$$(S) = \begin{cases} x(2-x-y)=0 \\ -x+3y-2xy=0 \end{cases}$$

Los puntos de equilibrio son las soluciones contantes del sistema. Para hallarlas, debemos resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x(2-x-y)=0 \\ -x+3y-2xy=0 \end{cases}$$

De la primera ecuación podemos concluir que $x = 0 \; o \; 2-x-y=0$

- **Si x=0:**

  Reemplazamos este dato en la segunda ecuación:

  $$3y = 0$$

  $$y = 0$$

  Conseguimos al punto **(0,0)**

- **Si $\mathbf{2-x-y=0}$:**

  $\mathbf{2-x=y}$

  Reemplazamos este dato en la segunda ecuación:

  $$-x+3(\mathbf{2-x})-2x(\mathbf{2-x}) = 0$$
  $$-x+6-3x-4x+2x^2 = 0$$
  $$2x^2-8x+6 = 0$$

  Usando la fórmula resolvente podemos hallar los posibles valores para x

  $$x = \frac{8 \pm \sqrt{64-4*2*6}}{4}$$

  $$x = \frac{8 \pm \sqrt{64-4*2*6}}{4}$$

  $$x = \frac{8 \pm 4}{4} \quad\rightarrow\quad x = \frac{12}{4} = 3 \qquad x = \frac{4}{4} = 1$$

Si **x=3**, entonces $2-3=y$
$-1 = y$
Conseguimos al punto **(3-1)**

Si **x=1**, entonces $2-1=y$
$1 = y$
Conseguimos al punto **(1,1)**

Los puntos de equilibrio son **(0,0)** ,**(3-1)** y**(1,1)**

Para clasificarlos, veamos si podemos usar el teorema de estabilidad lineal.

Para eso, necesitamos calcular la matriz diferencial asociada al sistema:

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 2-x-y-x & -x \\ -1-2y & 3-2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2x-y & -x \\ -1-2y & 3-2x \end{pmatrix}$$

<u>Analicemos qué tipo de equilibrio es el punto</u> (0,0)

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Se puede ver fácilmente que los autovalores de esta matriz son 2 y 3.

Como tenemos dos autovalores con parte real no nula, el teorema de estabilidad lineal nos dice que las soluciones del sistema original (lo llamamos (S)), alrededor del (0,0) se parecen a las soluciones del sistema linealizado alrededor del (0,0).

Además, en este caso la matriz asociada al sistema linealizado tiene dos autovalores reales positivos, podemos afirmar que el (0,0) es un punto de equilibrio inestable.

El ítem b nos pide esbozar el diagrama de fases para todos los puntos de equilibrio, podemos resolverlos ítems simultáneamente. Para esto, necesitamos calcular los autovectores:

- $\lambda = 2$

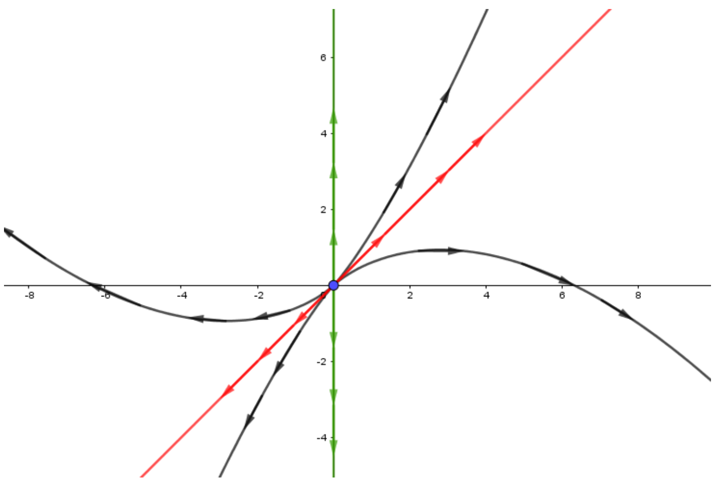
$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to -y+x=0$$
$$x = y$$
$$(x,y) = (x,x) = x(1,1)$$
$$E_2 = <(1,1)>$$

- $\lambda = 3$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) F_1 = F_2$$
$$x = 0$$
$$(x,y) = (0,y) = y(0,1)$$
$$E_3 = <(0,1)>$$

Vimos en clase que, como tenemos 2 autovalores reales positivos, en este caso debemos dibujar ramas de parábolas que están apoyadas en las semirrectas asociadas al autovalor de menor módulo (en este caso, en las semirrectas que tienen la dirección dada por el vector (1,1))

El diagrama pedido es



(notar que no tenemos que trasladarlo porque el punto de equilibrio que estamos analizando es el origen)

<u>Analicemos qué tipo de equilibrio es el punto</u> (3,-1)

$$DF(3,-1) = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Dejamos como ejercicio hallar el polinomio característico, y ver que los autovalores son

$$-3 \pm \sqrt{3}i$$

Como tenemos dos autovalores con parte real no nula, el teorema de estabilidad lineal nos dice que las soluciones del sistema original (lo llamamos (S)), alrededor del (3,-1) se parecen a las soluciones del sistema linealizado alrededor del (0,0).

Además, como en este caso la matriz asociada al sistema linealizado tiene dos autovalores con parte real negativa, podemos afirmar que el (3,-1) es un punto de equilibrio estable.

Para el diagrama de fases: Como estamos en un caso con autovalores complejos con parte real negativa sabemos que debemos dibujar elipses que se acercan al punto de equilibrio. Luego, para ver en qué sentido giran, necesitamos hallar los autovectores asociados al $-3 + \sqrt{3}i$ (recordar que en el caso de autovalores complejos nos quedamos con el autovalor con parte imaginaria positiva)

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\sqrt{3}i & -3 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3}i & 0 \end{array}\right) F_1 = -\sqrt{3}iF_2$$

$$x - \sqrt{3}iy = 0$$

$$x = \sqrt{3}iy$$

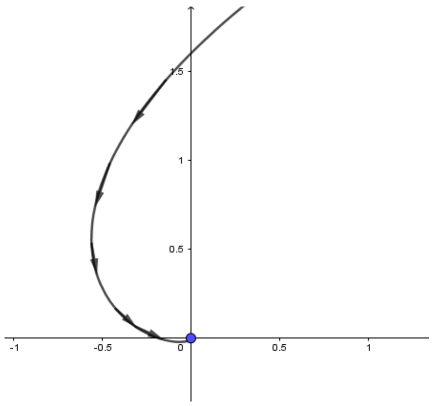
$$(x, y) = (\sqrt{3}iy, y)) = y(\sqrt{3}i, 1)$$

$$E_{-3+\sqrt{3}i} =< \left(\sqrt{3}i, 1\right) >$$

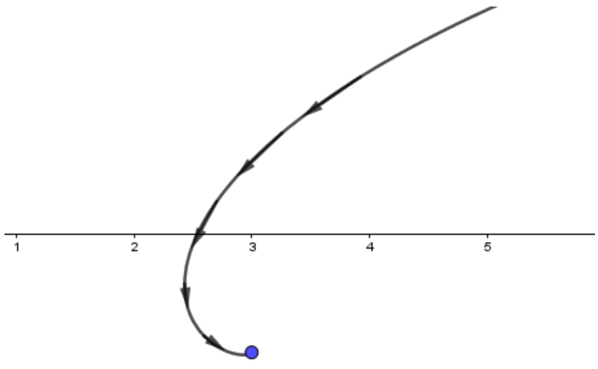
Para ver en qué sentido giran las elipses calculamos el siguiente determinante:

$det \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\sqrt{3} < 0$ Entonces giran en sentido antihorario

El diagrama de fases de sistema linealizado alrededor del (0,0) es



Lo trasladamos al (3,-1)



<u>Analicemos qué tipo de equilibrio es el punto</u> (1,1)

$$DF(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Dejamos como ejercicio hallar el polinomio característico, y ver que los autovalores son 2 y -2

Como tenemos dos autovalores con parte real no nula, el teorema de estabilidad lineal nos dice que las soluciones del sistema original (lo llamamos (S)), alrededor del (1,1) se parecen a las soluciones del sistema linealizado alrededor del (0,0).

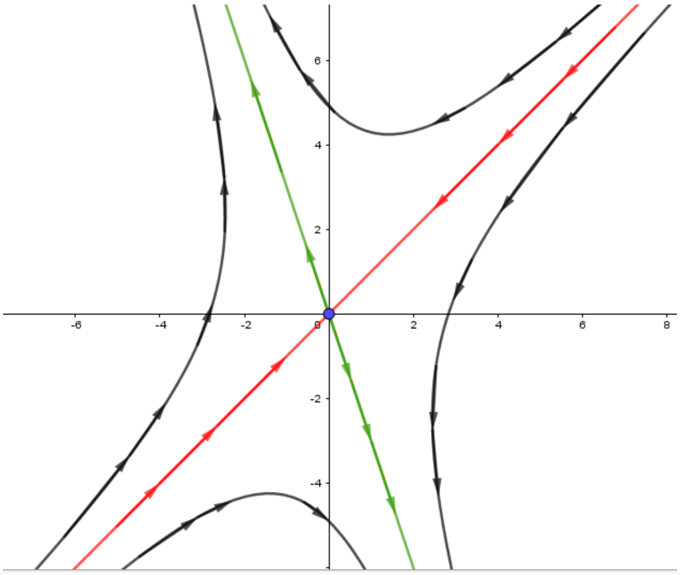
Además, como en este caso la matriz asociada al sistema linealizado tiene un autovalor real positivo, y otro autovalor real negativo, podemos afirmar que el (1,1) es un punto de equilibrio inestable.

Para esbozar el diagrama de fases, calculemos los autovectores:

• $\lambda = 2$ $\left(\begin{array}{cc\|c} -3 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{array}\right) F2 = F1$ $-3x = y$ $(x,y) = (x,-3x) = x(1,-3)$ $E_2 =< (1,-3) >$	• $\lambda = -2$ $\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{array}\right) F_2 = -3F_1$ $x = y$ $(x,y) = (x,x) = x(1,1)$ $E_{-2} =< (1,1) >$

Vimos en clase que, como tenemos 1 autovalor real positivo y otro negativo, en este caso debemos dibujar ramas de hipérbolas, cuyas trayectorias siguen las trayectorias de las semirrectas.

El diagrama de fases de sistema linealizado alrededor del (0,0) es



Lo trasladamos al (1,1)