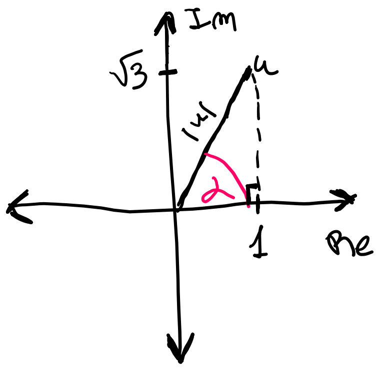
Ejemplo 2

Escribir en forma binómica el número $z \in \mathbb{C}$, $z = \frac{(1+\sqrt{3}i)^3}{(-1+i)^5}$

Voy a llamar $u = 1 + \sqrt{3}i$ y $w = -1 + i$, entonces tenemos que $z = \frac{u^3}{w^5}$

1ro, voy a escribir a *u* en forma trigonométrica y luego lo voy a elevar al cubo



$|u| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

Arg(*z*)= $\alpha \epsilon \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ porque está *u* en el 1er cuadrante:

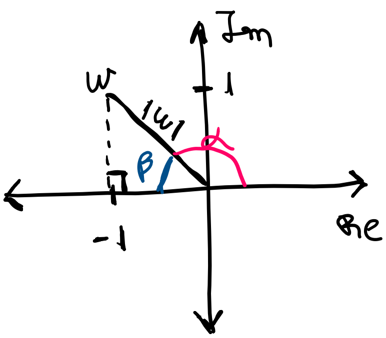
$$\left.\begin{aligned} sen(\alpha) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(\alpha) &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \alpha = \frac{\pi}{3}$$

(obs: como u está en el 1er cuadrante, no necesito un ángulo auxiliar)

Así tenemos que $u = 2\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\ sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$, entonces

$u^3 = 2^3\left(\cos\left(3\frac{\pi}{3}\right) + i\ sen\left(3\frac{\pi}{3}\right)\right)$ (teorema de De Moivre) $u^3 = 2^3(\cos(\pi) + i\ sen(\pi))$

2do, voy a escribir a *w* en forma trigonométrica y luego lo voy a elevar a la quinta



$|w| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Arg(*w*)= $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ porque está en el 2do cuadrante

voy a necesitar al ángulo auxiliar β y voy a decir que $\alpha + \beta = \pi$

$$\left.\begin{aligned} sen(\beta) &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos(\beta) &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \beta = \frac{\pi}{4}, \text{ como } \alpha + \beta = \pi \Rightarrow \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

Así tenemos que $w = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\ sen\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)$ entonces

$w^5 = (\sqrt{2})^5\left(cos\left(5\frac{3}{4}\pi\right) + i\ sen\left(5\frac{3}{4}\pi\right)\right)$ (teo de De Moivre) $w^5 = (\sqrt{2})^5\left(cos\left(\frac{15}{4}\pi\right) + i\ sen\left(\frac{15}{4}\pi\right)\right)$

3ro, voy a escribir *z* como el cociente de u^3y w^5

$z = \frac{2^3(\cos(\pi)+i\ sen(\pi))}{(\sqrt{2})^5\left(cos\left(\frac{15}{4}\pi\right)+i\ sen\left(\frac{15}{4}\pi\right)\right)}$ (Así como cuando multiplicamos dos números complejos, De Moivre dice que los argumentos se suman, cuando dividimos, los argumentos se restan)

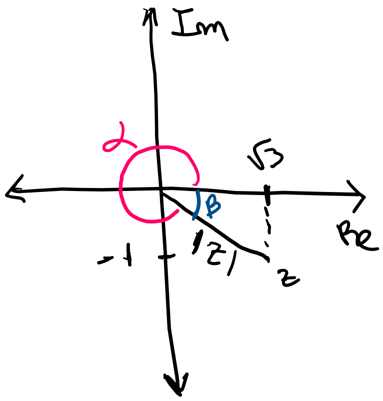
$z = \frac{2^3}{(\sqrt{2})^5}\left(cos\left(\pi - \frac{15}{4}\pi\right) + i\ sen\left(\pi - \frac{15}{4}\pi\right)\right) \Rightarrow z = \frac{8}{4\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{11}{4}\pi\right) + i\ sen\left(-\frac{11}{4}\pi\right)\right) \Rightarrow$

$z = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i\ sen\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right)$ (como el argumento había quedado negativo, sumé 4π y quedó $\frac{5}{4}\pi$)

4to, voy a escribir a z en forma binómica (como pedía el enunciado). Para eso, tengo que calcular el $cos\left(\frac{5}{4}\pi\right)$ y el $sen\left(\frac{5}{4}\pi\right)$. Así queda que $z = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) i\right) \Rightarrow z = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) i\right) \Rightarrow$ $z = -\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}\right) i \Rightarrow z = -1 - i$

<u>Ejemplo 3</u>

Escribir en forma exponencial el número $z \in \mathbb{C}$, $z = \sqrt{3} - i$



$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

Arg(z)= $\alpha \in \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$ porque está en el 4to cuadrante

voy a necesitar al ángulo auxiliar β y voy a decir que $\alpha + \beta = 2\pi$

$\left.\begin{array}{l} sen(\beta) = \frac{1}{2} \\ cos(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \beta = \frac{\pi}{6}$ como $\alpha + \beta = 2\pi \Rightarrow \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$

Así tenemos que $z = 2e^{\frac{11}{6}\pi i}$