

## Matemática I (B) — 1<sup>er</sup> cuatrimestre de 2023

### Práctica 5 — Polinomio de Taylor

#### En una variable

1. Calcule el polinomio de Taylor de las siguientes funciones, de los órdenes  $n$  indicados y en los puntos  $x_0$  dados.

a)  $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ;  $n = 1, 2, 3$ ;  $x_0 = 0, 2$

b)  $f(x) = \operatorname{sen} x$ ;  $n = 5$ ;  $x_0 = 0, \frac{\pi}{2}$

c)  $f(x) = \sqrt{x}$ ;  $n = 4$ ;  $x_0 = 4$

d)  $f(x) = \ln(1 + x^2)$ ;  $n = 1, 2, 3$ ;  $x_0 = 0$

e)  $f(x) = e^x$ ;  $n = 1, 2, 3$ ;  $x_0 = 0$

f)  $f(x) = x^2 e^x$ ;  $n = 1, 2, 3$ ;  $x_0 = 0$

Verifique que los polinomios obtenidos en a) para  $n \geq 2$  coinciden con  $f$ .

2. Sea  $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ . Para cada  $n \geq 0$ , denotemos por  $p_n(x)$  al polinomio de Taylor de  $f$  de orden  $n$  centrado en  $x_0 = 0$ .

Con la ayuda de una computadora, grafique simultáneamente para  $n = 0, 1, 2, 3$ :

- $f(x)$ ,  $-4 \leq x \leq 4$ .
- $p_n(x)$ ,  $-4 \leq x \leq 4$ .

¿Qué observa que sucede “cerca” de 0 a medida que  $n$  aumenta? ¿Y “lejos” de 0?

3. Sea  $f$  una función tal que la recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto de abscisa  $x_0 = -1$  tiene ecuación  $y = 5x + 7$ , y tal que  $f''(-1) = 3$ . Halle los polinomios de Taylor de órdenes 1 y 2 centrados en  $-1$  para  $f$ .

4. Se sabe que el polinomio de Taylor de  $f$  de orden 5 centrado en  $x_0 = -2$  es

$$p(x) = -1 + 2x - 3x^4.$$

Calcule  $f^{(n)}(-2)$  para  $0 \leq n \leq 5$ . ¿Se puede determinar a partir de estos datos cuánto vale  $f^{(6)}(-2)$ ? ¿Y cuánto vale  $f(0)$ ?

5. El polinomio de Taylor de orden 3 centrado en  $x_0 = 0$  de la función  $f$  es

$$p(x) = x^3 - 5x^2 + x + 7.$$

Halle el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en  $x_1 = 2$  para la función

$$h(x) = f(x^2 - 3x + 2).$$

6. Los polinomios de Taylor de orden 4 centrados en  $x_0 = 2$  de las funciones  $f$  y  $g$  son, respectivamente,

$$p(x) = -2 + 3(x-2) - 3(x-2)^2 + (x-2)^3, \quad q(x) = 5 + 12(x-2)^2 - 7(x-2)^4.$$

Halle el polinomio de Taylor de orden 3 centrado en  $x_0 = 2$  para la función

$$h(x) = f(x)g(x).$$

7. Se representa con  $x$  al tamaño de una cierta población, y por  $f(x)$  a la función que describe el crecimiento de esa población en función de su tamaño  $x$ . Se escribe al polinomio de Taylor de  $f$  de orden 2 centrado en  $x_0 = 0$  como

$$p(x) = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

donde  $r$  y  $K$  son constantes positivas. Expresé las constantes  $r$  y  $K$  en términos de  $f$  y sus derivadas en  $x_0 = 0$ .

*Nota:* Esta ecuación describe el llamado *crecimiento logístico*;  $r$  es la tasa de crecimiento intrínseca de la población y  $K$  es la capacidad de persistencia.

8. Para cada una de las siguientes funciones, calcule los polinomios de Taylor de los primeros órdenes centrados en  $x_0 = 0$ , y a partir de eso conjeture una fórmula para el polinomio de Taylor de orden 15.

a)  $f(x) = e^x$

c)  $f(x) = \ln(1+x)$

b)  $f(x) = \frac{1}{1-x}$

d)  $f(x) = \cos(x)$

9. Para cada una de las siguientes funciones  $f$ , calcule el polinomio de Taylor  $p$  del orden  $n$  indicado centrado en el punto  $x_0$  dado, y la correspondiente fórmula para el error. Utilizando esta fórmula, acote el error que se comete al aproximar a  $f(x_1)$  por  $p(x_1)$ .

a)  $f(x) = \sin x$ ;  $n = 2$ ;  $x_0 = 0$ ;  $x_1 = 0,3$

b)  $f(x) = \cos x$ ;  $n = 3$ ;  $x_0 = 0$ ;  $x_1 = 0,3$

c)  $f(x) = e^x$ ;  $n = 3$ ;  $x_0 = 0$ ;  $x_1 = 0,8$

*Sugerencia:* Recuerde que  $e < 3$ .

d)  $f(x) = \sqrt{x}$ ;  $n = 2$ ;  $x_0 = 4$ ;  $x_1 = 4,1$

Verifique que las cotas obtenidas son correctas, comparando los valores de  $f(x_1)$  y  $p(x_1)$  usando una calculadora.

### En varias variables

10. Para cada una de las siguientes funciones  $f$ , calcule todas las derivadas parciales de primer y segundo orden.

a)  $f(x, y) = (x + y)^2$

c)  $f(x, y) = \text{sen}(xy)$

b)  $f(x, y) = e^{x-y}$

d)  $f(x, y) = x \ln(x + y)$

11. Para cada una de las funciones del Ejercicio 10, calcule los polinomios de Taylor de órdenes 1 y 2 en los puntos  $(x_0, y_0)$  indicados.

a)  $(x_0, y_0) = (0, 0); (x_0, y_0) = (1, -2)$

c)  $(x_0, y_0) = (0, 0); (x_0, y_0) = (1, \pi)$

b)  $(x_0, y_0) = (0, 0)$

d)  $(x_0, y_0) = (1, 0)$

Verifique que los polinomios (de orden 2) obtenidos en a) coinciden con  $f$ .

12. Con la ayuda de una computadora grafique, en un entorno de  $(0, 0)$ , la función  $f(x, y) = e^{x-y}$ , junto con su plano tangente y su polinomio de Taylor de orden 2 en  $(0, 0)$ .

Repita lo hecho para la función  $f(x, y) = \text{sen}(xy)$  en  $(0, 0)$ .

13. Para cada una de las siguientes funciones  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , calcule todas las derivadas parciales de primer y segundo orden.

a)  $f(x, y, z) = \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2) + 2x - 1$

b)  $f(x, y, z) = z^2 \cos(xy)$

14. Para cada una de las funciones del Ejercicio 13, calcule los polinomios de Taylor de órdenes 1 y 2 centrado en los puntos  $(x_0, y_0, z_0)$  indicados.

a)  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0); (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$

b)  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1)$