Lógica y Computabilidad

Primer Cuatrimestre – 2024

Práctica 6 – Teoría de la Prueba y Compacidad

Teoría de la Prueba

1. Dada una fórmula α de un lenguaje de primer orden arbitrario, probar que las siguientes fórmulas de dicho lenguaje son demostrables:

   a) $(\forall x\alpha \to \exists x\alpha)$,

   b) $(\exists x\exists y\alpha \to \exists y\exists y\alpha)$.

2. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado binario P. En cada uno de los siguientes casos probar que $\Gamma \vdash \alpha$.

   a) $\Gamma = \emptyset$ y $\alpha = (\forall x\forall yP(x,y) \to \forall y\forall xP(x,y))$.

   b) $\Gamma = \{\exists y\forall xP(x,y)\}$ y $\alpha = \forall x\exists yP(x,y)$.

   c) $\Gamma = \{\forall x(\gamma \to \beta)\}$ y $\alpha = (\forall x\gamma \to \forall x\beta)$, siendo γ y β fórmulas cualesquiera de $\mathcal{L}$.

3. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con símbolos de predicados binarios P y Q. Decidir si vale $\Gamma \vdash \alpha$ para $\alpha = \forall x\forall y(P(x,y) \to Q(x,y))$ y

$$\Gamma = \{\, \forall x\forall y(P(x,y) \wedge P(y,x) \to Q(x,y))\, ,\ \forall x\forall y(P(x,y) \to P(y,x))\, \}.$$

4. Si P es un símbolo de predicado binario de un lenguaje de primer orden, decidir si alguna de las siguientes fórmulas se deduce de la otra o no:

$$\varphi = \forall x\exists y(P(x,y) \to P(y,x)) \quad \text{y} \quad \psi = \forall x\exists y(P(x,y) \to \exists zP(z,x)).$$

5. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un predicado binario P y predicados unarios Q, R, S. Decidir si los siguientes enunciados son universalmente válidos. Dar una deducción cuando lo sean y una interpretación en la que sean falsos cuando no.

   a) $\varphi = \forall xQ(x) \to Q(t)$, donde t es un término sin variables.

   b) $\psi = \forall x\exists y\forall z\exists w(\neg P(x,y) \to P(w,z))$.

   c) $\rho = (\forall x(Q(x) \to R(x))) \wedge (\exists x\neg(Q(x) \to S(x))) \to (\exists x\neg(R(x) \to S(x)))$.

6. Probar las siguientes afirmaciones (no necesariamente dando una deducción).

   a) $\vdash (\neg\exists x\psi \to \forall x\neg\psi)$.

   b) $\vdash (\neg\forall x\psi \to \exists x\neg\psi)$.

   c) $\vdash (\forall x\psi \to \forall x(\neg\psi \to \phi))$.

   d) $\vdash (\psi \to \exists x\psi)$, con x no libre en ψ.

Compacidad

Recordar que una *$\mathcal{L}$-fórmula* es una fórmula del lenguaje $\mathcal{L}$. Recordar también que un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ es un *lenguaje con igualdad* si contiene un símbolo $=$ que siempre se interpreta como la igualdad, mientras que $\mathcal{L}$ es un *lenguaje con orden* si contiene un símbolo $\leq$ que siempre se interpreta como una relación de orden.

En los lenguajes con igualdad es posible simplificar algunas fórmulas utilizando el símbolo $\neq$ con el significado usual, asumiendo que $t_1 \neq t_1$ quiere decir $\neg(t_1 = t_2)$. Similarmente, en los lenguajes con orden pueden utilizarse los símbolos $\geq$, $=$, $\neq$, $<$ y $>$.

7. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad. Construir un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas que modele los conjuntos infinitos y probar las siguientes afirmaciones.

   a) No existe una $\mathcal{L}$-fórmula cuyos modelos sean los conjuntos infinitos.

   b) No existe una $\mathcal{L}$-fórmula cuyos modelos sean los conjuntos finitos.

   c) No existe un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas cuyos modelos sean los conjuntos finitos.

8. Una relación binaria R en un conjunto $\mathcal{U}$ *tiene ciclos finitos* si para todo $x \in \mathcal{U}$ existen $x_1, \ldots, x_{k+1} \in \mathcal{U}$ tales que $x = x_1 = x_{k+1}$ y $x_i R x_{i+1}$ para $i = 1, \ldots, k$. Considerar un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ con igualdad y un símbolo de predicado binario R. Probar que no existe ningún conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$ tal que sus modelos sean las relaciones que tienen ciclos finitos.

9. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con orden al que se le agregan un símbolo de función unaria f y uno de constante c. Dada una interpretación de $\mathcal{L}$ con universo $\mathcal{U}$, decimos que f *tiene altura finita* en dicha interpretación si el conjunto $\{x \in \mathcal{U} : f(x) \geq c\}$ es finito. Probar que ningún conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas expresa la propiedad "f tiene altura finita".

10. Dados un conjunto no vacío G y una operación binaria $*$ en G, decimos que $(G, *)$ es un *grupo* si satisface los siguientes axiomas.

    Asociatividad: $x * (y * z) = (x * y) * z$ para cualesquiera $x, y, z \in G$.

    Elemento neutro: existe $e \in G$ tal que $x * e = e * x = x$ para todo $x \in G$.

    Existencia de inversos: para todo $x \in G$ existe $y \in G$ con $x * y = y * x = e$.

    Antes de seguir, verificar que tanto $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}_n$, el conjunto de restos módulo n, son grupos con la suma y la suma módulo n respectivamente. Sea ahora $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binaria $*$.

    a) Exhibir una $\mathcal{L}$-fórmula que modele los grupos.

    b) Probar que ningún conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas modela los grupos finitos.

11. Siguiendo con el ejercicio anterior, para $x \in G$ notamos

$$x^0 = e \quad \text{y} \quad x^n = \underbrace{x * x * \cdots * x}_{n \text{ veces a } x} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},\, n \geq 1.$$

    El grupo $(G, *)$ se dice *cíclico* cuando existe algún $z \in G$ con la propiedad de que todo $x \in G$ se escribe como $z^n = x$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

    a) Verificar que $(\mathbb{Z}_n, +)$ y $(\mathbb{Z}, +)$ son grupos cíclicos.

    b) Siendo $\mathcal{L}$ el mismo lenguaje del ejercicio anterior, probar que ningún conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas tiene la propiedad de que sus modelos sean los grupos cíclicos.