Matemática I (B) — 1^{er} cuatrimestre de 2023

Práctica 6 — Extremos de funciones en varias variables

Sugerencia I. *A lo largo de esta práctica estudiaremos los extremos de funciones de varias variables. Cuando sea posible, grafique la función en cuestión para corroborar el resultado obtenido analíticamente.*

Sugerencia II. *Al realizar cada ejercicio procure, de ser posible, reutilizar cálculos de ejercicios anteriores.*

1. Encuentre los puntos críticos de las siguientes funciones, y para cada uno de ellos, analice si la función tiene un máximo local, un mínimo local, o un punto de ensilladura.

a) $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$

b) $f(x,y) = e^{1+x^2+y^2}$

c) $f(x,y) = \ln\left(\frac{1}{1+x^2+y^2}\right)$

d) $f(x,y) = (x+1)^2 - y^2$

e) $f(x,y) = xy + 2x - 3y + 3$

f) $f(x,y) = -x^3 - y^3 + 3xy$

2. Sea $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - 3yx^2$.

a) Muestre que $(0,0)$ es punto crítico de f y calcule el Hessiano en dicho punto.

b) Muestre que f tiene un mínimo relativo en $(0,0)$ sobre cada recta que pase por $(0,0)$, es decir, si $\sigma(t) = (at, bt)$ entonces $f \circ \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en 0 para cada elección de a, b.

c) Muestre que f tiene un máximo relativo en $(0,0)$ sobre la curva $\sigma(t) = \left(t, \frac{3}{2}t^2\right)$, es decir, $f \circ \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un máximo relativo en 0. Deduzca que el origen es punto silla de f.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

a) Verifique $(0,0)$ es un punto crítico de f pero que la función no tiene un extremo relativo en dicho punto.

b) Calcule todos los extremos relativos de f, y clasifíquelos.

c) Verifique gráficamente lo obtenido.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(0,1) = 0, \quad \nabla f(0,1) = (0,2) \quad \text{y} \quad Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = 3x^2y + e^{f(x,y)} - 2y$.

a) Calcule $\nabla g(0,1)$ y $Hg(0,1)$

b) ¿Tiene g un extremo relativo en $(0,1)$?

5. Decida si existen o no números reales a tales que la función

$$f(x,y) = e^{4y-x^2} + a(x-y) + 9(x-2)(y-1)$$

tenga un mínimo relativo en el punto $(2,1)$.

6. Encuentre los puntos críticos de las siguientes funciones, y para cada uno de ellos, analice si la función tiene un máximo local, un mínimo local, o un punto de ensilladura.

a) $f(x,y,z) = xy + z^2$

b) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + z$

7. Determine los extremos relativos de f restringida a A en los siguientes casos:

a) $f(x,y) = x\cos(y)$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 2\pi\}$

b) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

8. Hallar (si es que existen) los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones $f(x,y)$ restringidas al conjunto A

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$, donde A es el borde del triángulo de vertices $(2,0)$, $(0,2)$ y $(0,-2)$.

b) $f(x,y) = xy^2$, donde A es el borde del conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$

9. Encuentre el punto de la parábola $y^2 = 4x$ cuya distancia al $(1,0)$ es mínima. Para ello parametrizar la parabola, para reducir el problema a una función de una variable

10. Considere la función $f(x,y) = x^3y$.

a) Busque los puntos (x,y) del primer cuadrante donde la función f alcanza su máximo y mínimo absoluto, sujeta a la restricción $2x + 3y = 6$.

b) Busque los puntos (x,y) donde la función f alcanza su máximo y mínimo absoluto, sujeta a la restricción $3x^2 + y^2 = 1$.

c) Busque los puntos (x,y) del primer cuadrante donde la función f alcanza su máximo y mínimo absoluto, sujeta a la restricción $3x^2 + y^2 = 1$.

Nota: el primer cuadrante incluye los semiejes $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

11. Determine los extremos absolutos de f restringida a A en los siguientes casos:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$,
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-2)^2 + y^2 = 9\}$

b) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1$,
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1\}$

c) $f(x,y,z) = x - y + z$,
$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1\}$.

12. Encuentre los puntos de las siguientes superficies más cercanos al origen.

a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x + 3y - z = 7\}$

13. La temperatura de una placa en un punto cualquiera (x,y) viene dada por la función $T(x,y) = 25 + 4x^2 - 4xy + y^2$. Una alarma térmica, situada sobre los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, se dispara a temperaturas superiores a 180 grados o inferiores a 20 grados. ¿Se disparará la alarma?

14. Considere una especie de mariposa que a lo sumo pone huevos dos veces en su vida, y que en cada ocasión pone 3 huevos. La aptitud de cada huevo depende de su tamaño t, y está dada por $h(t) = \frac{2t}{5+t}$.

Se asume que los huevos de cada nidada tienen todos el mismo tamaño, y se nota con x al tamaño de cada huevo de la primera nidada y con y al tamaño de cada huevo de la segunda.

Si la probabilidad de que la hembra sobreviva hasta poner su primera nidada es de $1/2$, y la probabilidad de que sobreviva hasta la segunda es de $1/8$, se describe entonces la aptitud reproductiva de la mariposa por medio de la función:

$$f(x,y) = \frac{3}{2}\, h(x) + \frac{3}{8}\, h(y).$$

Halle el tamaño de huevo óptimo de las dos nidadas para maximizar la aptitud reproductiva, sabiendo que los recursos disponibles para la reproducción están restringidos por la ecuación

$$x + y = 11.$$

15. Determine los extremos absolutos de

$$f(x,y) = xy\,(15 - 5y - 3x).$$

en la región triangular limitada por la recta $5y + 3x = 15$ y los ejes x e y.

16. Determine los extremos absolutos de f restringida a A en los siguientes casos:

a) $f(x,y) = x\cos(y)$,
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 2\pi\}$

b) $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$,
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -3 \leq x \leq 3,\, -3 \leq y \leq 3\}$

c) $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$,
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \leq x \leq 1,\, -1 \leq y \leq 1\}$

d) $f(x,y) = x^2 + y^2$,
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-2)^2 + y^2 \leq 9\}$

e) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1$,
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$

17. Tres alelos A, B y O determinan los cuatro grupos sanguíneos: A (AA o AO), B (BB o BO), O (OO) y AB (AB). La ley de Hardy-Weinberg establece que la proporción de individuos que lleva dos alelos diferentes es

$$P = 2pq + 2pr + 2rq$$

donde p, q y r son las proporciones de A, B y O en la población. Use el hecho de que $p + q + r = 1$ para mostrar que P vale a lo sumo $\frac{2}{3}$.

18. Considere una comunidad formada por tres especies cuyas proporciones relativas son p_1, p_2 y p_3 respectivamente. La diversidad de la comunidad se suele medir con el índice de Shannon-Weaver

$$H(p_1, p_2, p_3) = -p_1\ln(p_1) - p_2\ln(p_2) - p_3\ln(p_3)$$

donde $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Usando que $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$, observe que H se puede definir cuando $p_1 = 0$ como

$$H(0, p_2, p_3) = -p_2\ln(p_2) - p_3\ln(p_3)$$

para $p_2 > 0$ y $p_3 > 0$, y $H(0,1,0) = H(0,0,1) = 0$. Análogamente, se puede definir cuando $p_2 = 0$ o $p_3 = 0$.

Muestre que H alcanza un máximo absoluto cuando $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$.