

Álgebra II
Primer cuatrimestre - 2024
Práctica 1
Grupos – Primera parte

Definiciones y ejemplos

1.1. Probar que los siguientes conjuntos son grupos abelianos con el producto de números complejos. Determinar cuáles de ellos son cíclicos.

I) $G_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$;

II) $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$;

III) $G_{p^\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_{p^n}$ donde p es un número primo.

1.2. Sean k un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. Se definen:

$$GL_n(k) = \{A \in M_n(k) : \det A \neq 0\};$$

$$SL_n(k) = \{A \in M_n(k) : \det A = 1\}.$$

Probar que, dotados de la multiplicación usual de matrices, estos dos conjuntos resultan ser grupos. Describirlos para $n = 1$. ¿Cuándo son abelianos?

1.3 (Grupo opuesto). Sea (G, \star) un grupo. El *grupo opuesto* de G es el conjunto $G^{\text{op}} = G$ con la operación \star_{op} definida por:

$$\star_{\text{op}} : (g, h) \in G^{\text{op}} \times G^{\text{op}} \mapsto h \star g \in G^{\text{op}}.$$

Probar que $(G^{\text{op}}, \star_{\text{op}})$ es un grupo.

1.4 (Exponentes pequeños). El *exponente* de un grupo G es el menor número natural e tal que para todo $g \in G$ se tiene $g^e = 1$, si es que existe algún e con esta propiedad.

I) Mostrar que los grupos de exponente 2 son abelianos.

II) Probar que

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{F}_3) : a, b, c \in \mathbb{F}_3 \right\}$$

es un grupo no abeliano de exponente 3.

1.5. Sean G un grupo y X un conjunto. Notamos G^X el conjunto de todas las funciones de X en G , y lo dotamos de un producto \star dado por $(f \star g)(x) = f(x)g(x)$ para todo $x \in X$. Probar que (G^X, \star) es un grupo. ¿Cuándo es abeliano?

1.6 (Producto directo). Sean G y H dos grupos. El *producto directo* de G y H es el conjunto $G \times H$ con la operación dada por

$$((g_1, h_1), (g_2, h_2)) \in (G \times H) \times (G \times H) \mapsto (g_1 g_2, h_1 h_2) \in G \times H.$$

Probar que $G \times H$ es un grupo y que es abeliano si y sólo si tanto G como H son abelianos.

1.7 (\mathbb{F}_p -espacios vectoriales). Sean p un número primo y G un grupo abeliano de exponente p . Mostrar que es posible definir una multiplicación $\cdot : \mathbb{F}_p \times G \rightarrow G$ por escalares de \mathbb{F}_p de manera que $(G, +, \cdot)$ resulte un \mathbb{F}_p -espacio vectorial.

Subgrupos

2.1. Sean G un grupo y $H \subseteq G$ un subconjunto. Mostrar que son equivalentes:

- (I) H es un subgrupo de G .
- (II) H es no vacío y para cada $x, y \in H$ se tiene que $xy^{-1} \in H$.

Mostrar que si G es finito, estas afirmaciones son equivalentes a:

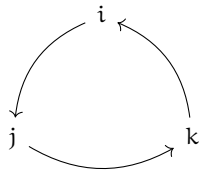
- III) H es no vacío y para cada $x, y \in H$ se tiene que $xy \in H$.

Dar un contraejemplo para esta última equivalencia cuando G es infinito.

2.2. Sea \mathbb{H} el conjunto de 8 elementos $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ dotado del producto dado por las siguientes ecuaciones y la regla usual de los signos:

$$\begin{aligned} i \cdot j &= k, & j \cdot k &= i, & k \cdot i &= j, \\ j \cdot i &= -k, & k \cdot j &= -i, & i \cdot k &= -j, \\ i \cdot i &= j \cdot j &= k \cdot k &= -1. \end{aligned}$$

El par (\mathbb{H}, \cdot) es un grupo no abeliano al que llamamos *grupo de cuaterniones*. El siguiente diagrama permite recordar la tabla de multiplicación de \mathbb{H} :



Verificar que si se considera $G = GL_2(\mathbb{C})$ y $H \subseteq G$ el subgrupo que consiste en los elementos

$$\{\pm Id, \pm I, \pm J, \pm K\},$$

donde

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y $K = IJ$, entonces $H \subseteq G$ es un subgrupo (de 8 elementos) y los productos se corresponden con la tabla de multiplicación de los cuaterniones. En particular, los cuaterniones son un grupo. Hallar todos los subgrupos de \mathbb{H} .

2.3. Sean G un grupo y H_1 y H_2 dos subgrupos de G . Probar que:

- (I) $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo de G .
- (II) $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo de G si y sólo si $H_1 \subseteq H_2$ o $H_2 \subseteq H_1$.

2.4. Sea G un grupo.

- (I) Sea \mathcal{H} una familia de subgrupos de G . Probar que $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ es un subgrupo de G .
- (II) Sea $X \subseteq G$ un subconjunto arbitrario. Probar que existe un menor subgrupo de G que contiene a X . Describirlo en términos de los elementos de X .

El subgrupo cuya existencia se afirma en la segunda parte de este ejercicio se denomina el *subgrupo de G generado por X* y se denota $\langle X \rangle$. Si $X = \{x_1, \dots, x_r\}$, escribimos $\langle x_1, \dots, x_r \rangle$ en lugar de $\langle \{x_1, \dots, x_n\} \rangle$.

2.5. Probar que $\mathbb{Z} = \langle m, n \rangle$ si y sólo si m y n son coprimos.

2.6. Sean $\alpha, \beta \in GL_2(\mathbb{Z})$ dados por

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

I) Probar que $\alpha^4 = \beta^3 = \text{id}$.

II) Probar que $\alpha\beta$ tiene orden infinito.

III) Concluir que finitos elementos de orden finito pueden generar un subgrupo infinito.

2.7. Probar que todo elemento de S_n se escribe como composición de ciclos disjuntos, y que los ciclos que aparecen en dicha composición están unívocamente determinados.

2.8. Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y notamos $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. El grupo simétrico S_n es el grupo formado por todas las funciones $f : [n] \rightarrow [n]$ biyectivas, con la composición como operación. Decimos que un elemento $\tau \in S_n$ es un ciclo si existe un conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_r\} \subset [n]$ de forma que $\tau(a_i) = a_{i+1}$ para $1 \leq i < r$, $\tau(a_r) = a_1$, y $\tau(x) = x$ si $x \notin \{a_1, \dots, a_n\}$. En ese caso escribimos $\tau = (a_1 a_2 \dots a_r)$. Probar que

(I) $S_n = \langle \{(i j) \mid 1 \leq i < j \leq n\} \rangle$;

(II) $S_n = \langle \{(1 i) \mid 1 \leq i \leq n\} \rangle$;

(III) $S_n = \langle \{(i i+1) \mid 1 \leq i < n\} \rangle$;

2.9. Sean G un grupo y $g \in G$ un elemento de orden finito. Calcular $\text{ord}(g^n)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

2.10. Mostrar que un grupo no trivial sin subgrupos propios es cíclico de orden primo.

2.11. Sea $G \subset \mathbb{C}^\times$ un subgrupo finito del grupo multiplicativo \mathbb{C}^\times . Probar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $G = G_n$ es el grupo de las raíces n -ésimas de la unidad.

2.12 (Matrices elementales). Sean $n \in \mathbb{N}$ y k un cuerpo. Dados $i, j \in \{1, \dots, n\}$ con $i \neq j$, sea $\varepsilon_{ij} \in M_n(k)$ la matriz definida por

$$(\varepsilon_{ij})_{k,l} = \delta_{ik} \cdot \delta_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ y } j = l \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Para cada $\alpha \in k$, definimos la *matriz elemental*

$$E_{ij}(\alpha) := I_n + \alpha \cdot \varepsilon_{ij}.$$

Pruebe que $SL_n(k) = \langle E_{ij}(\alpha) : i, j \in \{1, \dots, n\}, \alpha \in k \rangle$.

Subgrupos normales

3.1. Sean G un grupo y $X \subseteq G$ un subconjunto tal que $G = \langle X \rangle$. Probar que un subgrupo N de G es normal si y sólo si $xNx^{-1} = N$ para todo $x \in X$. Mostrar que si G es finito entonces alcanza con pedir $xNx^{-1} \subseteq N$ para todo $x \in X$.

3.2. Sea G un grupo.

I) Sea \mathcal{H} una familia de subgrupos normales de G . Mostrar que $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ es un subgrupo normal de G .

- II) Sea $X \subseteq G$ un subconjunto arbitrario. Mostrar que existe un menor subgrupo normal de G que contiene a X . Describirlo en términos de los elementos de X .

El subgrupo cuya existencia se afirma en la segunda parte de este ejercicio se denomina el *subgrupo normal de G generado por X* y se denota $\langle\langle X \rangle\rangle$. Si $X = \{x_1, \dots, x_r\}$, escribimos $\langle\langle x_1, \dots, x_r \rangle\rangle$ en lugar de $\langle\langle \{x_1, \dots, x_n\} \rangle\rangle$. En general, este subgrupo no coincide con el subgrupo generado por X construido en el Ejercicio 2.4.

- III) Supongamos que $X \subseteq G$ es un conjunto tal que $gXg^{-1} \subseteq X$ para todo $g \in G$. Mostrar que entonces el subgrupo normal generado por X coincide con el subgrupo generado por X .

3.3. Sean $G = GL_2(\mathbb{Q})$ y $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq G$. Verificar que H es un subgrupo de G . Sea ahora $g = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$. Mostrar que $gHg^{-1} \subsetneq H$.

3.4. Sea G es un grupo. Dados $A, B \subseteq G$ don subconjuntos, definimos $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$. Supongamos que A y B son subgrupos de G . Probar que:

- I) AB es un subgrupo de G si y sólo si $AB = BA$.
- II) $G = AB$ si y sólo si $G = \langle A, B \rangle$ y $AB = BA$.
- III) Si A o B son normales en G , entonces AB es un subgrupo de G .
- IV) Si tanto A como B son normales en G , entonces AB es un subgrupo normal de G .

3.5. Sea G un grupo. Dados dos elementos $a, b \in G$, su *conmutador* se define como el elemento

$$[a, b] := aba^{-1}b^{-1}.$$

- I) Probar que $ab = ba$ si y sólo si $[a, b] = 1$.
- II) Sea $X = \{[a, b] : a, b \in G\}$. El *conmutador* de G es el subgrupo $[G, G] := \langle X \rangle$. Pruebe que $[G, G]$ es un subgrupo normal en G .
- III) Probar que G es abeliano si y sólo si $[G, G] = 1$.
- IV) Calcular $[H, H]$ y $[D_n, D_n]$.

3.6 (Conmutadores del grupo general lineal). Sea $n \in \mathbb{N}$ y k un cuerpo.

- I) Dados $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ distintos dos a dos y $\alpha, \beta \in k$, pruebe que $[E_{ij}(\alpha), E_{jk}(\beta)] = E_{ik}(\alpha\beta)$.
- II) Concluya que si $n \geq 3$, entonces $[GL_n(k), GL_n(k)] = SL_n(k)$.
- III) Pruebe que $[GL_2(\mathbb{F}_2), GL_2(\mathbb{F}_2)] \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ y $SL_2(\mathbb{F}_2) \cong D_3$.

3.7. Sea G un grupo. Su *centro* es el subgrupo

$$Z(G) = \{g \in G : gh = hg \text{ para todo } h \in G\}.$$

Un elemento de $Z(G)$ se dice *central*.

- I) Mostrar que $Z(G)$ es un subgrupo normal de G .
- II) Sean G un grupo y $X \subseteq G$ un subconjunto tal que $G = \langle X \rangle$. Mostrar que

$$Z(G) = \{g \in G : gx = xg \text{ para todo } x \in X\}.$$

- III) Encontrar el centro de un grupo abeliano, de \mathbb{D}_n para $n \geq 1$, de \mathbb{H} , y de $GL_n(k)$ para k un cuerpo y $n \geq 1$.
- IV) Sean G un grupo y X un conjunto. Calcular el centro de G^X .
- 3.8. Encontrar todos los subgrupos de \mathbb{D}_4 y determinar cuáles de ellos son normales en \mathbb{D}_4 .
- 3.9. Probar que todo subgrupo de \mathbb{H} es normal. Concluir que $\mathbb{H} \not\cong \mathbb{D}_4$.