

Práctica 5

Integrales complejas y fórmulas de Cauchy

1. Calcular

a) $\int_0^{\pi/4} e^{it} dt$ b) $\int_0^{\infty} e^{-zt} dt$ ($\operatorname{Re}(z) > 0$) c) $\int_1^2 \log(it) dt$

2. a) Sean γ, σ las poligonales de vértices $\{1, i\}$ y $\{1, 1+i, i\}$ respectivamente. Hallar una parametrización de γ y de σ y calcular $\int_{\gamma} f$ y $\int_{\sigma} f$, donde $f(z) = |z|^2$.

b) Deducir que en el plano complejo deja de ser cierto que toda función continua tiene primitiva.

3. Calcular: $\int_{\gamma} 3z dz$ y $\int_{\gamma} 3|z| dz$, para

a) γ : segmento que une -1 con 1 .

b) γ : $|z| = 1$ de -1 a 1 , recorrido en el sentido horario.

c) γ : $|z| = 1$ de -1 a 1 , recorrido en el sentido antihorario.

d) γ : poligonal de vértices $-1, i, 1$.

4. Calcular

a) $\int_C e^z dz$, si $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, recorrida una vez en sentido horario.

b) $\int_0^1 x dz$, uniendo ambos puntos con un segmento y luego con la poligonal de vértices: $0, i, 1$.

c) $\int_{|z-a|=r} (z-a)^m dz$ para cada $m \in \mathbb{Z}$, recorriendo la curva una vez en sentido horario.

5. Sea γ el polígono cerrado de vértices: $1-i, 1+i, -1+i, -1-i, 1-i$.

Hallar $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$.

6. Sean $D \subset \mathbb{C}$ abierto, $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ diferenciable a trozos y $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Se define:

$$\int_{\gamma} f |dz| = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$$

- a) ¿Qué se obtiene cuando $f \equiv 1$?
- b) Calcular $\int_{\gamma} |dz|$ para $\gamma : |z - a| = r$.
- c) Probar que $\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \int_{\gamma} |f| |dz|$ y deducir que si $|f(z)| \leq M$ y $\ell = \text{long}(\gamma)$, entonces $\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq M\ell$.

7. Calcular

a) $\int_{\gamma} x dz$, γ : segmento de 0 a $1 + i$

b) $\int_{|z|=1} |z - 1| |dz|$

c) $\int_{C_i} z^n dz$ ($a \in \mathbb{R}_{>0}, n \in \mathbb{N}$)

$$C_1 : z(t) = ae^{it}, 0 \leq t \leq \pi; \quad C_2 : z(t) = ae^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

d) $\int_{C_i} \frac{dz}{z - 2}$ $C_1 : |z - 2| = 4; \quad C_2 : |z - 1| = 5$

e) $\int_{\gamma} (x^2 + iy^2) |dz|$ $\gamma : |z| = 2$

f) $\int_{|z-1|=1} \bar{z}^2 dz$

8. Hallar $\int_{\gamma} z^{-\frac{1}{2}} dz$, donde:

a) $\gamma : |z| = 1, \text{Im}(z) \geq 0$, de 1 a -1 .

b) $\gamma : |z| = 1, \text{Im}(z) \leq 0$, de 1 a -1 .

9. Sea $\gamma(t) = 1 + e^{it}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. Hallar

a) $\int_{\gamma} (z^2 - 1)^{-1} dz$.

b) Idem para $\gamma(t) = 2e^{it}$, $-\pi \leq t \leq \pi$.

10. Sea f holomorfa en un abierto conexo Ω tal que $|f(z) - 1| < 1$ en Ω . Mostrar que

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0 \text{ para cualquier curva cerrada } \gamma \text{ contenida en } \Omega.$$

Nota: f' es continua.

11. Sean $f : \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ la rama principal del logaritmo y $g : \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ la rama del logaritmo que verifica $g(1) = 2\pi i$.

Comparar $\int_{\gamma} f(z) dz$ y $\int_{\gamma} g(z) dz$, siendo $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$ una curva que une 1 con i .

12. Determinar el dominio de holomorfía de la función f y aplicar el teorema de Cauchy-Goursat para demostrar que $\int_C f(z) dz = 0$ cuando $C : |z| = 1$, siendo:

a) $f(z) = ze^{-z}$

b) $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2}$

13. Calcular

a) $\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2} dz$, $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

b) $\int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z^3} dz$, $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

c) $\int_{\gamma} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n} dz$, $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $n \in \mathbb{N}$

d) $\int_{\gamma} \frac{dz}{(z - \frac{1}{2})^n}$, $\gamma(t) = \frac{1}{2} + e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $n \in \mathbb{N}$

e) $\int_{\gamma} \frac{\log z}{z^n} dz$, $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $n \geq 0$.

f) $\int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 4)} dz$, $\gamma(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $r \in \mathbb{R}_{>0} - \{2\}$.

14. Desigualdades de Cauchy

- a) Sea f holomorfa en $B(a, R)$ y tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in B(a, R)$. Probar que en tal caso:

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}$$

- b) Mostrar que las derivadas sucesivas de una función holomorfa en un punto z no pueden satisfacer:

$$|f^{(n)}(z)| > n! \cdot n^n$$

15. Sea f entera y tal que $|f(z)| \leq A + B|z|^k$ para todo $z \in \mathbb{C}$, $A, B \in \mathbb{R}_{>0}$. Probar que f es un polinomio.

Deducir que si f es una función entera tal que para algún $k \geq 0$, $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z)}{z^k} \right| = 0$, entonces f es un polinomio de grado menor que k (si $k > 0$) o $f \equiv 0$ (si $k = 0$).

Deducir además que si f es entera y acotada entonces f es constante.

16. Hallar todas las f holomorfas en $|z| \leq 1$ tales que $|f(z)| \leq \sqrt{5}$ cuando $|z| = 1$ y $f(\frac{1}{3}) = 2 + i$.
17. ¿Existe f holomorfa en $|z| < 1$ tal que $f(\frac{1}{2^n}) = \frac{(-1)^n}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$?
18. Encontrar los desarrollos en serie de Taylor alrededor del punto a , para:
- a) $\frac{e^z - 1}{z}, a = 0$
b) $ze^z, a = -1$
- c) $(z + 1)^{-1}, a = 1$
d) $\frac{1 - z}{(z + 1)^3}, a = 0$
19. Desarrollar la función $f(z) = z^{-1}$ en serie de potencias de $z + 1 - i$. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie hallada?
20. Probar que si la serie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ es convergente en $|z - z_0| < r$, entonces la serie $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$ es convergente en este disco y su suma es una primitiva de f . ¿Prueba esto que toda función holomorfa en un abierto Ω admite primitiva en todo Ω ?
21. a) Calcular, sin efectuar el desarrollo, el radio de convergencia de las series de Taylor de las siguientes funciones en los puntos indicados
- (i) $\frac{1}{\operatorname{sen}(1 + iz)}$ en $z = 0$
(ii) $\frac{1}{\operatorname{sen} z}$ en $z = \frac{3}{2} - i$
- b) Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. ¿Se puede encontrar siempre una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $z_0 \in \Omega$, tal que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ en Ω ?
22. a) Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tal que restringida a \mathbb{R} tiene radio de convergencia ∞ . Probar que f es entera.
- b) Dar una interpretación del hecho que la función real $\frac{1}{1 + x^2}$ es indefinidamente derivable en \mathbb{R} pero no es desarrollable en serie de potencias de radio ∞ .