

Álgebra II
Primer cuatrimestre - 2024
Práctica 3
Grupos – Tercera parte

Acciones

1.1. Sean G un grupo finito, H y K dos subgrupos de G , y $X = HK$.

- (I) Probar que la siguiente fórmula $(h, k) \cdot x = h x k^{-1}$ define una acción de $H \times K$ en X .
- (II) Probar que la acción es transitiva y que el estabilizador de 1 es isomorfo a $H \cap K$.
- (III) Deducir de lo anterior que $|H||K| = |HK||H \cap K|$.

1.2. Sea p un primo y $V = \mathbb{F}_p^2$. Consideramos el conjunto $X = V \setminus \{0\}$.

- (I) Probar que hay una acción transitiva de $GL_2(\mathbb{F}_p)$ sobre V dada por la multiplicación de matrices $A \cdot v := Av$.
- (II) Calcular el estabilizador de $(1, 0)$.
- (III) Probar que $|GL_2(\mathbb{F}_p)| = (p^2 - 1)(p^2 - p)$.

1.3. Sea G un grupo finito y H un subgrupo propio.

- (I) Pruebe que la regla $g \cdot xH := gxH$ define una acción de G en G/H . Deduzca que la asignación

$$\rho: G \rightarrow S(G/H), \quad \rho(g)(xH) = gxH$$

es un morfismo de grupos. Notaremos $K := \ker(\rho)$ e $I := \text{im}(\rho)$

- (II) Pruebe que $|K|$ divide a $|H|$ e $|I|$ divide a $[G : H]!$.
- (III) Pruebe que si el índice de H es el menor primo que divide al orden de G , entonces $[G : K] = [G : H]$ y $H = K$. En particular H es normal en G .
- (IV) Pruebe que si G es simple, entonces $|G| \mid [G : H]!$.

1.4 (Lema de Burnside). Sea G un grupo finito actuando sobre un conjunto finito X . Denotamos por $X/G = \{\mathcal{O}_x : x \in X\}$ al conjunto de órbitas de la acción y $X^g := \{x \in X : g \cdot x = x\}$ el conjunto de puntos fijos por un elemento $g \in G$.

- (I) Probar que

$$\sum_{g \in G} |X^g| = |\{(g, x) \in G \times X \mid g \cdot x = x\}| = \sum_{x \in X} |G_x|.$$

- (II) Probar que $\sum_{x \in X} \frac{1}{|\mathcal{O}_x|} = |X/G|$.
- (III) Concluir que la cantidad de órbitas es igual al promedio de los puntos fijos:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

- (IV) Deducir que $|X/G| \geq |X|/|G|$ y la igualdad se tiene si y sólo si ningún elemento (no trivial) de G tiene puntos fijos.

Producto directo y producto semidirecto

2.1. Dados G y H dos grupos, determinar $Z(G \times H)$.

2.2 (Producto directo interno). Sea G un grupo.

(i) Sean N y M dos subgrupos normales de G y supongamos que $N \cap M = 1$ y $G = NM$. Mostrar que entonces es $G \cong N \times M$.

(ii) Supongamos que G es grupo finito de orden mn con $(m, n) = 1$. Mostrar que si G posee exactamente un subgrupo N de orden n y exactamente un subgrupo M de orden m , entonces G es isomorfo al producto directo de N y M .

2.3 (Teorema chino del resto). Probar que si m y n son números naturales coprimos, entonces $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$. Deducir que si p_1, \dots, p_k son primos distintos dos a dos y $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$, entonces $\mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}} \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}$.

2.4. Probar que $\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{R}_{>0} \times S^1$.

2.5. Probar que $\mathbb{D}_6 \cong S_3 \times \mathbb{Z}_2$.

2.6. Sean $f : H \rightarrow H'$ y $g : K \rightarrow K'$ dos morfismos de grupos. Probar que la función $f \times g : H \times K \rightarrow H' \times K'$ definida por $(h, k) \mapsto (f(h), g(k))$ es un morfismo de grupos.

2.7. Encontrar un isomorfismo entre el grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ y un subgrupo de A_4 . Probar que este subgrupo es normal en A_4 y describir el cociente.

2.8. Sean H y K dos grupos y sean $S \trianglelefteq H$ y $T \trianglelefteq K$ dos subgrupos normales. Probar que $S \times T \trianglelefteq H \times K$ y que

$$\frac{H \times K}{S \times T} \cong (H/S) \times (K/T).$$

2.9. Sean G, H y W grupos y $u : G \rightarrow W, v : H \rightarrow W$ dos homomorfismos de grupos. Probar que la aplicación $(u, v) : (g, h) \in G \times H \mapsto u(g)v(h) \in W$ es un homomorfismo de grupos si y sólo si todo elemento de $u(G)$ conmuta con todo elemento de $v(H)$.

2.10 (Producto semidirecto). Sean G y N dos grupos y $\theta : G \rightarrow \text{Aut}(N)$ un morfismo de grupos. Sea $K = N \rtimes G$ y consideremos el producto en K dado por

$$(n, g) \cdot (n', g') = (n\theta(g)(n'), gg'), \quad \forall (n, g), (n', g') \in K.$$

Mostrar que con respecto a este producto K es un grupo, el cual llamamos *producto semidirecto (o cruzado)* de N por G con respecto a θ . Lo notamos $N \rtimes_\theta G$.

(i) Probar que $\iota : N \rightarrow N \rtimes_\theta G, n \mapsto (n, 1)$ y $\pi : N \rtimes_\theta G \rightarrow G, (n, g) \mapsto g$ son morfismos de grupos.

(ii) Probar que $N \rtimes_\theta G$ es abeliano si y sólo si $\theta = 1$ y tanto N como G son abelianos, en cuyo caso $N \rtimes_\theta G = N \times G$.

2.11 (Producto semidirecto interno). Sea K un grupo y sean G y N subgrupos de K con N normal en K . Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $K = NG$ y $N \cap G = \{1\}$;

(ii) $K = GN$ y $N \cap G = \{1\}$;

- (III) Todo elemento de K puede escribirse de forma única como un producto de un elemento de N por uno de G ;
- (IV) Todo elemento de K puede escribirse de forma única como un producto de un elemento de G por uno de N .
- (V) La composición de la inclusión $G \hookrightarrow K$ con la proyección canónica $K \rightarrow K/N$ es un isomorfismo.
- (VI) Existe un homomorfismo $\sigma : K \rightarrow G$ que se restringe a la identidad de G y cuyo núcleo es N .

Probar además que, cuando estas afirmaciones valen, existen un homomorfismo de grupos $\theta : G \rightarrow \text{Aut}(N)$ y un isomorfismo de grupos $\xi : N \rtimes_{\theta} G \rightarrow K$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 N & \xrightarrow{\iota} & N \rtimes_{\theta} G & \xrightarrow{\pi} & G \\
 \parallel & & \downarrow \xi & & \downarrow \sim \\
 N & \hookrightarrow & K & \twoheadrightarrow & K/N
 \end{array}$$

- 2.12. Encuentre un morfismo $\theta : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_3)$ tal que $S_3 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}_2$.
- 2.13. Encuentre un morfismo $\theta : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(A_n)$ tal que $S_n \cong A_n \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}_2$.
- 2.14. Mostrar que \mathbb{H} no puede ser escrito como un producto semidirecto de forma no trivial.
- 2.15. Probar que $GL_n(k)$ es un producto semidirecto de $SL_n(k)$ y k^{\times} .
- 2.16. Consideremos el grupo

$$G = \{M \in GL_2(\mathbb{C}) : M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{C}\}$$

formado por las matrices triangulares superiores de 2×2 , con la operación usual de multiplicación de matrices. Probar que los conjuntos $D \subseteq G$ y $N \subseteq G$ dados por

$$D = \{M \in GL_2(\mathbb{C}) : M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{C}\}$$

$$N = \{M \in GL_2(\mathbb{C}) : M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{C}\}$$

son subgrupos de G y que $G \simeq N \rtimes_{\theta} D$. Probar que G/N es abeliano y calcular $[G, G]$.

Teoremas de Sylow y clasificación de grupos finitos

- 3.1. Mostrar que no hay grupos simples de orden 28 o 312.
- 3.2. Caracterizar todos los grupos de orden pq con p y q dos primos distintos y probar que ninguno de ellos es simple.
- 3.3. Sea G un grupo de orden $p^r m$ con p primo, $r \geq 1$ y $p > m$. Probar que G no es simple.
- 3.4. Mostrar que un grupo de orden 12 o 56 no es simple
- 3.5. Caracterizar los grupos de orden $p^2 q$ con p y q primos distintos y probar que ninguno de ellos es simple.

3.6. Mostrar que un grupo no abeliano de orden menor que 60 no es simple.

3.7. Probar que todo grupo de orden $5 \cdot 7 \cdot 17$ es cíclico.

3.8. Probar que si todos los subgrupos de Sylow de un grupo finito G son normales, entonces G es el producto directo de sus subgrupos de Sylow. Observar que en particular esto ocurre cuando G es abeliano.

3.9. Caracterice todos los grupos abelianos de orden finito y libre de cuadrados.

Presentaciones

4.1. Caracterizar los siguientes grupos dados por generadores y relaciones:

(I) $\langle x \mid x \rangle$;

(II) $\langle x \mid x^n \rangle$;

(III) $\langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle$;

(IV) $\langle x, y \mid x^n, xyx^{-1}y^{-1} \rangle$;

(V) $\langle x, y \mid x^2, y^4, xyxy \rangle$;

(VI) $\langle x, y \mid xyxyxyxy \rangle$;

(VII) $\langle a, b \mid a^4, abab^{-1}, a^2b^{-2} \rangle$.