Álgebra II

Primer cuatrimestre - 2024

Práctica 2

Grupos – Segunda parte

Morfismos de grupos

1.1. Mostrar que para cualquier grupo G existe un isomorfismo $G \cong G^{\mathrm{op}}$.

1.2. Sea G un grupo.

(I) Sea X un conjunto y $x_0 \in X$. Pruebe que

$$\mathrm{ev}_{x_0} : G^X \to G, \quad \mathrm{ev}_{x_0}(f) = f(x_0)$$

es un homomorfismo de grupos. Describa su núcleo e imagen.

(II) Pruebe que si A es un grupo abeliano, entonces $\hom(G, A)$ es un subgrupo de A^G.

1.3. Sea G un grupo.

(I) Mostrar que la función $\mathrm{ev}_1 : f \in \hom(\mathbb{Z}, G) \mapsto f(1) \in G$ es una biyección y que si G es abeliano entonces es un isomorfismo de grupos.

(II) Describir $\hom(\mathbb{Z}_n, G)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(III) Probar que hay un isomorfismo de grupos $\hom(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_{(n:m)}$.

1.4. Sea G un grupo. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(I) el grupo G es abeliano;

(II) la aplicación $(g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G$ es un morfismo de grupos;

(III) la aplicación $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ es un morfismo de grupos;

(IV) la aplicación $g \in G \mapsto g^2 \in G$ es un morfismo de grupos.

1.5. Sea G un grupo y $g \in G$. Muestre que $c_g \colon h \in G \mapsto ghg^{-1} \in G$ es un automorfismo de grupos.

1.6. Mostrar que la aplicación $g \in G \mapsto c_g \in \mathrm{Aut}(G)$ es un homomorfismo de grupos. Describir su núcleo. Los automorfismos que están en la imagen de G se llaman *automorfismos interiores* y la imagen misma se denota $\mathrm{Inn}(G)$. Mostrar que $\mathrm{Inn}(G)$ es un subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(G)$.

1.7. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos.

(I) Mostrar que $f([G, G]) \subseteq [H, H]$. Deducir que si H es abeliano, entonces $[G, G] \subseteq \ker f$.

(II) ¿Es cierto en general que $f(Z(G)) \subseteq Z(H)$?

1.8. Sea G un grupo. Un subgrupo $H \subseteq G$ se dice *característico* si para cada $f \in \mathrm{Aut}(G)$ se tiene que $f(H) \subseteq H$. Probar que:

(I) Si $H \subseteq G$ es un subgrupo característico, entonces $f(H) = H$ para todo $f \in \mathrm{Aut}(G)$.

(II) Los subgrupos $Z(G)$ y $[G, G]$ de G son característicos.

(III) Si H es un subgrupo característico de G, entonces H es normal en G.

(IV) Si un grupo G posee un único subgrupo H de un orden dado, éste es característico.

(V) Si H es un subgrupo característico de G y K es un subgrupo característico de H, entonces K es un subgrupo característico de G.

1.9. Sea G un grupo finito. Supongamos que existe $f \in \mathrm{Aut}(G)$ tal que $f^2 = 1$ y tal que f no deja fijo a ningún elemento de G distinto de 1. Probar que para todo $g \in G$ se tiene que $f(g) = g^{-1}$, y que G es abeliano de orden impar.
Sugerencia: *muestre que la aplicación* $\phi : g \in G \mapsto g^{-1}f(g) \in G$ *es biyectiva y pruebe que* $f(g) = g^{-1}$ *escribiendo a* g *en la forma* $h^{-1}f(h)$ *para algún elemento* h *de* G.

1.10. Usando el hecho que $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ permuta los elementos no nulos de $\mathbb{Z}_2^2$, encuentre un isomorfismo $GL_2(\mathbb{Z}_2) \cong S_3$.

1.11. (I) Sea G un grupo y sea $X \subset G$ un subconjunto tal que $\langle X \rangle = G$. Sea $f \in \mathrm{End}(G)$ tal que $f(x) = x$ para todo elemento $x \in X$. Probar que $f = \mathrm{id}_G$.

(II) Sea X el conjunto de los elementos de orden 2 de S_3. Muestre que cada automorfismo de S_3 induce una permutación de X y deduzca que $\mathrm{Aut}(S_3) \cong S_3$.

Cocientes

2.1. Verificar que

$$\exp : \mathbb{R} \to S^1, \qquad \exp(t) = e^{2\pi i t}$$

es un morfismo de grupos sobreyectivo con núcleo $\mathbb{Z}$. Concluir que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$.

2.2. Mostrar que:

(I) $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}_{>0} \cong S^1$;

(II) $GL_n(k)/SL_n(k) \cong k^\times$ para todo cuerpo k y $n \in \mathbb{N}$;

(III) $S^1/\mathbb{G}_n \cong S^1$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(IV) si $m \mid n$, entonces $\mathbb{G}_n/\mathbb{G}_m \cong \mathbb{G}_{n/m}$;

(V) si $m \mid n$, entonces $\mathbb{D}_n/\langle r^m \rangle \cong \mathbb{D}_m$.

2.3 (Subgrupos de un grupo cíclico)**.** Sea $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

(I) Pruebe que todo subgrupo de $\mathbb{Z}$ es de la forma $d\mathbb{Z}$ para algún $d \in \mathbb{Z}$.

(II) Pruebe que $d\mathbb{Z} \supset n\mathbb{Z}$ si y sólo si $d \mid n$.

(III) Pruebe que hay una correspondencia biyectiva entre subgrupos de $\mathbb{Z}$ que contienen a $n\mathbb{Z}$ y divisores positivos de n.

(IV) Pruebe que para cada $d \mid n$ existe un único subgrupo de orden d en $\mathbb{Z}_n$.

2.4. Sea G un grupo. Probar que $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$.

2.5. Sean G un grupo y H y K dos subgrupos normales de G.

(I) Mostrar que hay un morfismo inyectivo $G/(H \cap K) \to G/H \times G/K$.

(II) Deducir que si G/H y G/K son abelianos y $H \cap K = 1$ entonces G es abeliano.

(III) Probar que si $G = HK$, entonces el morfismo del item (I) es un isomorfismo.

2.6. Sea G un grupo y sean $H, K \subseteq G$ subgrupos de índice finito. Probar que $L = H \cap K$ también tiene índice finito.

2.7. Sean G un grupo y $H \subseteq G$ un subgrupo. Probar que $[G, G] \subseteq H$ si y sólo si H es normal en G y G/H es abeliano. Deduzca que $[G, G]$ es el menor subgrupo por el cual hay que dividir a G para que el cociente quede abeliano.

2.8. Sea G un grupo. Probar que si $G/Z(G)$ es cíclico, entonces G es abeliano.

2.9. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\{e_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Para cada $\tau \in S_n$ definimos $p_\tau \in M_n(\mathbb{R})$ como la matriz cuya i-ésima columna es el vector $e_{\tau(i)}$. Probar las siguientes afirmaciones.

(I) $\det(p_\tau) = \pm 1$.

(II) La función $\tau \in S_n \mapsto p_\tau \in GL_n(\mathbb{R})$ es un morfismo inyectivo de grupos.

(III) La función *signo* $\mathrm{sg} : \tau \in S_n \mapsto \det(p_\tau) \in \{\pm 1\}$ es un morfismo de grupos. En particular $A_n = \ker(\mathrm{sg})$ es un subgrupo propio normal de S_n, llamado el n-ésimo *grupo alternante*.

(IV) Si $\tau = (i\,j)$ entonces $\mathrm{sg}(\tau) = -1$. Deduzca que $\mathrm{sg}(\tau) = 1$, resp. -1, si y solo si τ se escribe como composición de un número par, resp. impar, de transposiciones.

(V) Probar que $[S_n, S_n] = A_n$, y calcular $[A_n, A_n]$ y $\mathbb{Z}(A_n)$.