Optimización

Primer Cuatrimestre 2023

Práctica N° 1: Minimización de funciones.

Ejercicio 1 Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua tal que existe $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ de modo que el conjunto $\{\mathbf{x} \in \Omega : f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)\}$ es acotado. Probar que f tiene un minimizador global en Ω.

Ejercicio 2 Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Probar que minimizar $f(\mathbf{x})$ es equivalente a minimizar $g(f(\mathbf{x}))$.

Ejercicio 3 Para las siguientes funciones, encontrar candidatos a extremos locales mediante condiciones de primer orden. Analizar si lo son y clasificarlos usando condiciones de segundo orden cuando sea posible. Puede ser útil graficarlas o realizar un `heatmap`.

(a) ***Rosenbrock:*** $f(x,y) = 100(y-x^2)^2 + (x-1)^2$

(b) ***Booth:*** $f(x,y) = (x+2y-7)^2 + (2x+y-5)^2$

(c) ***McCormick:*** $\operatorname{sen}(x+y) + (x-y)^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y + 1$

Ejercicio 4 Encontrar ejemplos de funciones $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en donde:

(a) $\mathbf{x}^*$ es un minimizador local de f, pero $\nabla f(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$.

(b) $\mathbf{x}^*$ es un minimizador local de f, $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, pero $Hf(\mathbf{x}^*)$ no es semidefinida positiva.

(c) Ω es abierto, $\mathbf{x}^*$ es un minimizador local estricto de f, pero $Hf(\mathbf{x}^*)$ no es definida positiva.

(d) Ω es abierto, $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, pero $\mathbf{x}^*$ no es un minimizador local de f.

(e) Ω es abierto, $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, $Hf(\mathbf{x}^*)$ es semidefinida positiva, pero $\mathbf{x}^*$ no es un minimizador local de f.

Ejercicio 5 Considerar un problema como el de la figura, en la que se tiene una superficie con n agujeros realizados en los puntos $\mathbf{z}^i$ y n masas m_i $(i = 1, \ldots, n)$, que cuelgan de piolines pasados por esos agujeros. Todos los piolines confluyen en un nudo sobre la superficie. Llamamos $\mathbf{x}$ a la posición del nudo. Buscamos la posición $\mathbf{x}^*$ que corresponde al equilibrio del sistema, asumiendo que no hay rozamiento.

(a) Escribir la fuerza $F(\mathbf{x})$ que actúa sobre el punto $\mathbf{x}$.

Sug.: Aplicar la segunda ley de Newton (*fuerza = masa por aceleración*) a cada cuerda.

(b) Hallar un potencial $f(\mathbf{x})$, tal que $F(\mathbf{x}) = -\nabla f(\mathbf{x})$. Mostrar que hallar el punto de equilibrio equivale a minimizar el potencial.

(c) Observar que minimizar el funcional equivale a hallar un punto $\mathbf{x}^*$ que minimice la suma ponderada de las distancias a los $\mathbf{z}^i$.

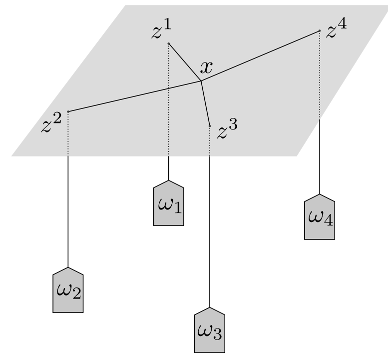

Figura 1: Ejercicio 5. Masas que cuelgan atadas a un mismo piolín.

(d) Dar una fórmula para $\mathbf{x}^*$ en términos de los $\mathbf{z}^i$.

Conjuntos y funciones convexas.

Ejercicio 6 Sean $\mathbf{x}, \mathbf{x}^*, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tales que para todo $\alpha > 0$ cumplen

$$||\mathbf{x}^* + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) - \mathbf{y}|| \geq ||\mathbf{x}^* - \mathbf{y}||.$$

Probar que $(\mathbf{x}^* - \mathbf{y})^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq 0$.

Ejercicio 7 Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un conjunto convexo e $\mathbf{y} \notin \overline{\Omega}$. Probar que:

(a) $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ dada por $f(\mathbf{x}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$ alcanza un minimizador global x^*.

(b) Para todo $\mathbf{x} \in \Omega$ vale
$$(\mathbf{x}^* - \mathbf{y})^t\mathbf{x} \geq (\mathbf{x}^* - \mathbf{y})^t\mathbf{y} + f^2(\mathbf{x}^*).$$

(c) *(Teorema del hiperplano de separación)* Existe un hiperplano $\{\mathbf{x} : \mathbf{a}^t\mathbf{x} = c\}$ que contiene a $\mathbf{y}$ y $\mathbf{a}^t\mathbf{x} < c$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$.

(d) *(Teorema del hiperplano de soporte)* Si $\mathbf{y} \in \partial\Omega$, entonces existe un hiperplano $\{\mathbf{x} : \mathbf{a}^t\mathbf{x} = c\}$ que contiene a $\mathbf{y}$ y $\mathbf{a}^t\mathbf{x} \leq c$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$.

Ejercicio 8 Sean $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexas con Ω convexo, $\alpha > 0$ y $k \in \mathbb{R}$. Probar que:

(a) $f + g$ es convexa.

(b) $\alpha \cdot f$ es convexa.

(c) El conjunto de subnivel, $S_k = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) \leq k\}$ es convexo en $\mathbb{R}^n$.

(d) El epigráfico de f, $E = \{(\mathbf{x}, t) : f(\mathbf{x}) \leq t\}$ es convexo en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Ejercicio 9 Probar que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es estrictamente convexa y tiene algún minimizador, entonces es único. Dar un ejemplo de función estrictamente convexa sin minimizador.

Ejercicio 10 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ estrictamente convexa con un único minimizador. Probar que $f(\mathbf{x}) \to \infty$ cuando $\|\mathbf{x}\| \to \infty$.

Ejercicio 11 Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un conjunto de funciones convexas definidas sobre un conjunto convexo Ω. Mostrar que la función $f(\mathbf{x}) = \sup_{i\in I} f_i(\mathbf{x})$ es convexa en la región en la cual es finita.

Ejercicio 12 Sean $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona no decreciente y convexa y $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa con Ω convexo. Probar que $\gamma \circ f$ es convexa sobre Ω.

Ejercicio 13 Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convexo y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Probar que f es convexa si y sólo si $Hf(\mathbf{x})$ es semidefinida positiva para todo $\mathbf{x} \in \Omega$.

Funciones cuadráticas.

Ejercicio 14 (Cuadrados mínimos) Dados puntos distintos en el plano $\{(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)\}$, se busca un polinomio $p \in \mathcal{P}_k$ que minimice la expresión: $\sum_{i=1}^{n}(y_i - p(x_i))^2$. Reescribir como un problema de minimización de una función cuadrática respecto de los coeficientes de p

Ejercicio 15 Para el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ que resuelve el problema anterior, estudiar los resultados (y los tiempos de ejecución) de los siguientes procedimientos:

1) Calcular $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}$ y resolver el sistema $\mathbf{Rx} = Q^t\mathbf{b}$ aprovechando las funciones del Ejercicio 14 de la práctica 1 para despejar sistemas triangulares (estudiar el resultado del comando `qr`).

2) Resolver el sistema $\mathbf{Rx} = Q^t b$ con el comando \.

2) Resolver directamente el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con el comando \.

Ejercicio 16 Se quiere aproximar una función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por un polinomio $p \in \mathcal{P}_n$ en el sentido de L^2. Es decir, se quiere minimizar:

$$\int_0^1 \big(f(x) - p(x)\big)^2\, dx.$$

Reescribir como un problema de minimización de una función cuadrática respecto de los coeficientes de p.

Ejercicio 17 De manera similar al ejercicio anterior, se quiere aproximar una función periódica $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ por un polinomio trigonométrico de grado n:

$$p(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

en el sentido de L^2.

(a) Reescribir como un problema de minimización de una función cuadrática respecto de c_k

Sug.: Tener en cuenta que:

$$\int_0^{2\pi} e^{imx}\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ 2\pi & \text{si} \quad m = 0. \end{cases}$$

(b) Probar que para una f que toma valores reales vale la siguiente relación: $c_{-k} = \overline{c_k}$. Mostrar que esto permite reemplazar la suma compleja por sumas de senos y cosenos, con coeficientes reales:

$$p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen}(kx).$$

Dar fórmulas para a_k y b_k en términos de c_k.

Ejercicio 18 Dada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \geq n$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Sea $\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^t$ la descomposición en valores singulares de $\mathbf{A}$. Se define la pseudo-inversa de $\mathbf{A}$, como $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^\dagger\mathbf{U}^t$, donde $\boldsymbol{\Sigma}^\dagger$ es la matriz 'diagonal' que tiene en la diagonal $\frac{1}{\sigma_i}$ en los casilleros correspondientes a los valores singulares no nulos de $\mathbf{A}$ y 0 en todos los demás. Se busca $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2 = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 \tag{1}$$

a) Probar que si $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = n$, entonces $\hat{\mathbf{x}}$ es única y $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{b}$.

   Sug.: Recordar que $\mathrm{Nu}(\mathbf{A}^t) = \mathrm{Im}(\mathbf{A})^\perp$.

b) Si $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = r < n$, $\hat{\mathbf{x}}$ no es única. En efecto, si consideramos $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathrm{Nu}(\mathbf{A})$, $\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$. Probar que $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{b}$ es la única solución a (1) en $\mathrm{Nu}(\mathbf{A})^\perp$.