Álgebra II

Primer cuatrimestre - 2024

Práctica 8

Torsión, divisibilidad y módulos sobre un DIP

Teorema de estructura.

1.1. Clasificar a menos de isomorfismo los grupos abelianos

(I) de orden 18, 45, 100 y 180.

(II) de orden p^3 y p^4 para $p \in \mathbb{N}$ un número primo.

1.2. Sean A un dominio de ideales principales y M un A-módulo finitamente generado. Mostrar que M es de torsión si y sólo si $\hom_A(M, A) = 0$.

1.3. Sean G un grupo abeliano finito y $p \in \mathbb{N}$ un número primo que divide al orden de G. Probar que el número de elementos de orden p de G es coprimo con p.

1.4. Hallar los factores invariantes de los siguientes grupos abelianos:

(I) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_9$;

(II) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{14}$;

(III) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}$;

(IV) $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7$.

1.5. Hallar los factores invariantes de un grupo abeliano G de orden 36 que tiene exactamente 2 elementos de orden 3 y que no tiene elementos de orden 4.

1.6. (I) sea A un DIP y J un ideal no nulo. Si M es un A/J-módulo finitamente generado, mostrar que M como A-módulo también es finitamente generado y de torsión. Describir los posibles valores de los d_i del teorema de estructura.

(II) Describa todos los posibles módulos finitamente generados sobre los anillos $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

1.7. Sean $A = \mathbb{R}[x]/\langle (x^2+1)^2 \rangle$ y $J = \langle x^2 + 1 \rangle \leqslant A$. Probar que todo A–módulo finitamente generado es isomorfo a $A^m \oplus (A/J)^n$ para un único par de enteros no negativos (m, n).

1.8. Sea V un k espacio vectorial de dimensión finita y $\phi : V \to V$ una transofrmación lineal. Mostrar que son equivalentes:

- No existe ninguna base en la que ϕ se escriba en bloques.
- (V, ϕ) es un $k[X]-$módulo indescomponible, luego cíclico con $(V, \phi) \simeq k[X]/(p)$.

1.9. Considerar a $\mathbb{Q}^3$ como $\mathbb{Q}[X]$-módulo a través de la matriz

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Hallar la descomposición de $(\mathbb{Q}^3, T)$ en sumandos directos indescomponibles como $\mathbb{Q}[X]-$módulo.

1.10. (I) Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 2 y f un endomorfismo $\mathbb{R}-$lineal. Muestre que (V, f) es un $\mathbb{R}[x]$-módulo finitamente generado y de torsión.

(II) Muestre que necesariamente se tiene una de las siguientes posibilidades:

- $f = \lambda \mathrm{Id}$.
- $f \neq \lambda.\mathrm{Id}$ pero igualmente hay una base de V en la que f es diagonal.
- Hay una base en la que f es un bloque 2x2 de Jordan.
- Hay una base en la que la matriz de f es de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

con $b \neq 0$.

En cada caso, escribir los factores invariantes de la descomposición de M como $\mathbb{R}[X]$-módulo como cocientes $\mathbb{R}[X]/(p)$ para un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[X]$.