0

En estas notas haremos lo siguiente

1) Repetimos de manera más concisa el ejemplo de resolución de la ecuación dif. lineal de primer orden con coef. constantes

$$X' = AX + B(t) \quad \text{con } A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

diagonalizable en $\mathbb{R}$ (que vimos el 12/06)

2) Resolvemos la ec. $X' = AX + B(t)$ con $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ A diagonalizable en $\mathbb{C}$ (para matrices A, $B(t)$ específicas) por el método de variación de los parametros.

Obs: Los ejemplos están resueltos de modo tal que la escritura es idéntica en ambos casos para enfatizar que no se tratan de situaciones diferentes desde el punto de vista de la teoría general de la resolución de ec. dif. lineales de 1^er orden con coeficientes constantes.

1

Ejemplo 1 (de la teórica del lunes 12/06)

$$X = AX + B(t) \text{ con } A = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -7/3 \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vimos que la sol del homogeneo $X' = AX$ es

$$X = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{-t} \\ 2e^{-2t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Planteamos var. de los parámetros para resolver $X' = AX + B(t)$

o sea proponemos que $X = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{-t} \\ 2e^{-2t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix}$

y debemos hallar $k_1(t)$ y $k_2(t)$.

Si $M(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{-t} \\ 2e^{-2t} & e^{-t} \end{pmatrix}$ vemos que $X = M(t) \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X' = M'(t) \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix} + M(t) \begin{pmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \end{pmatrix}.$$

Reemplazando en la ec. dif. $X' = AX + B(t)$

nos queda

$$\cancel{M'(t) \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix}} + M(t) \begin{pmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \end{pmatrix} = \cancel{A M(t) \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix}} + B(t)$$

(se cancelan porque $M'(t) = AM(t)$).

y nos queda entonces

$$M(t)\begin{pmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \end{pmatrix} = B(t)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \end{pmatrix} = M(t)^{-1} B(t)$$

Como $\det(M(t)) = \det\begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{-t} \\ 2e^{-2t} & e^{-t} \end{pmatrix} = e^{-3t} - 4e^{-3t}$

$= -3e^{-3t} \Rightarrow$

$$M(t)^{-1} = \frac{1}{-3e^{-3t}} \begin{pmatrix} e^{-t} & -2e^{-t} \\ -2e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} e^{2t} & -2e^{2t} \\ -2e^{t} & e^{t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M(t)^{-1}\cdot B(t) = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{2t} & -2e^{2t} \\ -2e^{t} & e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

En definitiva, nos queda $\begin{pmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3\, e^{-t} \end{pmatrix}$.

Entonces integrando nos queda $\begin{cases} k_1(t) = -1/3\, t + k_1 \\ k_2(t) = -2/3\, e^{-t} + k_2 \end{cases}$

y la sol general es $X = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{-t} \\ 2e^{-2t} & e^{-t} \end{pmatrix}}_{\text{de } 2\times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1/3\, t + k_1 \\ -2/3\, e^{-t} + k_2 \end{pmatrix}}_{\text{de } 2\times 1}$

con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

3

Ejemplo 2: $X' = AX + B(t)$ con $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$B(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t + \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix}$.

Vimos que la sol general del homogeneo $X' = AX$ es

$$X = \begin{pmatrix} -\cos t - \operatorname{sen} t & \cos t - \operatorname{sen} t \\ \cos t & \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Planteamos variación de los parametros para resolver $X' = AX + B(t)$, o sea proponemos que

$$X = \begin{pmatrix} -\cos t - \operatorname{sen} t & \cos t - \operatorname{sen} t \\ \cos t & \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix}$$, y debemos

hallar $k_1(t)$, $k_2(t)$.

Si $M(t) = \begin{pmatrix} -\cos t - \operatorname{sen} t & \cos t - \operatorname{sen} t \\ \cos t & \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$, vemos que

$$X = M(t) \cdot \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X' = M'(t) \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix} + M(t) \begin{pmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \end{pmatrix}$$

Reemplazando en la ec. ~~[illegible]~~ diferencial $X' = AX + B$ nos queda

$$\cancel{M'(t) \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix}} + M(t) \begin{pmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \end{pmatrix} = \cancel{AM(t) \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix}} + B(t)$$

(Se cancelan porque $M'(t) = AM(t)$)

y nos queda entonces

4

$$M(t)\begin{pmatrix} h_1'(t) \\ h_2'(t) \end{pmatrix} = B(t)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} h_1'(t) \\ h_2'(t) \end{pmatrix} = M(t)^{-1} \cdot B(t).$$

Como $\det(M(t)) = \det\begin{pmatrix} -\cos t - \operatorname{sen} t & \cos t - \operatorname{sen} t \\ \cos t & \operatorname{sen} t \end{pmatrix} =$

$= -\cos t \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^2 t - [\cos^2 t - \cos t \operatorname{sen} t] = -1 \Rightarrow$

$$M(t)^{-1} = -\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t & -\cos t + \operatorname{sen} t \\ -\cos t & -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

[Usamos que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$]

$$\Rightarrow M(t)^{-1} \cdot B(t) = -\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t & -\cos t + \operatorname{sen} t \\ -\cos t & -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t + \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen} t \cos t + \cos^2 t - \operatorname{sen} t \cos t \\ -\operatorname{sen} t \cos t - \cos^2 t + \cos^2 t + \cos t \operatorname{sen} t \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En definitiva, nos queda $\begin{pmatrix} h_1'(t) \\ h_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces integrando nos queda $\begin{cases} h_1(t) = -t + k_1 \\ h_2(t) = k_2 \end{cases}$ y la sol. general es

$$\begin{pmatrix} -\cos t - \operatorname{sen} t & \cos t - \operatorname{sen} t \\ \cos t & \operatorname{sen} t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -t + k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \quad \text{con } k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$