# Varios ejercicios de parciales de Matemática I (B)

- Expresar en forma exponencial el número complejo $z = \left( \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}2i}{-\sqrt{3} - i} \right)^{-4}$.

- En la región de Kanto, el equipo Rocket liberó unos gases para hacer mas dóciles a los Pokemón salvajes y poder atraparlos. Como consecuencia, se produjo un cambio en las temperaturas de las diferentes ciudades. Vamos a representar a tiempo $t$ en Pueblo Paleta como $P(t)$, la temperatura en la Ciudad de Azafrán como $A(t)$ y en la isla Canela como $C(t)$, donde $t$ representa los días transcurridos. Las temperaturas para cada ciudad vienen dadas por la siguiente dinámica:

$$\begin{pmatrix} P(t+1) \\ A(t+1) \\ C(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{6} \\ -4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(t) \\ A(t) \\ C(t) \end{pmatrix}.$$

  1. La enfermera Joy sabe que todos los Pokemón contraen gripe si la temperatura del ambiente en el que habitan es menor a 6 grados bajo cero ($-6°C$). Si las temperaturas en Ciudad Azafrán e isla Canela son de 0 grados a tiempo 0 mientras que en Pueblo Paleta es de 1 grado, ¿Hay alguna ciudad completamente enferma después de 4 dias?
  2. Si inicialmente la temperatura de cada lugar viene dada por el vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, ¿Puede pasar que los Pokemon de estas tres ciudades se enfermen después de mucho tiempo?

- Supongamos que una cadena montañosa se puede modelar como el gráfico de la función $f(x,y) = xy\sin(y) + x$ y que nos encontramos en el punto de coordenadas $(1, \pi, f(1,\pi))$.

  1. Si queremos ascender lo mas rápido posible, ¿En qué dirección debemos movernos?
  2. ¿A qué velocidad se modifica nuestra altitud si nos desplazamos en la dirección dada por el vector $v = (1,2)$?.

- Se sabe que el polinomio de Taylor de $f$ de orden 2 centrado en $x_0$ es $p(x) = 2x^2 - 7x + 9$ y que el polinomio de Taylor de $g$ de orden 2 centrado en $x_1 = 1$ es $q(x) = -x^2 + 2$.

  Si $h(x) = f(\cos(\pi x) + 2)g(e^x)$, hallar la recta tangente al gráfico de $h$ en el punto $(0, h(0))$.

- 1. Hallar la forma binomial de todos los números complejos $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen $z + 12z^{-1} = 6$.
  2. Para cada número hallado en el ítem anterior, calcular la forma exponencial de $z^4(-1-i)^{-2}$.

- Una población de roedores (consideraremos sólo a las hembras ya que en promedio son el mismo número que los machos) vive en un ambiente donde está presente una bacteria que si la adquieren los puede enfermar. Podemos dividir a la población en tres clases por cada temporada t: $N(t)$, número de roedores en los que no se encuentra la bacteria ni la adquirieron antes; $B(t)$, número de roedores afectados por la bacteria; $R(t)$, número de roedores recuperados de la bacteria que ya no la poseen y quedaron inmunizados. Se sabe que de una temporada a la otra -en cantidades promedio, para su reproducciún y pasaje entre clases-, podemos resumir la dinámica de esta población en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} N(t+1) = 0.4N(t) + 0.5B(t) \\ B(t+1) = 0.5B(t) \\ R(t+1) = 0.6N(t) + R(t) \end{cases}$$

  1. Escribir el sistema en forma matricial y decidir si la matriz de los coeficientes es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$. Justificar.
  2. Si consideramos una población inicial ($t = 0$) de 5000 roedores que nunca tuvieron la bacteria, 1000 roedores que poseen la bacteria y 4000 recuperados de la bacteria, ¿cómo será la distribución de la población después de mucho tiempo?

- Supongamos que nos encontramos en un terreno tal que en cada punto $(x, y)$ la altura viene dada por la función $f(x, y) = 2y\cos(x) - 3x\sin(y)$.
  1. Si nos encontramos en las coordenadas del plano $(0, \pi/2)$ ¿a qué altura nos encontramos? ¿En qué dirección debemos movernos para subir lo más rápido posible?¿Cuál es la tasa de crecimiento máxima?
  2. Si nos desplazamos en el plano $(x, y)$ siguiendo la trayectoria dada por la recta $\sigma(t) = t(\pi, \pi) + (0, \pi/2)$, entonces la altura a la que nos encontramos en cada instante $t$ viene dada por la función $f \circ \sigma(t)$.

     Determinar si a tiempo $t = 3$ nos encontramos ascendiendo o descendiendo. ¿Cuál es la tasa de crecimiento o decrecimiento en ese momento?

- Se sabe que el polinomio de Taylor de $f$ de orden 2 centrado en $x_0 = 5$ es $P(x) = \frac{1}{10}x^2 - 5x + \frac{21}{2}$ y el polinomio de Taylor de $g$ de orden 1 centrado en $x_1 = 4$ es $Q(x) = 7x - 25$.

  Se pide hallar la recta tangente al gráfico de la función $h$ en el punto $(1, h(1))$, donde $h(x) = g(x^2 + 3) + f'(5x)$.

| 1 | 2 | 3 | 4 | Calificación |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

**Matemática I (biología)**

Primer Cuatrimestre 2020 - Primer parcial - 03/06/2020

---

**1.** *a*) Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen la ecuación

$$\bar{z} + 4\bar{z}^{-1} = 2.$$

*b*) Expresar en forma exponencial el número complejo

$$\frac{(-1+\sqrt{3}i)^2}{2\sqrt{3}+2i}$$

---

**2.** Durante esta cuarentena el flujo de seguidores de Instagram de las cuentas más populares ha cambiado drásticamente. Debido a la gran cantidad de romances, fiestas virtuales y vivos, el número de followers puede subir en cuestion de horas. Por otro lado, los escándalos y las estafas piramidales, pueden llevar a que un influencer pierda todos sus seguidores. Si llamamos $S_a(t)$ a la cantidad de seguidores de Santiago Maratea, $S_b(t)$ a la cantidad de seguidores de Yanina Latorre, y $S_c(t)$ a los de Lizardo Ponce, a tiempo $t$. La cantidad de seguidores a tiempo $t+1$ viene dada por la dinámica

$$\begin{pmatrix} S_a(t+1) \\ S_b(t+1) \\ S_c(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 7/2 & 3 \\ 3 & -3/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_a(t) \\ S_b(t) \\ S_c(t) \end{pmatrix}.$$

a) Sabiendo que a tiempo 0 la cantidad de Seguidores de Santiago y de Lizardo es de 100 mil seguidores, mientras que la de Yanina es 0. ¿Es cierto que Lizardo llegó al millón de seguidores luego de 4 días de cuarentena?

b) Supongamos ahora que la configuración inicial de seguidores está dada por $(S_a(0), S_b(0), S_c(0)) = (100, 100, 0)$ y que pasó mucho mucho tiempo. ¿Hay algún influencer que se haya quedado sin seguidores?¿Quién?

---

**3.** La función

$$s(x,y,z) = \frac{\log(xy)}{z}$$

expresa la concentración de una sustancia $s$ en función de las concentraciones de otras 3 sustancias $x, y, z$ en una reacción química. Si en un determinado instante las concentraciones $x, y, z$ valen todas 1:

*a*) ¿En cuál dirección aumentara más rápido la concentracián $s$?

*b*) Si empezamos a cambiar las concentraciones en la dirección del vector $v = (2,1,0)$ ¿Cuál es la razón de cambio de $s$?

---

**4.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que la recta tangente al gráfico en el punto $(2, f(2))$ tiene ecuación $y = -x + 3$ y tal que $f''(2) = 5$. Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $x_0 = 1$ de la función

$$g(x) = f(x+1)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

---

*Justifique **todas** sus respuestas, no omita detalles y sea claro al escribir.*

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| | | | |

| Calif. |
|---|
| |

Apellido y Nombre:
Libreta:

---

**Matemática 1 (Biología) - Segundo cuatrimestre 2020**
**Primer Parcial - 19/10/2020**

---

1. *a*) Hallar todos los números $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^2 - 4z = -16$.

   *b*) Para todos los $z \in \mathbb{C}$ hallados en a), hallar la forma binómica de todos los números complejos $w$ tales que $w^2 = z$.

2. En un ecosistema, la dinámica a lo largo del tiempo $t$ de tres poblaciones, a las que notamos por $P_1$, $P_2$ y $P_3$, viene expresada matricialmente de la forma:

$$\begin{pmatrix} P_1(t+1) \\ P_2(t+1) \\ P_3(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinar los estados de equilibrio de esta dinámica poblacional.

   (b) ¿Qué ocurre en el transcurso del tiempo si las poblaciones iniciales están formadas por 10 individuos en la población $P_1$, 20 en la $P_2$ y 0 en la población $P_3$?

   (c) ¿Y si ahora hay 10 individuos en la población $P_1$, 20 en la $P_2$ y 10 en la $P_3$?

3. Consideremos la curva $\sigma(t) = (t^2, t)$. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable que verifica que $(f \circ \sigma)'(3) = -9$, $(f \circ \sigma)(3) = 7$ y que la derivada de $f$ en la dirección $v = (1/2, \sqrt{3}/2)$ en el punto $(9, 3)$ vale $-1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

   Hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de $f$ en el punto $(9, 3, f(9, 3))$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable, tal que su polinomio de Taylor de orden 3 centrado en $x_0 = 1$ es

$$P(x) = 2 - 3x - x^2 + x^3.$$

   Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $x_0 = 2$ de la función

$$g(x) = f'(x-1)x - f(x-1).$$

---

**Justifique todas sus respuestas.**

**Numere y escriba el número total de páginas. Entregue sus resoluciones en un solo archivo.**