ y considere para cada $c \in A$ el elemento $(e - ae + a)c$.

Álgebras sobre cuerpos

En esta sección $\Bbbk$ es un cuerpo.

12. Sea A una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita.

    (a) Probar que A es isomorfa a una subálgebra de $M_n(\Bbbk)$, con $n = \dim A$.

    (b) Probar que si A es íntegra entonces es un álgebra de división.

13. Sea $\Bbbk$ algebraicamente cerrado.

    (a) Probar que no existen $\Bbbk$-álgebras de dimensión finita que no tengan divisores de cero.

    (b) Describir a menos de isomorfismo todas las $\Bbbk$-álgebras de dimensión a lo sumo 3.

Morfismos, ideales y cocientes

En toda esta sección A es un anillo.

14. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morfismo de anillos. Pruebe las siguientes afirmaciones.

    (a) $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$, y de hecho $f|_{\mathbb{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$.

    (b) La aplicación f es estrictamente creciente.

    Concluya que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

15. Sea $\Bbbk$ un cuerpo. Decidir en cada caso si existe un morfismo de anillos $f : A \to B$:

    (a) $A = \mathbb{Z}[i]$ y $B = \mathbb{R}$;

    (b) $A = B = \mathbb{Z}[i]$;

    (c) $A = B = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$;

    (d) $A = B = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$;

    (e) $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ y $B = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$;

(f) $A = \Bbbk$ y $B = M_n(\Bbbk)$;

(g) $A = M_n(\Bbbk)$ y $B = \Bbbk$.

16. Sea $n \in \mathbb{N}$ compuesto. ¿Existe algún producto $\cdot : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ que haga del grupo abeliano $\mathbb{Z}_n$ un cuerpo?

17. Sea $\mathcal{I}$ una familia de ideales a izquierda (a derecha, biláteros) de A.

    (a) Muestre que $\bigcap_{I \in \mathcal{I}} I$ es un ideal a izquierda (a derecha, bilatéro) de A. Se trata del ideal más grande contenido en todos los ideales de $\mathcal{I}$.

    (b) Muestre que $\sum_{I \in \mathcal{I}} I$ es un ideal a izquierda (a derecha, bilátero) de A. Se trata del ideal más chico que contiene a todos los ideales de $\mathcal{I}$.

18. Sean A un anillo e $I \subset A$ un ideal bilátero.

    (a) Sea J el ideal generado por I en $A[X]$. Muestre que $A[X]/J \cong (A/I)[X]$.

    (b) Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $M_n(I) \subset M_n(A)$ el subconjunto de las matrices de $M_n(A)$ que tienen todos sus coeficientes en I. Mostrar que $M_n(I)$ es un ideal bilátero de $M_n(A)$ y que $M_n(A)/M_n(I) \cong M_n(A/I)$.

19. Sea $\Bbbk$ un cuerpo.

    (a) Encuentre todos los ideales a izquierda de $M_n(\Bbbk)$.

    (b) Muestre que $M_n(\Bbbk)$ es simple.

    (c) Sean ahora A un anillo y $n \in \mathbb{N}$. Si $J \subset M_n(A)$ es un ideal bilátero, pruebe que existe un ideal bilátero $I \subset A$ tal que $J = M_n(I)$.
    Sugerencia: Tomar $I = \{a \in A \mid a = m_{1,1}$ para alguna matriz $M \in J\}$.

20. Sea $\Bbbk$ un cuerpo. Sean G un grupo y $H \triangleleft G$ un subgrupo normal, y consideremos la proyección canónica $\pi : G \to G/H$. Muestre que π determina un morfismo sobreyectivo de anillos $\Bbbk[\pi] : \Bbbk[G] \to \Bbbk[G/H]$. Describa el núcleo de $\Bbbk[\pi]$.