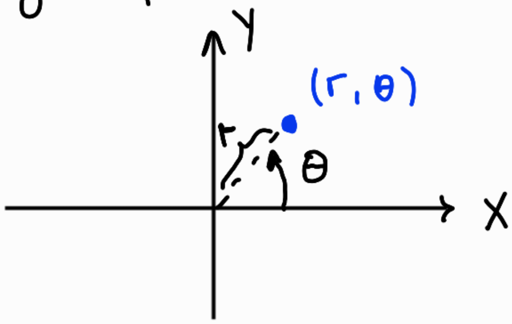
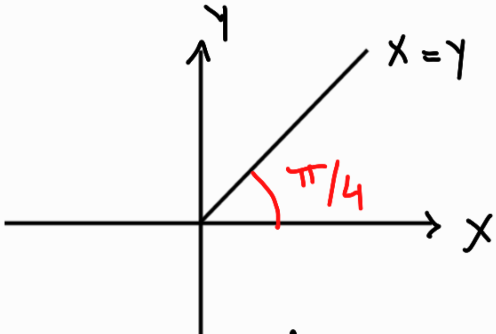
8) Les dejamos 2 ítems hechos a mano, pero pueden (y recomendamos) hacer los gráficos en Geogebra.

Recordar: En coordenadas polares,
$r(t)$ representa el radio (distancia al $(0,0)$)
$\theta(t)$ representa el ángulo (medido desde el semieje positivo de x hacia arriba)



a) $\theta(t) = \frac{\pi}{4}$ $\forall t$. El ángulo $\frac{\pi}{4}$ es el correspondiente a la semirecta $x=y$, $x,y \geq 0$



Es decir que todos los puntos $(t, \frac{\pi}{4})$ están sobre esta semirecta

Como $0 \leq t \leq 2$ y $r(t) = t$,
Tenemos $0 \leq r \leq 2$. El punto correspon

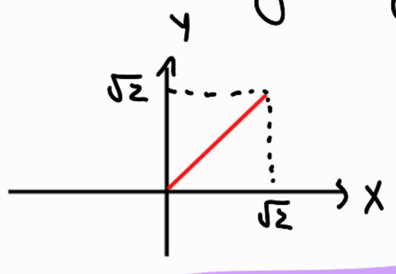
diente a $t=0$ es el $(0,0)$ (tanto en polares como en cartesianas)

Para hallar $(r(2), \theta(2)) = (2, \frac{\pi}{4})$ en cartesianas podemos usar las fórmulas de $(x(r,\theta), y(r,\theta)) = (r.\cos(\theta), r.\operatorname{sen}(\theta))$

$$\Rightarrow (x(2, \tfrac{\pi}{4}), y(2, \tfrac{\pi}{4})) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

__Obs__: También se puede calcular como el único punto de $x=y$, $x,y \geq 0$ tal que $r = x^2+y^2 = 2$

Entonces el gráfico de $(t, \frac{\pi}{4})$, $0 \leq t \leq 2$ es



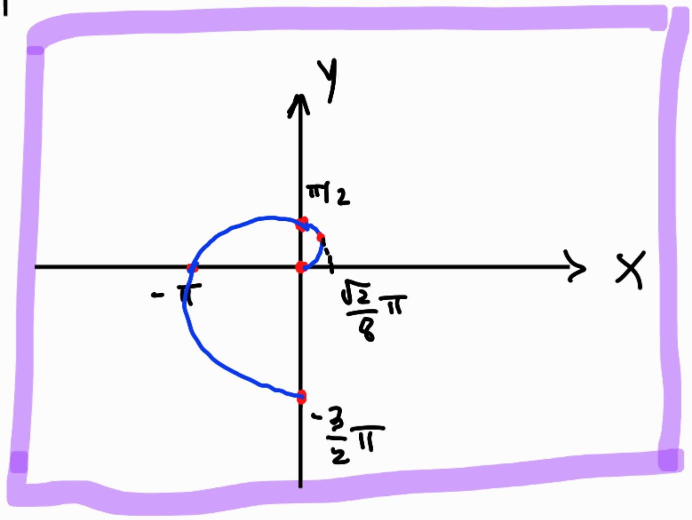
c) $r = \theta = t$, $0 \leq t \leq \frac{3}{2}\pi$

El ángulo gira desde 0 a $\frac{3}{2}\pi$ y el radio crece con este

Tengamos como referencia la siguiente tabla con algunos puntos clave:

t	(r,θ)	(x,y)
0	$(0,0)$	$(0,0)$
$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$	$(\frac{\sqrt{2}}{8}\pi,\frac{\sqrt{2}}{8}\pi)$
$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	$(0,\frac{\pi}{2})$
π	(π,π)	$(-\pi,0)$
$\frac{3}{2}\pi$	$(\frac{3}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi)$	$(0,-\frac{3}{2}\pi)$

y graficamos:

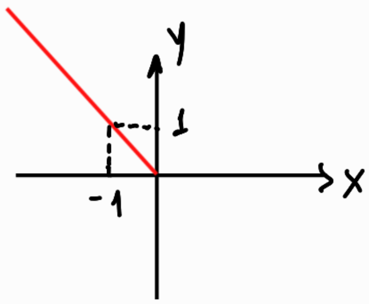


__Obs__: Es una parte de una espiral

---

9) a) $y=-x$, $y>0$

En cartesianas el gráfico es



Todos los puntos tienen ángulo

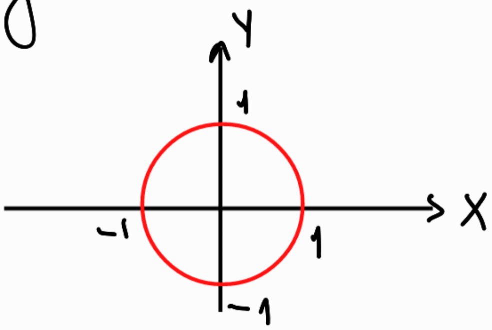
$$\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

Pero el radio se mueve libre entre 0 y $+\infty$

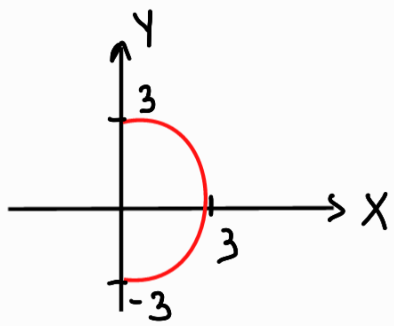
Entonces una posible parametrización en polares es

$$\boxed{\alpha(t) = (r(t), \theta(t)) = \left(t, \frac{3}{4}\pi\right) \quad \text{con} \quad t \in [0; +\infty)}$$

d) $x^2 + y^2 = 9$ describe, en cartesianas, la circunferencia de radio $\sqrt{9} = 3$



Con la restricción $x \geq 0$ queda solo la mitad derecha



Como vemos, el radio $r(t)=\sqrt{x^2+y^2}=3 \quad \forall t$

Para θ, vemos que desde el $(3,0)$ al $(0,3)$ (la parte superior) gira desde 0 a $\frac{\pi}{2}$

La parte inferior puede pensarse como que gira "hacia atrás" desde $(0,3)$ a $(0,-3)$. Es decir, θ va de 0 a $-\frac{\pi}{2}$

Juntando las dos partes obtenemos que

$$\boxed{\beta(t)=(r(t),\theta(t))=(3,t)\ ,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$$

parametriza la curva

---

10) a) El vector velocidad de $\sigma(t)$ es $\sigma'(t)$

Primero pasemos $\sigma(t)$ a coord. cartesianas

$$\sigma(t)=(x(t),y(t))=\Big(\overbrace{r(t)\cos(\theta(t))}^{x(t)}\ ;\ \overbrace{r(t)\,\mathrm{sen}(\theta(t))}^{y(t)}\Big)$$

y derivamos $\sigma'(t)=(x'(t),y'(t))$

con

$$x'(t)=r'(t)\cos(\theta(t))+r(t)(-\mathrm{sen}(\theta(t)))\cdot\theta'(t)$$

$$y'(t)=r'(t)\,\mathrm{sen}(\theta(t))+r(t)\cdot\cos(\theta(t))\cdot\theta'(t)$$

b) iii) $r(t) = 2t$, $\theta(t) = \frac{\pi}{4}t$

$\Rightarrow r'(t) = 2$, $\theta'(t) = \pi/4$

Por item (a),

$$\boxed{\sigma'(t) = \left(2 \cdot \cos\left(\tfrac{\pi}{4} \cdot t\right) - 2t \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}t\right) \cdot \tfrac{\pi}{4} ;\ 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{4} \cdot t\right) + 2t \cos\left(\tfrac{\pi}{4}t\right) \cdot \tfrac{\pi}{4}\right)}$$

c) iii) La recta tangente a $\sigma(t)$ en $t_0 = 1$ es $L : (x, y) = \lambda \cdot \sigma'(1) + \sigma(1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Obs: Necesitamos $\sigma(1)$ y $\sigma'(1)$ en coordenadas cartesianas

$$\sigma(t) = (x(t), y(t)) = (r(t) \cos(\theta(t)) ; r(t) \operatorname{sen}(\theta(t)))$$
$$= (2t \cos(\tfrac{\pi}{4}t) ; 2t \operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{4}t))$$

$$\Rightarrow \sigma(1) = \left(2 \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) ; 2 \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\sqrt{2} ; \sqrt{2}\right)$$

Y por b) tenemos que

$$\sigma'(1) = \left(2 \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - 2 \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \tfrac{\pi}{4} ;\ 2 \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + 2 \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\pi \,;\, \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\right)$$

Luego $\boxed{L : (x,y) = \lambda\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\pi \,;\, \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\right) + (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \quad \lambda \in \mathbb{R}}$

---

11) $\vec{v}_t = \vec{v}_a + \vec{v}_v$

Por lo tanto $\vec{v}_a = \vec{v}_t - \vec{v}_v$

$\vec{v}_t$ lo tenemos de 10)b)iii), pero $\vec{v}_v$ solo lo tenemos en polares. Aplicamos la fórmula para hallar sus coord. cartesianas

$$\vec{v}_v = (x,y) = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) ; 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = (\sqrt{3} \,;\, 1)$$

Entonces, $\vec{v}_a = \vec{v}_t - \vec{v}_v$

$$\boxed{\vec{v}_a = \left(2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot t\right) - 2t\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}t\right)\cdot\frac{\pi}{4} - \sqrt{3} \,;\, 2 \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot t\right) + 2t\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\cdot\frac{\pi}{4} - 1\right)}$$

---

12) Tenemos que $\theta(t) = \frac{\pi}{4}\cos(\sqrt{2}\,t)$

Queremos calcular $\omega(t) = \theta'(t)$

y $\alpha(t) = w'(t) = \theta''(t)$

$w(t)$

·) $\theta'(t) = \frac{\pi}{4}\left(-\operatorname{sen}(\sqrt{2}\,t)\right)\cdot\sqrt{2} = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi \operatorname{sen}(\sqrt{2}\,t)}$

·) $\theta''(t) = \left(\theta'(t)\right)' = -\frac{\pi}{4}\cdot\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}\,t)\cdot\sqrt{2}$

$= \boxed{-\frac{\pi}{2}\cos(\sqrt{2}\,t)}$ $\alpha(t)$