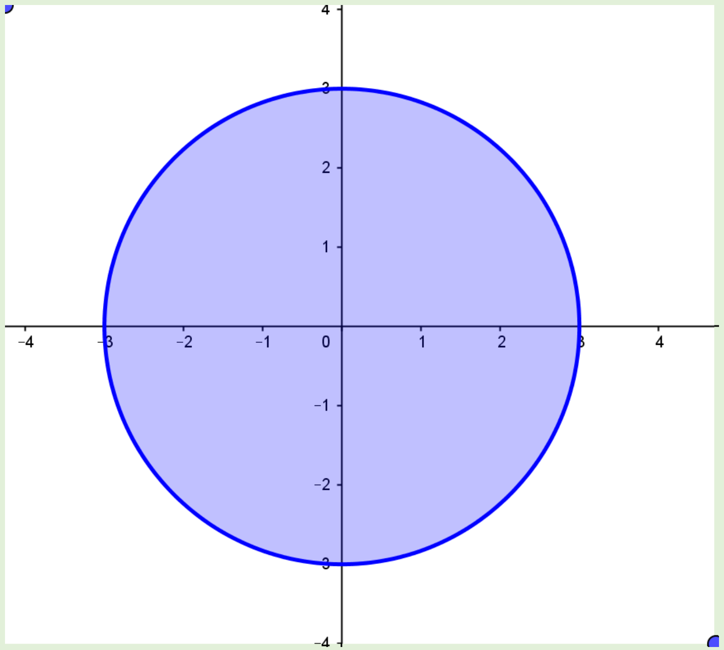
13. Determine y grafique el dominio para cada una de las siguientes funciones. Grafique, si es posible, las curvas de nivel $f(x,y) = c$, para cada uno de los valores de c indicados.

En los casos 13b y 13d, grafique *todas* las curvas de nivel, y con esta información esboce el gráfico de la función.

$f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ $\quad c = 0; \; c = \sqrt{5}; \; c = -1$



Calculemos el dominio de la función:

Necesitamos que $9 - x^2 - y^2 \geq 0$

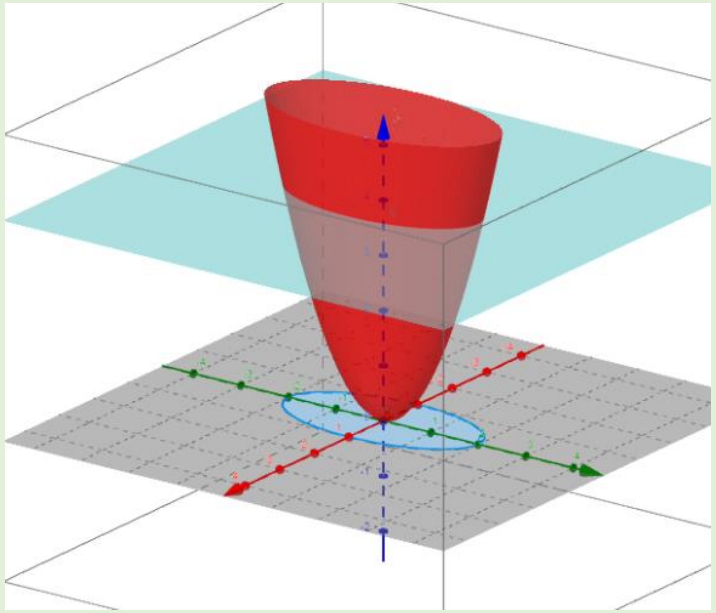
$$9 \geq x^2 + y^2$$

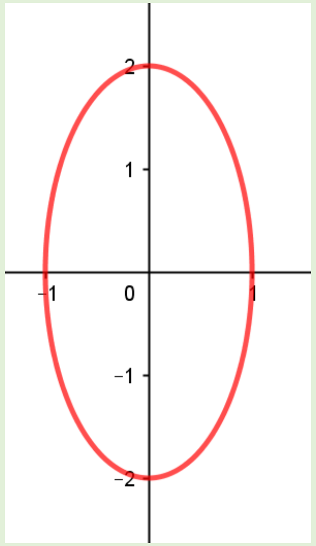
Luego:

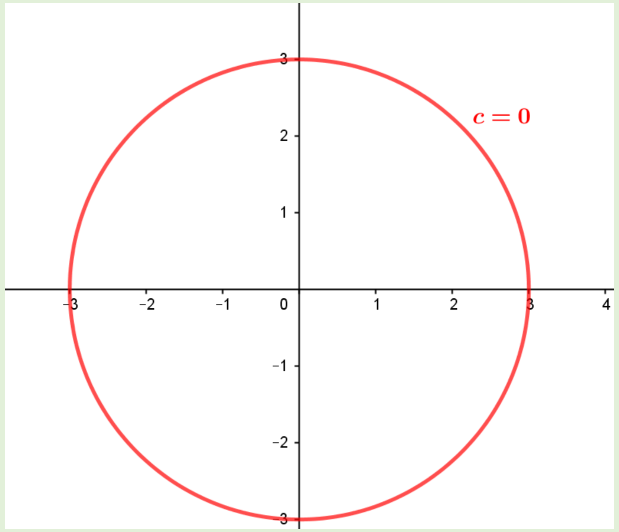
$$Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$$

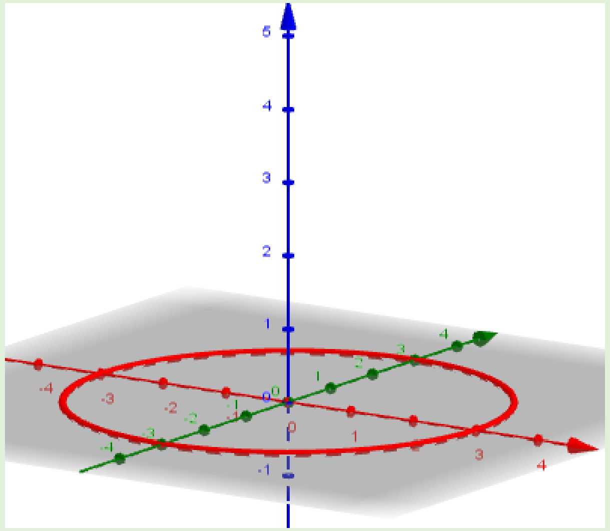
Curvas de nivel:

Curva de nivel c: $\mathcal{C}_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$









- c=0.

Buscamos los pares $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(x,y)$=0

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = 0$$
$$9 - x^2 - y^2 = 0$$
$$9 = x^2 + y^2$$

$\mathcal{C}_0$ es una circunferencia centrada en (0,0), y radio 3

- c=-1.

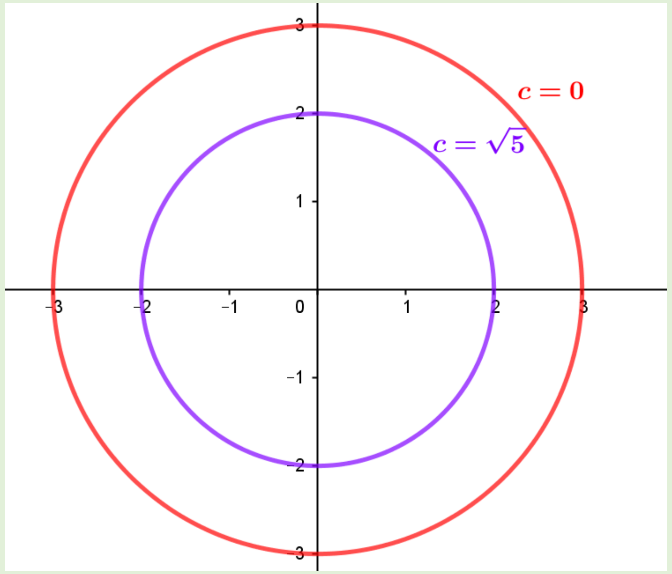
Buscamos los pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(x, y)$=-1

$$\sqrt{9-x^2-y^2} = -1$$

≥ 0 $\quad$ < 0

ABS!

No vemos gráfico a nivel -1.

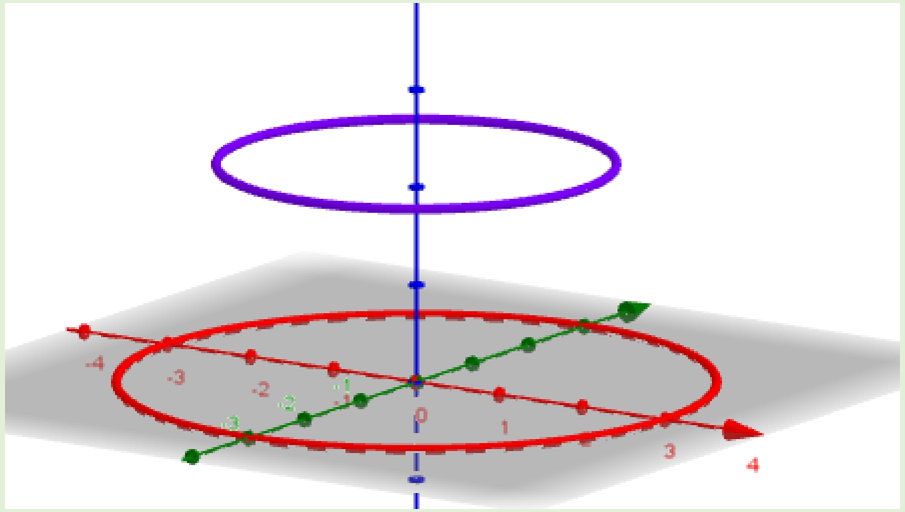


Vamos a ver gráfico para valores c ≥ 0

- $c = \sqrt{5}$.

Buscamos los pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(x, y) = \sqrt{5}$

$$\sqrt{9-x^2-y^2} = \sqrt{5}$$
$$9-x^2-y^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$$
$$9-x^2-y^2 = 5$$
$$9-5 = x^2+y^2$$
$$4 = x^2+y^2$$



$\mathcal{C}_{\sqrt{5}}$ es una circunferencia centrada en (0,0), y radio 2

- $\boldsymbol{c \geq 0}$

Buscamos los pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(x, y) = \mathrm{c}$

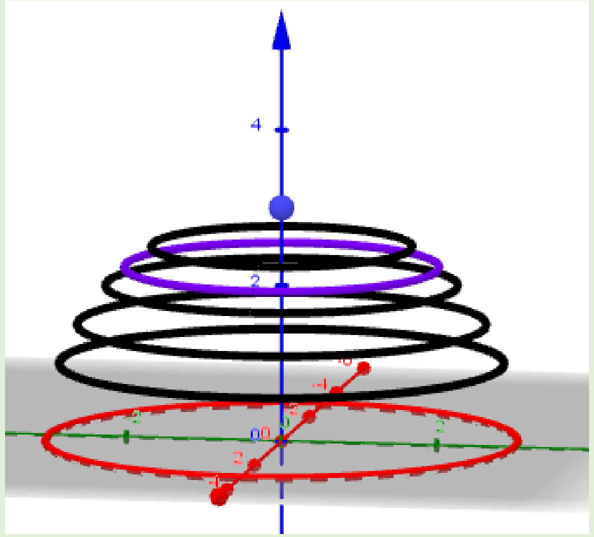
$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = c$$
$$9 - x^2 - y^2 = c^2$$
$$9 - c^2 = x^2 + y^2$$

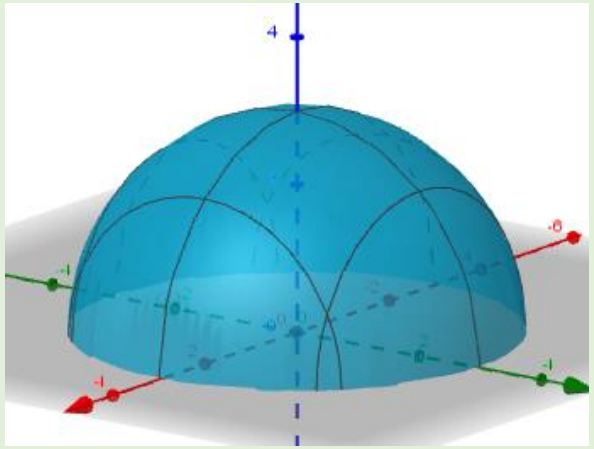
Para que esto tenga sentido, necesitamos que $9 - c^2 \geq 0$

$$9 \geq c^2$$
$$3 \geq \sqrt{c^2} \longleftarrow \text{Usamos que } \boldsymbol{c \geq 0}$$
$$3 \geq c$$

Vamos a ver gráfico a altura c con $c \in [0,3]$

$\mathcal{C}_c$ es una circunferencia centrada en (0,0), y radio $\sqrt{9 - c^2}$

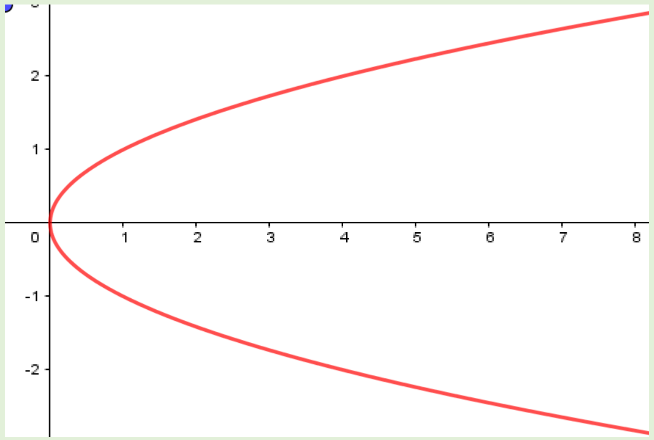




Para ej. 14:

¿Qué significa que una superficie sea el gráfico de una función?

Idea:



No es el gráfico de una función.

Ejemplo: $z = x^2 + y^2$

Es el gráfico de una función, pues para cada par (x,y), hay un **único valor de z.**

Luego, podemos pensar que la función es $f(x,y) = x^2 + y^2$

Ejemplo: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$z^2 = 1 - x^2 - y^2$$
$$|z| = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Si (x,y)=(0,0)

$$0^2 + 0^2 + z^2 = 1$$
$$z^2 = 1$$
$$|z| = 1$$
$$z = \pm 1$$

Como para (0,0) no hay un único valor de z, esta superficie no es el gráfico de una función $f(x,y)$

Superficies de nivel:

Hoy vimos que si $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

Curva de nivel c: $\mathcal{C}_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$

Si $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

Superficie de nivel c: $\mathcal{C}_c = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = c\}$

Ejemplo: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$\mathcal{C}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$