

Matemática I (B)

Teórica turno noche

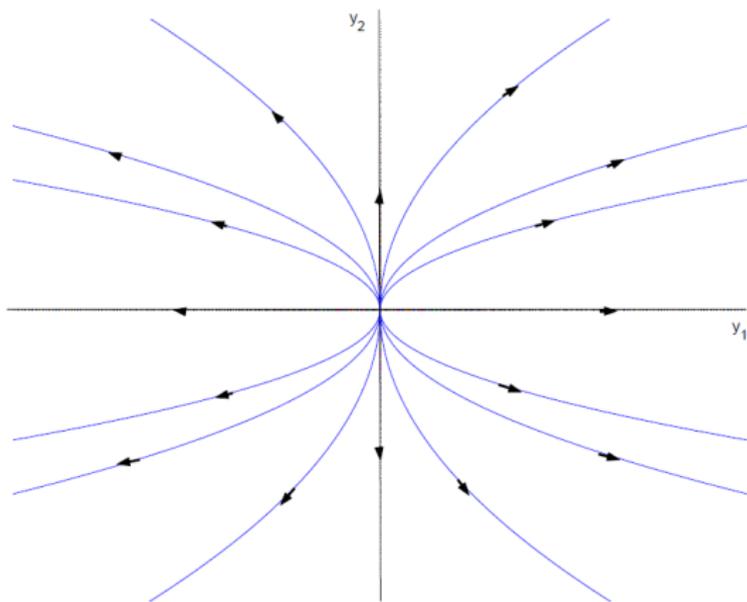
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires

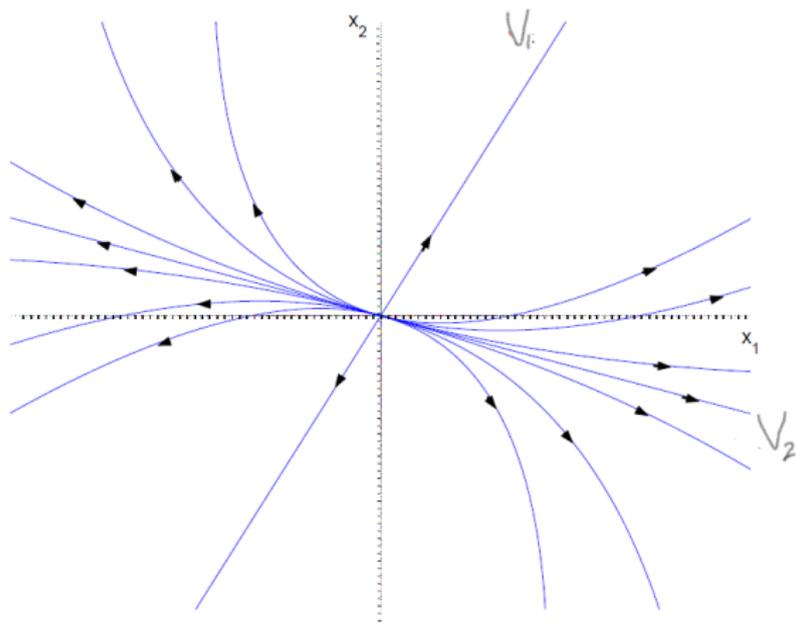
Primer Cuatrimestre 2023

Sistemas Autónomos - Diagramas de fases
Sistemas No lineales

Caso I a) $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, i.e., $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$.

Dibujamos curvas de la forma $y_2 = K(|y_1|)^\alpha$, con $\alpha < 1$





NODO INESTABLE

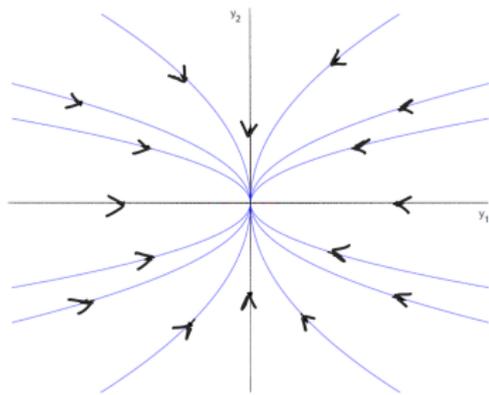
La trayectorias se alejan del punto de reposo.

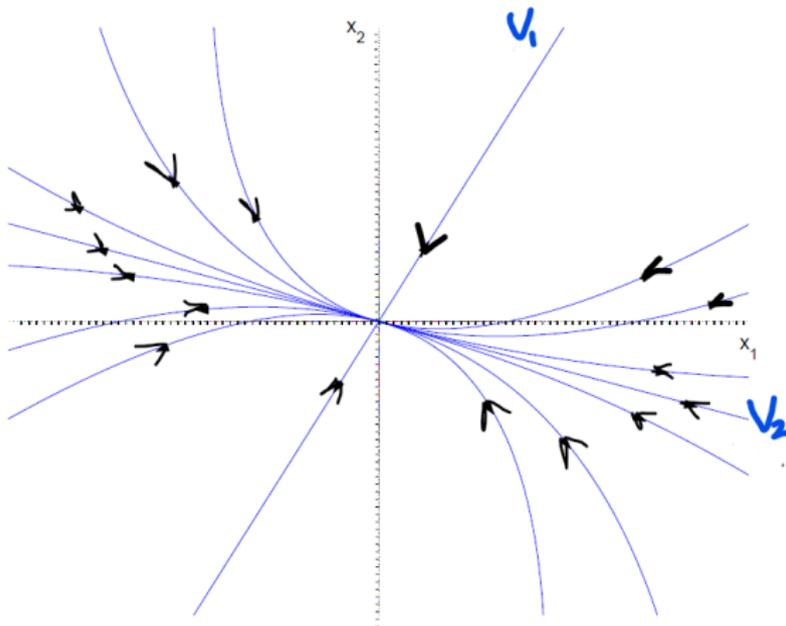
Caso I b) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, i.e., $0 < \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$.

Dibujamos curvas de la forma $y_2 = K(|y_1|)^\alpha$, con $\alpha < 1$

Es el mismo dibujo que antes pero cambiamos el sentido de las flechas.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_1 = 0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_2 \qquad \lim_{t \rightarrow -\infty} y_1 = \infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_2$$





NODO ESTABLE

Las trayectorias se acercan al punto de reposo.

Caso I c) $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$, i.e., $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$.

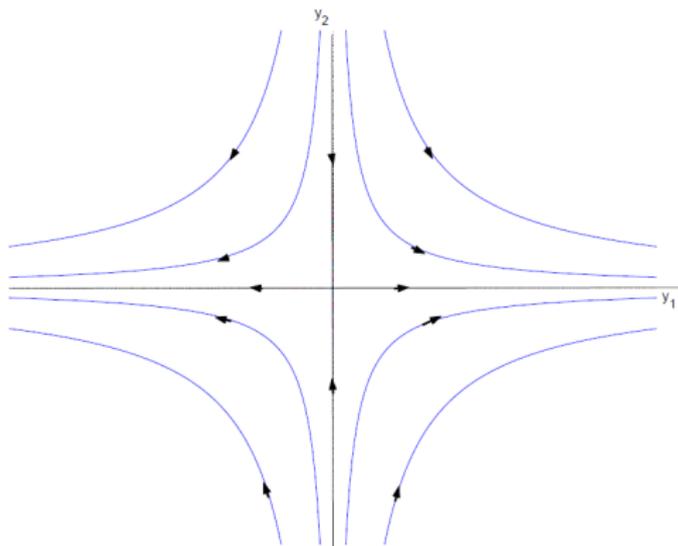
Dibujamos curvas de la forma $y_2 = K(|y_1|)^\alpha$, con $\alpha < 0$

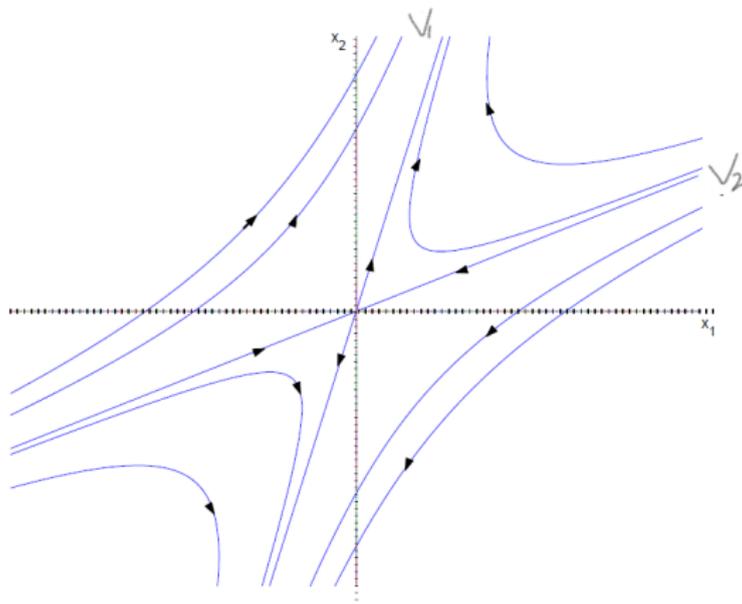
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_1 = \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_2 = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y_1 = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y_2 = \infty$$





PUNTO SILLA

Caso II $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ y hay base de autovectores.

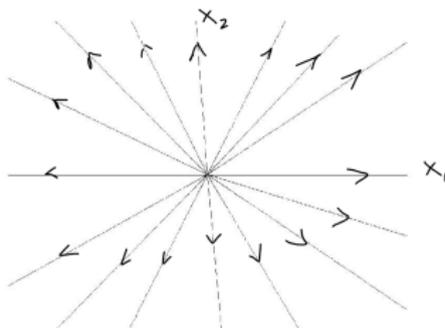
El sistema está desacoplado, $A = \lambda I$. Entonces $x_1(t) = c_1 e^{\lambda t}$,
 $x_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$.

$$X(t) = c_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $c_1 \neq 0$ podemos escribir

$$x_2(t) = \frac{c_2}{c_1} x_1(t)$$

Para $\lambda > 0$ el diagrama es



NODO (estelar) INESTABLE

Si $\lambda < 0$ el grafico es el mismo pero con las flechas apuntando al origen y tenemos un NODO (estelar) ESTABLE

Caso III $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ y No hay base de autovectores.

La solución general es $X(t) = c_1 e^{\lambda t} \mathbf{v} + c_2 e^{\lambda t} (\mathbf{v}t + \mathbf{w})$ donde \mathbf{v} es un autovector correspondiente al autovalor λ . Por lo tanto, $X(t) = y_1(t)\mathbf{v} + y_2(t)\mathbf{w}$ con

$$y_1(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t} \qquad y_2(t) = c_2 e^{\lambda t}.$$

Si $X(0) = c\mathbf{v}$ se sigue que $c_1 = c$ y $c_2 = 0$. Por lo tanto, $X(t) = c_1 e^{\lambda t} \mathbf{v}$ y la recta generada por \mathbf{v} es una trayectoria solución.

En este caso, la recta generada por \mathbf{w} no es una trayectoria solución.

Sea $c_2 \neq 0$. Usando que

$$e^{\lambda t} = \frac{y_2}{c_2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{\lambda} \log \left| \frac{y_2}{c_2} \right|.$$

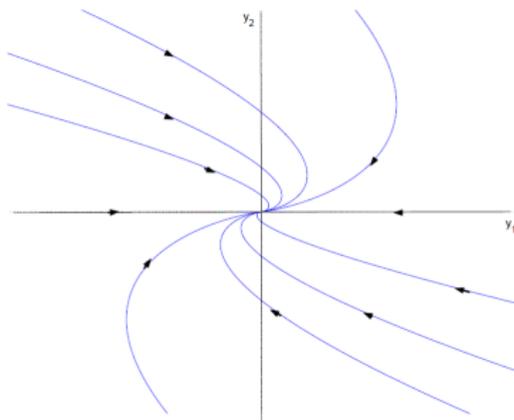
Obtenemos,

$$y_1 = y_2 \left(K + \frac{1}{\lambda} \log |y_2| \right),$$

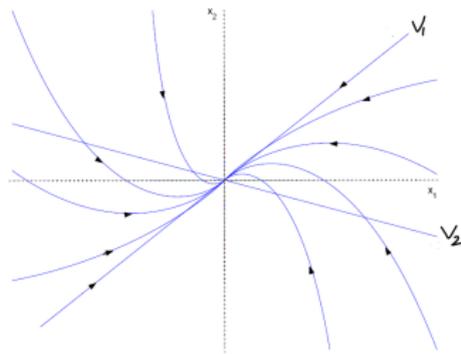
donde $K = \frac{c_1}{c_2} - \frac{1}{\lambda} \log |c_2|$.

Además y_2 no cambia de signo pero como $\log |y_2|$ tiende a $-\infty$ cuando $|y_2|$ tiende a 0 y a $+\infty$ cuando $|y_2|$ tiende a $+\infty$ se ve que y_1 sí cambia de signo.

Dibujemos las curvas $(y_1(t), y_2(t))$ en el caso en que $\lambda < 0$.

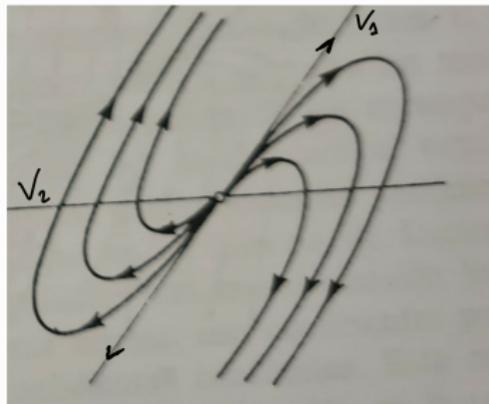
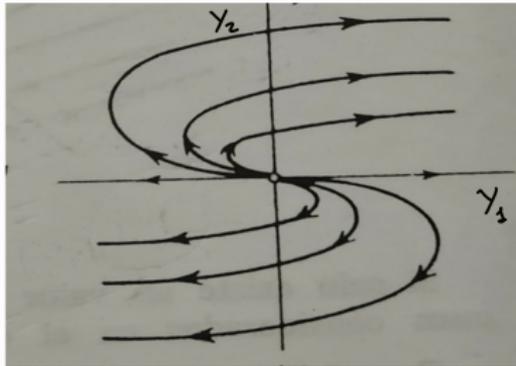


Lo que da como diagrama de fases, para el caso $\lambda < 0$,



Aquí v_1 corresponde a \mathbf{v} y v_2 a \mathbf{w} .

En el caso en que $\lambda > 0$ nos queda:



Caso IV. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$ con $\beta < 0$.

En este caso la solución real es

$X(t) = c_1 \operatorname{Re}(e^{(\alpha+i\beta)t} \mathbf{z}) + c_2 \operatorname{Im}(e^{(\alpha+i\beta)t} \mathbf{z})$ donde $\mathbf{z} = \mathbf{v} + i\mathbf{w}$ es un autovector asociado a λ_1 .

Tenemos por lo tanto

$$X(t) = c_1 e^{\alpha t} (\cos \beta t \mathbf{v} - \operatorname{sen} \beta t \mathbf{w}) + c_2 e^{\alpha t} (\operatorname{sen} \beta t \mathbf{v} + \cos \beta t \mathbf{w}).$$

Escrito en la base $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$,

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \operatorname{sen} \beta t) \mathbf{v} + e^{\alpha t} (-c_1 \operatorname{sen} \beta t + c_2 \cos \beta t) \mathbf{w} \\ &= y_1(t) \mathbf{v} + y_2(t) \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Recordemos que $X(0) = c_1\mathbf{v} + c_2\mathbf{w}$, por lo tanto $y_1(0) = c_1$,
 $y_2(0) = c_2$.

Haciendo las cuentas no es difícil ver que

$$y_1(t)^2 + y_2(t)^2 = r^2 e^{2\alpha t}$$

Entonces, cuando $\alpha = 0$ tenemos discos de radio r y cuando $\alpha \neq 0$ espirales logarítmicas.

Notar también que

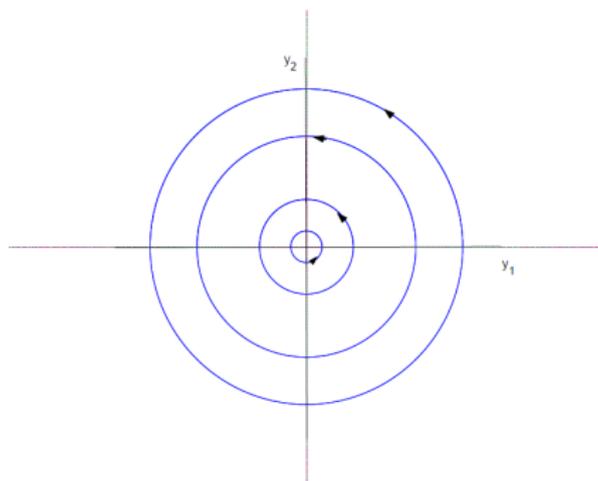
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \text{sen}(\beta t) \\ -\text{sen}(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

que nos da una rotación de (c_1, c_2) en $-\beta t$ grados en sentido anti-horario.

Por lo tanto en el plano (y_1, y_2) la curva $(y_1(t), y_2(t))$ se obtiene rotando anti-horario el punto (c_1, c_2) un ángulo $-\beta t > 0$ y luego expandiendo (o contrayendo) su módulo por un factor $e^{\alpha t}$.

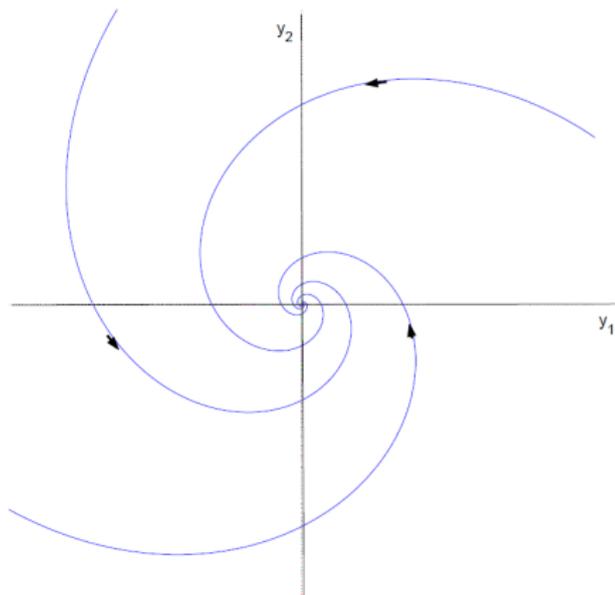
Esto da los siguientes diagramas dependiendo de α .

$$\underline{\alpha = 0}$$



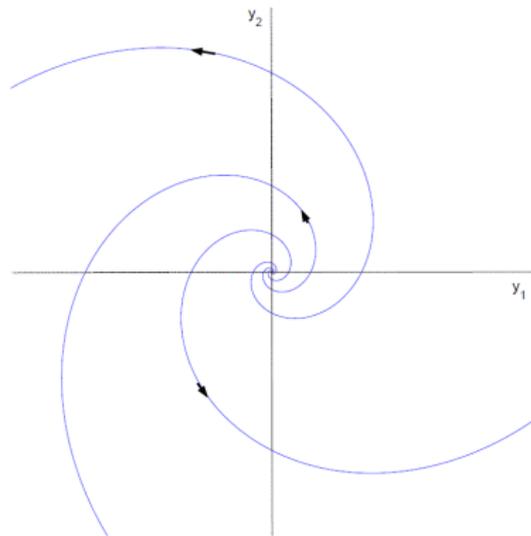
CENTRO

$$\alpha < 0$$



FOCO ESTABLE

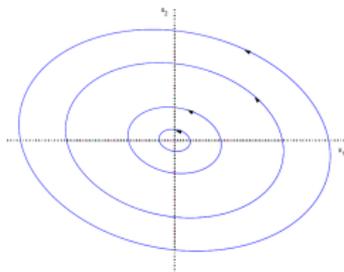
$$\underline{\alpha > 0}$$



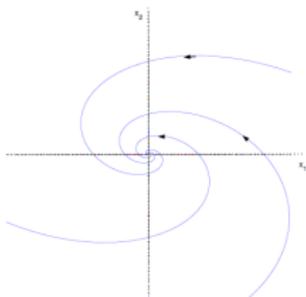
FOCO INESTABLE

En el plano de fases tenemos (las trayectorias van de \mathbf{v} a \mathbf{w})

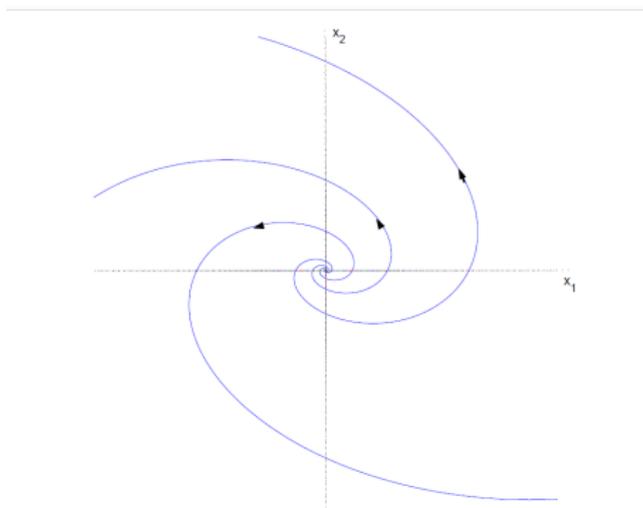
$\alpha = 0$



$\alpha < 0$



$\alpha > 0$



Comportamientos.

- Si todos los autovalores de A tienen parte real negativa, todas las trayectorias tienden a 0 cuando el tiempo tiende a $+\infty$.
- Si todos los autovalores de A tienen parte real positiva, todas las trayectorias tienden a 0 cuando el tiempo tiende a $-\infty$, es decir, se alejan de 0 cuando el tiempo avanza.

Comportamientos

- Si un autovalor es positivo y el otro negativo, hay exactamente dos trayectorias que se acercan a 0 cuando el tiempo tiende a $+\infty$. Estas trayectorias son las que corresponden a la recta de autovectores asociados al autovalor negativo.

Y hay exactamente dos trayectorias que se acercan a 0 cuando el tiempo tiende a $-\infty$ (se alejan del origen cuando el tiempo avanza). Estas trayectorias son las que corresponden a la recta de autovectores asociados al autovalor positivo.

Todas las demás trayectorias se alejan del origen tanto hacia el futuro como hacia el pasado.

Sistemas autonomos generales $X' = F(x)$

Recordemos que dos trayectorias correspondientes a datos distintos
NO se cortan

Definición: Dado el sistema autónomo $X'(t) = F(X(t))$,
 $F \in C^1$ en Ω , $X : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- Decimos que $X(t)$ es una **solución estacionaria** si
 $X(t) \equiv X_0, \forall t \in I$, i.e., X es constante.
- Decimos que X_0 es un punto de equilibrio o punto critico o punto de reposo si $F(X_0) = 0$.

OBS.

- Si $X(t) \equiv X_0$ es solución entonces $0 = X'(t) = F(X(t)) = F(X_0)$ y por ende X_0 es un punto de reposo.
- Sea ahora X_0 un punto crítico (PC) de F , considero la trayectoria $X(t) \equiv X_0$ entonces $F(X(t)) = F(X_0) = 0 = X'(t)$. Entonces las trayectorias $X(t) \equiv X_0$ con X_0 un PC son trayectorias solución del sistema.

Esto justifica porque a los PC se los llama también puntos de reposo o de equilibrio del sistema.

Idea de lo que vamos a hacer para lograr diagramas de fases de sistemas autónomos en general $X' = F(X)$

- Buscaremos los PC de F y notamos que si X_0 es un PC, i.e., $F(X_0) = 0$, como F es C^1 podemos escribir

$$F(X) = F(X_0) + DF(X_0)(X - X_0) = DF(X_0)(X - X_0)$$

El sistema no-lineal $X'(t) = F(X(t))$ se puede aproximar bajo ciertas condiciones por el sistema lineal

$$X'(t) = DF(X_0)(X - X_0)$$

Definiendo $Z(t) = X(t) - X_0$ resulta el sistema

$$Z'(t) = DF(X_0)Z(t)$$

- Para analizar el sistema no-lineal $X'(t) = F(X(t))$ (*) estudiamos el sistema

$$Z'(t) = DF(X_0)Z(t)$$

sobre el que vamos a asumir que $A = DF(X_0)$ es invertible, o sea que $\lambda = 0$ No es autovalor de A .

- Vamos a ver entonces como son los diagramas de fases para sistemas de la forma $Z'(t) = AZ(t)$, que siendo A invertible tienen a $Z = 0$ como único PC.
- A partir de este diagrama poder intuir, bajo ciertas condiciones, como es el diagrama de fases para el sistema (*).

Por ejemplo para $n = 2$ tenemos

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y) \end{cases}$$

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

y vamos a analizar los autovalores de esta matriz en cada PC de F , i.e., (x_0, y_0) tal que $f_1(x_0, y_0) = 0$ y $f_2(x_0, y_0) = 0$.

Lo que tenemos entonces es que para $X(t)$ cerca de X_0 , $X(t) - X_0$ es parecido a la solución $Y(t)$ de este sistema cerca de $Y_0 = 0$.

Teorema (Estabilidad Lineal)

Sea F un campo C^1 en \mathbb{R}^2 . Sea X_0 un cero de F . Si $DF(X_0)$ **no tiene autovalores con parte real 0**, el diagrama de fases del sistema

$$X' = F(X)$$

en un entorno de X_0 es localmente conjugado (muy parecido) al diagrama de fases del sistema

$$Y' = DF(X_0)Y$$

cerca de $Y_0 = 0$.

Comportamientos

- Si todos los autovalores de $DF(X_0)$ tienen parte real negativa se sigue que todas las trayectorias que pasan cerca de X_0 tienden a X_0 cuando t tiende a $+\infty$.
- Y si todos tienen parte real positiva, todas las trayectorias se alejan de X_0 cuando el tiempo crece ($X(t) \rightarrow X_0$ cuando $t \rightarrow -\infty$).

- Si $DF(X_0)$ tiene un autovalor $\lambda_1 > 0$ y un autovalor $\lambda_2 < 0$ hay dos trayectorias del sistema $X' = F(X)$ que tienden a X_0 cuando el tiempo tiende a $+\infty$. Estas trayectorias son tangentes en X_0 a la recta de autovectores asociados a λ_2 .

Análogamente, hay dos trayectorias del sistema $X' = F(X)$ que tienden a X_0 cuando el tiempo tiende a $-\infty$. Estas trayectorias son tangentes en X_0 a la recta de autovectores asociados a λ_1 .

Todas las demás trayectorias que pasan cerca de X_0 se alejan de X_0 tanto hacia el futuro como hacia el pasado.

Ejercicio 1: Hacer un diagrama de fases para el sistema no lineal

$$\begin{cases} x' = -x + 2xy \\ y' = -y + 3xy \end{cases}$$

Tenemos dos PC: $(0, 0)$ y $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

El $(0, 0)$ resulta ser un Nodo (estelar) estable.

El $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ un Punto silla

A partir de los gráficos del lineal aproximante estimamos el gráfico del No lineal.

Ejercicio 2: Hacer un diagrama de fases para el sistema no lineal

$$\begin{cases} x' = e^{x(1-x)} - 1 \\ y' = x^2(x-1) - 2y \end{cases}$$

Tenemos dos PC: $(0, 0)$ y $(1, 0)$.

En este caso $(0, 0)$ es un punto silla y $(1, 0)$ es un nodo estable.

A partir de los gráficos del lineal aproximante estimamos el gráfico del No lineal.