

Varios ejercicios de parciales de Matemática I (B)

- 2do Parcial, primer cuatrimestre 2021.

Sea $f(x, y) = y^2x^2 - \frac{1}{3}y^2x^3 + 5y^2 - 20y$.

1. Hallar sus puntos críticos en \mathbb{R}^2 y decidir si son máximos relativos, mínimos relativos o puntos silla.
2. Hallar, si existen, máximos y mínimos absolutos de f en la región $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = 31x - 28y$$

$$y' = 35x - 32y$$

1. Hallar la solución general del sistema.
2. Describa el conjunto de condiciones iniciales que satisfacen que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$

Se introdujo una población de quokkas en la isla Twin Peaks, la cual se rige por una regla del tipo: $x' - 2x = 6$ donde $x(t)$ mide el tamaño de la población a lo largo de los años. A los 2 años la población alcanzaba los 250 ejemplares. Determinar la población inicial y en cuántos años se alcanzarán los 1000 ejemplares.

Se tiene el sistema de ecuaciones diferenciales dado por

$$x' = x^2 - 2xy + x$$

$$y' = y + 2y^2 - xy$$

Hallar los puntos de equilibrio y analizar la estabilidad de cada uno esbozando el diagrama de fases correspondiente alrededor de cada punto de equilibrio.

- 2do Parcial, segundo cuatrimestre 2021.

Sea $f(x, y) = x^2y + y^2 + y$.

Hallar los extremos absolutos de f restringida al conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4 \leq y, y \leq 0\}$

Los Minions estaban en el laboratorio haciendo un experimento con agua y una cierta sustancia secreta (la llamaron sustancia S).

Para esto, en un tanque que inicialmente tenía 20 litros de agua limpia, vertieron una solución de agua y sustancia S, de concentración de $\frac{3}{2}$ g/l, a un ritmo de 2 litros por minuto. Simultáneamente se extrae la solución a un ritmo de 2 litros por minuto.

Se pide:

- Hallar la fórmula que indica la cantidad de sustancia S a tiempo t.
- Gru entra al laboratorio 2 minutos después de haber iniciado el experimento y afirma que en ese momento hay menos de 3g de sustancia S en el tanque, ¿tiene razón?

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' = x(-1 + y - x) \\ y' = y(3 - y - x) \end{cases}$$

- Hallar los puntos de equilibrio del sistema y estudiar su estabilidad.
- Para los puntos de equilibrio con ambas coordenadas mayores a cero, hacer un dibujo esquemático de las trayectorias en el espacio de las fases, en la cercanía de esos puntos de equilibrio.

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' = 10x + 6y \\ y' = -12x - 8y. \end{cases}$$

- Hallar la solución general del sistema.
- Describa el conjunto de condiciones iniciales para que la solución satisfaga que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$.

1	2	3	4	Calificación

Matemática I (biología)

Primer Cuatrimestre 2020 - Segundo parcial - 29/07/2020

1. Luego de dormir durante todo el día, Gaturro decide levantarse de su sillón para ir a cucharatear su lasagna recién salida del microondas (cualquier similitud con Garfield es pura coincidencia). Dicha lasagna se encuentra en un pote cuya base está representada por el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 1\}.$$

Si la temperatura de la lasagna en el punto $(x, y) \in A$ está dada por la función

$$f(x, y) = -y^2 + 2x^4y + 40,$$

hallar los puntos de A de máxima y mínima temperatura.

2. Considerar la ecuación diferencial:

$$x' = \frac{x^2 - 1}{2}.$$

- a) Hallar los puntos de equilibrio y analizar su estabilidad.
b) Hallar la solución que satisface $x(0) = 0$ y el intervalo más grande donde puede definirse tal función.
-

3. Un tanque (A) contiene inicialmente 100 litros de agua pura. El tanque está conectado a otro tanque (B) que contiene una solución de 100 litros de agua con 1 kg de sal disuelta. En ese mismo instante se comienza a bombear una solución de agua y sal con un caudal de 4 litros por minuto y una concentración de 30 gramos por litro al tanque A. La disolución de los tanques circula entre ellos de modo que se bombea desde el tanque A hacia el tanque B un caudal de 3 litros por minuto y del tanque B al tanque A, un caudal de 1 litro por minuto. Además el contenido de la solución se extrae a razón de 2 litros por minuto de cada tanque. Suponiendo que en cada tanque la solución se mantiene uniformemente mezclada todo el tiempo:

- a) Encontrar la cantidad de sal en cada tanque en cualquier instante t .
b) ¿Cuánta sal habrá aproximadamente en cada tanque al cabo de mucho tiempo?
-

4. Considere el modelo de Lotka-Volterra donde x representa la densidad de la presa e y representa la densidad del depredador.

$$\begin{aligned} x' &= x \left(1 - \frac{x}{10} \right) - 4xy \\ y' &= xy - 5y \end{aligned}$$

Analice la estabilidad de los equilibrios del sistema y esboce el diagrama de fases alrededor de cada punto de equilibrio.

*Justifique **todas** sus respuestas, no omita detalles y sea claro al escribir.*