Lógica y Computabilidad

Primer Cuatrimestre – 2024

Práctica 5 – Lógica de Primer Orden

---

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado binario P, un símbolo de función unaria f_1, un símbolo de función binario f_2 y un símbolo de constante c. Si las letras x e y denotan variables, decidir cuáles de las siguientes expresiones del lenguaje $\mathcal{L}$ son términos y cuáles son fórmulas:

   a) $\exists f_2(x) P(f_2(x))$,
   b) $f_2(f_1(x), f_1(y))$,
   c) $\forall x \exists c P(x, c)$,
   d) $\forall c \exists x P(x, c)$,
   e) $\exists x \exists y \exists x P(f_2(x, y), f_1(y))$,
   f) $\exists x P(x, y) \forall y$.

2. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un símbolo de predicado binario P. Para las siguientes fórmulas encontrar las apariciones libres y ligadas de las variables que aparecen en ellas. Decidir en cada caso si las fórmulas son o no enunciados.

   a) $\forall x \exists y P(x, x)$.
   b) $(\exists x P(y, y) \rightarrow \exists y P(y, z))$.
   c) $\exists x\, (\exists y P(x, x) \wedge P(x, y))$.
   d) $\forall z\, (\forall x P(x, y) \vee P(x, z))$.

3. Para cada uno de los siguientes ejemplos, describir la propiedad que determina el enunciado en cuestión al ser interpretado como se indica.

   a) $\forall x \forall y\, (P(x, y) \rightarrow \exists z\, ((Q(z) \wedge P(x, z)) \wedge P(z, y)))$,
   donde P y Q son símbolos de predicados binario y unario respectivamente, el universo de la interpretación son los números reales, P es la relación de menor estricto, $Q\,(x)$ significa "x es un número racional".

   b) $\forall x\, (Q(x) \rightarrow \exists y\, (R(y) \wedge P(y, x)))$,
   donde P, Q y R son símbolos de predicados, el universo de la interpretación es el conjunto de los días y las personas, $P(x, y)$ significa "x nace en el día y", $Q(x)$ significa "x es un día", y $R(x)$ significa "x es un esclavo".

   c) $\forall x \forall y\, (Q(x) \wedge Q(y)) \rightarrow P(f(x, y))$,
   donde Q y P son símbolos de predicados unarios, f es un símbolo de función binario, el universo de la interpretación son los números enteros, $Q(x)$ significa "x es par", $P(x)$ significa "x es impar", y $f(x, y) = x + y$.

   d) Para los siguientes enunciados el universo de la interpretación es el conjunto de las personas y el predicado binario $P(x, y)$ significa "x quiere a y".

      i) $\exists x \forall y P(x, y)$.
      ii) $\forall y \exists x P(x, y)$.
      iii) $\exists x \exists y\, (\forall z P(y, z) \rightarrow P(x, y))$.
      iv) $\exists x \forall y \neg P(x, y)$.

4. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje con igualdad que consiste en un símbolo de función binario f y un símbolo de constante c. Considerar las interpretaciones $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ dadas por

$$\mathcal{U}_1 = \mathbb{N}\,,\ f_1(x, y) = x + y\,,\ c_1 = 1 \quad \text{y} \quad \mathcal{U}_2 = \mathbb{N}\,,\ f_2(x, y) = x \cdot y\,,\ c_2 = 0.$$

   Determinar qué propiedades describen los siguientes enunciados y analizar su validez. Cuando sean válidos para $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$, determinar si lo son para toda otra interpretación.

   a) $\forall x \exists y\, (x = f(y, y) \vee x = f(f(y, y), c))$
   b) $\exists y \forall x\, (x = f(y, y) \vee x = f(f(y, y), c))$
   c) $\forall x \forall y\, (f(x, y) = c \rightarrow (x = c \vee y = c))$

5. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de primer orden con igualdad que no posee ningún otro símbolo. Determinar enunciados de $\mathcal{L}$ que describan las siguientes propiedades.
   a) Existen al menos dos elementos.
   b) Existen exactamente dos elementos.
   c) Existen a lo sumo dos elementos.

6. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y un símbolo de predicado unario P. Determinar enunciados de $\mathcal{L}$ que describan las siguientes propiedades.
   a) Existen a lo sumo dos elementos y al menos uno de ellos cumple la propiedad P.
   b) Si existe un elemento que cumple la propiedad P, es único.
   c) Existe un elemento que cumple la propiedad P y es único.

7. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad, un símbolo de función binaria f y uno de constante c. Para cada una de los siguientes enunciados hallar dos modelos, uno con universo de interpretación finito y otro con universo de interpretación infinito.
   a) $\forall x \forall y (f(x,x) = f(y,y) \to x = y)$, *b*) $\forall x \exists y (x = f(y,y))$, *c*) $\forall x (f(x,c) = c)$.

Definición Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden e $\mathcal{I}$ una interpretación de dicho lenguaje. Un subconjunto A del universo $\mathcal{U}_\mathcal{I}$ de $\mathcal{I}$ se dice *expresable* si existe una fórmula φ de $\mathcal{L}$ con una única variable libre x de modo tal que $\varphi(x/u)$ es verdadera si y sólo si $u \in A$, donde $\varphi(x/u)$ denota la fórmula del lenguaje extendido $\mathcal{L}_\mathcal{I}$ que resulta de sustituir x por u en φ. En otras palabras, A es expresable sii existe una fórmula φ de $\mathcal{L}$ con

$$A = \{u \in \mathcal{U}_\mathcal{I} : \varphi(x/u) \text{ es verdadera}\}.$$

Un elemento $u \in \mathcal{U}_\mathcal{I}$ se dice *distinguible* si $\{u\}$ es expresable.

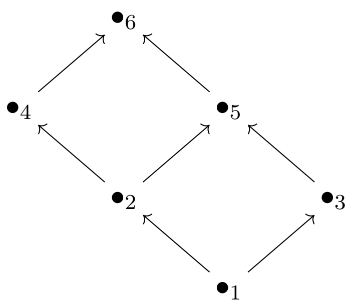
8. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binaria f. Probar que 1 es un elemento distinguible en las interpretaciones $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, +)$ e $\mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, \cdot\,)$ del lenguaje $\mathcal{L}$.

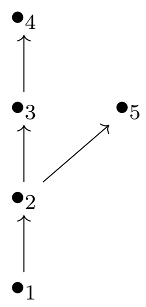
9. Probar que si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos expresables de un universo, entonces la unión $\bigcup_{i=1}^n A_i$ y la intersección $\bigcap_{i=1}^n A_i$ también son expresables.

10. Se sabe que el universo $\mathcal{U}_\mathcal{I}$ de una interpretación $\mathcal{I}$ es finito y tiene $n+1$ elementos, de los cuales n son distinguibles. Probar que todos los elementos de $\mathcal{U}_\mathcal{I}$ son distinguibles.

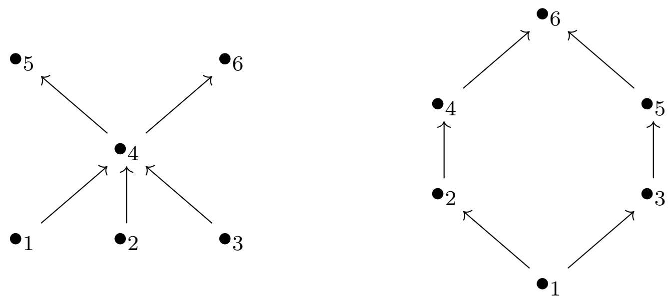
11. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado binario P. Determinar un conjunto de enunciados Γ de $\mathcal{L}$ tal que una interpretación $\mathcal{I}$ de $\mathcal{L}$ satisfaga Γ si y sólo si $P_\mathcal{I}$ es una relación de orden i.e. una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva.

12. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado binario P. Para cada uno de los diagramas a continuación, interpretar P como la relación de orden definida por dicho diagrama y probar que todos los elementos de su universo son distinguibles.





13. Siendo $\mathcal{L}$ como en el ejercicio anterior y considerando los siguientes diagramas, ¿cuántos subconjuntos expresables tiene el universo en cada caso?



14. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad, con un símbolo de función binaria f y uno de constante c. Para cada una de las siguientes interpretaciones, dar un enunciado no universalmente válido del cual sean modelos:
    a) $\mathcal{U}_{\mathcal{I}} = \mathbb{R}\,,\ f_{\mathcal{I}}(x,y) = x \cdot y$ y $c_{\mathcal{I}} = 1$;
    b) $\mathcal{U}_{\mathcal{I}} = \mathbb{C}\,,\ f_{\mathcal{I}}(x,y) = \mathrm{Re}(x) + \mathrm{Im}(y) + i$ y $c_{\mathcal{I}} = i$.

15. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binaria f. Para cada uno de los siguientes pares de interpretaciones, dar enunciados que sean válidos en una de las interpretaciones pero no en la otra:
    a) $(\mathbb{Z},+)$ y $(\mathbb{N},+)$, *b*) $(\mathbb{Z},\cdot)$ y $(\mathbb{Q},\cdot)$, *c*) $(\mathbb{R},\cdot)$ y $(\mathbb{C},\cdot)$.
    Concluir, en cada caso, que ambas interpretaciones son no isomorfas.

16. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un predicado binario. Para cada uno de los siguientes pares de interpretaciones, decidir si ambas interpretaciones son isomorfas:
    a) $(\mathbb{Z},<)$ y $(\mathbb{Z},>)$, *b*) $(\mathbb{N},<)$ y $(\mathbb{N},\leq)$, *c*) $(\mathbb{Z},<)$ y $(\mathbb{N},<)$.

17. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y sin otros símbolos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, dar un enunciado φ_n tal que todo modelo de φ_n tenga al menos n elementos.

18. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y sin otros símbolos. Dar un conjunto de enunciados Γ de modo tal que todo modelo de Γ sea infinito.

19. Sean ϕ y σ fórmulas en un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ que consta de un símbolo de predicado binario P y símbolos de predicados unarios Q y R.
    a) Probar que las siguientes fórmulas no son universalmente válidas encontrando en cada caso una interpretación en la que sean falsas.
        i) $\forall x \exists y P(x,y) \to \exists y P(y,y)$
        ii) $(\exists x R(x) \leftrightarrow \exists x Q(x)) \to \forall x (R(x) \leftrightarrow Q(x))$
        iii) $\exists x (R(x) \to Q(x)) \to (\exists x R(x) \to \exists x Q(x))$
    b) Mostrar que las siguientes fórmulas son universalmente válidas.
        i) $\forall x Q(x) \to \exists x Q(x)$
        ii) $\forall x \forall y P(x,y) \to \forall y \forall x P(y,x)$
        iii) $\forall x (\phi \to \sigma) \to (\forall x \phi \to \forall x \sigma)$
        iv) $(\forall x \phi \wedge \forall x \sigma) \leftrightarrow \forall x (\phi \wedge \sigma)$
    c) Determinar si las fórmulas siguientes son universalmente válidas.
        i) $\neg \exists y \forall x (P(x,y) \leftrightarrow \neg P(x,x))$
        ii) $\exists x (Q(x) \to \forall y Q(y))$
        iii) $\forall x (Q(x) \vee R(x)) \to (\forall x Q(x) \vee \forall x R(x))$