

Práctica 7

Cálculo de integrales reales mediante residuos

1. Calcular

$$\text{a) } \int_0^\pi \frac{\cos(2\theta)}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta, \quad a^2 < 1 \qquad \text{b) } \int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2}, \quad a > 1$$

2. Probar que

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\text{b) } \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

3. Calcular

$$\text{a) } \int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx$$

$$\text{b) } \int_0^\infty \frac{\cos x - 1}{x^2} dx$$

4. Calcular el valor principal de:

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3 - 4x^2 + 5x}$$

$$\text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx$$

5. Calcular $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} dx$ considerando la función $\frac{1 - e^{2iz}}{z^2}$ y aplicando el teorema de los residuos sobre un recinto apropiado.

6. Probar que:

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-iwx} dx = \sqrt{\pi} e^{-\frac{w^2}{4}}$$

$$\text{b) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(wx)}{1 + x^2} dx = \pi e^{-|w|}.$$