

Notas de Análisis Complejo para Mate 4 (2021)

Daniel Suárez

Julio del 2021

1. Propiedades elementales de los números complejos

Definición 1.1. El *conjugado* de $z = x + iy \in \mathbb{C}$ es el número complejo $\bar{z} = x - iy$. Por otro lado, se define la *norma o módulo* de z como $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Notar que $z\bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0$. Más aún

$$|z| = \|(x, y)\|_{\mathbb{R}^2}.$$

Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$ entonces se dice que $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$. Cuentas elementales muestran que:

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Como $|z| = |x + iy| = \|(x, y)\|_{\mathbb{R}^2}$, entonces $|z|$ es una norma en \mathbb{C} : dados $z, w \in \mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ Como es usual, a partir del módulo se puede definir una distancia en \mathbb{C} como

$$d_{\mathbb{C}}(z, w) = |z - w|.$$

A partir de operaciones elementales se pueden obtener las desigualdades:

$$\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|.$$

Dicho de otro modo, si $z = x + iy$ entonces:

$$\max\{|x|, |y|\} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|.$$

2. Propiedades topológicas del plano complejo

Como espacio métrico, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ se identifica con $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$, de modo que los abiertos, cerrados, puntos interiores, clausura, etc., de \mathbb{C} son los mismos que en \mathbb{R}^2 . En particular, las nociones de convergencia coinciden.

Proposición 2.1. Sea $f(z)$ una función definida en un abierto $A \subseteq \mathbb{C}$ y $z_0 \in A$. Entonces son equivalentes:

- (i) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \ell$;
- (ii) $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}(\ell)$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im}(f(z)) = \operatorname{Im}(\ell)$.

Idea de la demostración. Basta recordar que

$$\max\{|\operatorname{Re}(f(z) - \ell)|, |\operatorname{Im}(f(z) - \ell)|\} \leq |f(z) - \ell| \leq |\operatorname{Re}(f(z) - \ell)| + |\operatorname{Im}(f(z) - \ell)|.$$

□

Definición 2.2. Dada una función $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y $z_0 \in D$, se dice que f es continua en z_0 si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $z \in D$:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Diremos que es continua en D si lo es para todos los puntos de D .

Corolario 2.3. Una función f es continua en z_0 si y sólo si $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ son continuas en z_0 .

Si $F \subseteq \mathbb{C}$ y $F \neq \emptyset$, entonces $(F, d_{\mathbb{C}}(\cdot, \cdot))$ es un espacio métrico, y por lo tanto, se pueden definir los discos relativos: dado $z_0 \in F$ y $r > 0$

$$D_F(z_0, r) = \{z \in F : |z - z_0| < r\}.$$

Entonces, tiene sentido hablar de subconjuntos de F abiertos, cerrados, etc, relativos a F . Recordar que los abiertos (resp. los cerrados) relativos a F no son otra cosa que los abiertos (resp. los cerrados) de \mathbb{C} intersecados con F .

Ejemplo 2.4. Sean $F = \{z : \operatorname{Re} z \leq 0\}$ y $A = \{z : \operatorname{Re} z \leq 0 \text{ y } |z| < 1\}$. Entonces

$$\overline{A}^F = \{z : \operatorname{Re} z \leq 0 \text{ y } |z| \leq 1\},$$

mientras que $A^{\circ(F)} = A$.

Una caracterización alternativa de las funciones continuas en términos de conjuntos abiertos es la siguiente:

Proposición 2.5. Sea $f : M \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Entonces f es continua si y sólo si $f^{-1}(U)$ es un abierto relativo en M para todo abierto U de \mathbb{C} . Aquí es equivalente reemplazar abiertos relativos por cerrados relativos.

Conjuntos compactos

Definición 2.6. Un conjunto $K \subseteq \mathbb{C}$ se dice **compacto** si para toda colección de abiertos \mathcal{U} tal que

$$K \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U,$$

existe una subcolección finita $\{U_1, \dots, U_n\}$ tal que $K \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n$.

Una familia \mathcal{U} como en la definición anterior se denomina **cubrimiento por abiertos**.

Teorema 2.7. Dado un conjunto $K \subseteq \mathbb{C}$ son equivalentes:

- (i) K es compacto;
- (ii) Toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente a un punto de K .

Puesto que $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ se identifica con $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\mathbb{R}^2})$, vale el Teorema de Heine-Borel.

Teorema 2.8 (Heine-Borel). Un subconjunto K de \mathbb{C} es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Repasemos ahora como se relacionan las nociones de compacidad y continuidad.

Teorema 2.9. Una función continua manda conjuntos compactos en conjuntos compactos.

Demostración. Sea K un conjunto compacto contenido en el dominio de una función continua f . Dado un cubrimiento por abiertos \mathcal{U} de $f(K)$. Luego,

$$K \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} f^{-1}(U).$$

Como cada $f^{-1}(U)$ es (relativamente) abierto, existen U_1, \dots, U_n tales que

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^n f^{-1}(U_k),$$

y por ende

$$f(K) \subseteq \bigcup_{k=1}^n f(f^{-1}(U_k)) \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_k.$$

□

Corolario 2.10 (Weierstrass). Si $K \subseteq \mathbb{C}$ es compacto y $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces, f alcanza su máximo y mínimo.

Ejercicio 1. Sean $K \subseteq U \subseteq \mathbb{C}$ tales que K es compacto y U es abierto. Entonces la distancia de K a la frontera ∂U es positiva. (Sugerencia: considerar la función $d(z, \partial U) = \min_{w \in \partial U} |z - w|$).

Teorema 2.11. Si $K \subseteq \mathbb{C}$ es compacto y $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ continua, entonces f es uniformemente continua, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo par de puntos $z, w \in K$ tales que $|z - w| < \delta$ se tiene que $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $z \in K$ existe un $\delta_z > 0$ tal que

$$|w - z| < \delta_z \Rightarrow |f(w) - f(z)| < \varepsilon/2.$$

Consideremos el cubrimiento por abiertos de K dado por los discos $D(z, \delta_z/2)$. Por la compacidad de K existen z_1, \dots, z_n tales que

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^n D(z_k, \delta_{z_k}/2).$$

Sea δ el mínimo de los $\delta_{z_k}/2$, y tomemos $z, w \in K$ tales que $|z - w| < \delta$. Si z_k es tal que $|z - z_k| < \delta_{z_k}/2$, por la desigualdad triangular, $|w - z_k| < \delta_{z_k}$. En consecuencia:

$$|f(z) - f(w)| \leq |f(z) - f(z_k)| + |f(z_k) - f(w)| < \varepsilon.$$

□

Conjuntos conexos

Definición 2.12. Un conjunto $F \subseteq \mathbb{C}$ se dice **conexo** si cada vez que $F = A \cup B$, con A y B abiertos relativos disjuntos, resulta que $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.

Una definición equivalente es:

Definición 2.13 (Definición alternativa). Un conjunto $F \subseteq \mathbb{C}$ se dice **conexo** si cada vez que $A \subseteq F$ es abierto y cerrado relativo, entonces $A = F$ o $A = \emptyset$.

Ejemplos 2.14.

- Los intervalos son (los únicos) conjuntos conexos en \mathbb{R} ;
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es desconexo, mientras que $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ es conexo.

Proposición 2.15. Sea $f : M \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Si M es conexo entonces $f(M)$ también lo es.

Idea de la demostración. Sea $A \subseteq f(M)$ abierto y cerrado relativo. Como f es continua, entonces $f^{-1}(A)$ es abierto y cerrado relativo en M . Por lo tanto, como M es conexo, $f^{-1}(A) = M$ o $f^{-1}(A) = \emptyset$. En el primer caso resulta que $A = f(M)$, mientras que en el segundo caso sólo se puede dar si $A = \emptyset$. \square

Corolario 2.16. Toda curva continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tiene imagen conexa. En particular, el segmento que une $z_0 \in \mathbb{C}$ con $z_1 \in \mathbb{C}$:

$$\gamma(t) = (1 - t)z_0 + tz_1,$$

para $t \in [0, 1]$, es conexo.

Observación 2.17. El teorema de Bolzano es un caso particular del corolario anterior.

Proposición 2.18. Cualquier unión de conexos con un punto en común es conexo.

Definición 2.19. Sea $M \subseteq \mathbb{C}$ y $z_0 \in M$. La **componente conexa** de z_0 en M se define como

$$C_{z_0} := \bigcup \{A \subseteq M : z_0 \in A \text{ y } A \text{ es conexo}\}.$$

El conjunto C_{z_0} resulta ser el conexo más grande contenido en M que contiene al z_0 .

Lema 2.20. Si $z_1 \in C_{z_0}$, entonces $C_{z_1} = C_{z_0}$.

Luego, $z \sim w$ si $C_z = C_w$, resulta ser una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia son precisamente los conjuntos C_z , los cuales en particular forman una partición de M .

Una clase particular de conjuntos conexos son los denominados conexos por caminos:

Definición 2.21. Un **camino o arco** en \mathbb{C} es una función continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Si además γ es una unión finita de segmentos, se llama **poligonal**.

Supongamos ahora que $\alpha, \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ son dos caminos tales que $\alpha(1) = \gamma(0)$. Entonces podemos pegarlos del siguiente modo:

$$(\alpha \vee \gamma)(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \gamma(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases},$$

obteniendo un nuevo camino. Notar que si α y γ son poligonales, entonces $\alpha \vee \gamma$ también lo será. Si los caminos están parametrizados por distintos intervalos, se pueden reparametrizar convenientemente, y luego pegar.

Definición 2.22. Se dice que $M \subseteq \mathbb{C}$ es **conexo por arcos** si para todo par de puntos $a, b \in M$ existe un arco $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$.

Análogamente, si en esta definición reemplazamos el arco por una poligonal obtenemos la definición de conjunto **conexo por poligonales**. Claramente se tiene que:

$$\text{Conexo por poligonales} \implies \text{Conexo por arcos} \implies \text{Conexo}.$$

Proposición 2.23. Una función continua manda conjuntos conexos por arcos en conjuntos conexos por arcos.

Proposición 2.24. La unión de conexos por arcos con un punto en común es conexo por arcos.

Demostración. Ejercicio. (Sugerencia: Pensar primero el caso de dos conjuntos). □

Teorema 2.25. Si $U \subseteq \mathbb{C}$ es un abierto conexo entonces es conexo por poligonales.

Idea de la demostración. Fijemos un $z_0 \in U$. La estrategia será probar que el conjunto

$$F = \{z \in U : \text{existe una poligonal que une } z_0 \text{ con } z\},$$

es abierto y cerrado. Como claramente $z_0 \in F$, el conjunto tendrá que ser todo U . □

El teorema es falso si no pedimos que el conjunto sea abierto. Necesitaremos el siguiente lema.

Lema 2.26. La clausura de un conjunto conexo es conexa.

Ejemplo 2.27. Consideremos el subconjunto C de \mathbb{R}^2 definido por

$$C := \{(x, \sin(1/x)) : x > 0\}.$$

Entonces C es conexo por arcos, y por lo tanto es conexo. Consideremos su clausura, la cual por el lema anterior, también es conexa. Notar que $\bar{C} = C \cup (\{0\} \times [-1, 1])$.

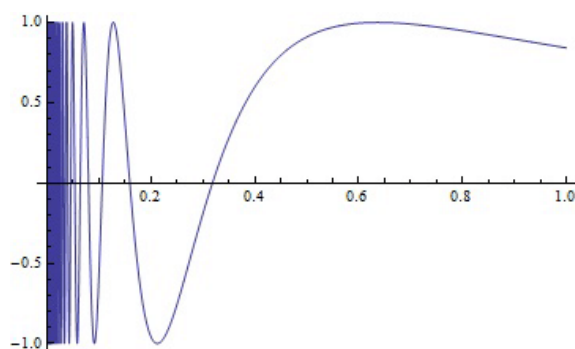


Figura 1: The Topologist's sine curve.

El conjunto \bar{C} no puede ser conexo por arcos.

3. La esfera de Riemann

3.1. La proyección estereográfica

En muchas situaciones es necesario estudiar que ocurre en el infinito. El punto ∞ se puede agregar al plano complejo, obteniendo el **plano complejo extendido**: $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Los entornos del infinito son los conjuntos $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ que contienen

$$D(\infty, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \cup \{\infty\}$$

para algún $R > 0$. Equivalentemente, $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ es un entorno del ∞ cuando $\mathbb{C} \setminus U$ es acotado. De este modo, una sucesión $\{z_n\}$ tiende a infinito si y sólo si $|z_n| \rightarrow \infty$.

El plano extendido $\widehat{\mathbb{C}}$ resulta compacto. Más aún, es la denominada **compactificación de un punto o compactificación de Alexandrov** del plano. Una manera muy conveniente de visualizarlo es identificándolo con la esfera de \mathbb{R}^3 a través de la **proyección estereográfica**, :

$$S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Para esto identificamos el plano complejo con el plano xy . Al punto $(0, 0, 1)$ lo notaremos N (el polo norte). Luego, la proyección estereográfica identifica N con el ∞ y un punto $Z = (x_1, x_2, x_3) \neq N$ con el único punto z del plano complejo que se encuentra en la recta que une N con (x_1, x_2, x_3) (ver figura 2).

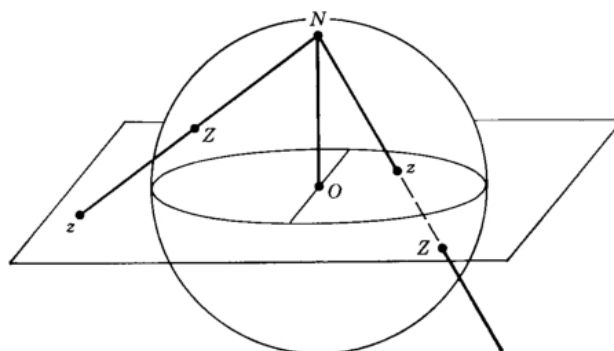


Figura 2: Proyección estereográfica.

Las coordenadas del punto z se pueden calcular explícitamente en términos de Z . En efecto, la recta que une N con Z se parametriza del siguiente modo

$$(0, 0, 1) + t((x_1, x_2, x_3) - (0, 0, 1)) = (tx_1, tx_2, 1 + t(x_3 - 1)).$$

Esta recta cortará al plano \mathbb{C} cuando $1 + t(x_3 - 1) = 0$, es decir, cuando $t = (1 - x_3)^{-1}$. Luego

$$z = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right) \simeq \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

Recíprocamente, si partimos del punto del plano complejo $z = (x, y)$ entonces la recta que lo une con el polo norte se parametriza por

$$(x, y, 0) + t((0, 0, 1) - (x, y, 0)) = ((1-t)x, (1-t)y, t).$$

Esta recta pasara por la esfera cuando

$$(1-t)^2(x^2 + y^2) + t^2 = 1,$$

es decir, cuando

$$|z|^2 = \frac{1-t^2}{(1-t)^2} = \frac{1+t}{1-t} \iff t = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Por lo tanto, el punto sobre la esfera es:

$$Z = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

Si notamos $P_N : S^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ a la proyección estereográfica desde el polo norte, entonces una cuenta muestra que si $z, w \in \mathbb{C}$ entonces

$$\chi(z, w) := \|P_N^{-1}(z) - P_N^{-1}(w)\|_{\mathbb{R}^3} = \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}},$$

y

$$\chi(z, \infty) := \|P_N^{-1}(z) - (0, 0, 1)\|_{\mathbb{R}^3} = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

Así se define la **métrica cordal** χ en $\widehat{\mathbb{C}}$. Notar que

- (i) Si $E \subseteq \mathbb{C}$ es un conjunto acotado, entonces en E las métricas χ y $|\cdot|$ son equivalentes. Por lo tanto, los espacios métricos asociados tienen los mismos abiertos, cerrados, etc.
- (ii) Dada una sucesión $\{z_n\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \chi(z_n, \infty) = 0.$$

(iii) $P_N : (S^2, \|\cdot\|_{\mathbb{R}^3}) \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es un homeomorfismo.

(iv) Si L es una recta en $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces $P_N^{-1}(L)$ es una circunferencia que pasa por N .

Si C es un círculo en \mathbb{C} , entonces $P_N^{-1}(C)$ es un círculo en S^2 que no pasa por N .

En el link de youtube: <https://www.youtube.com/watch?v=VX-0Laeczgk>

Henry Segerman muestra con un modelo 3D cómo las circunferencias que pasan por el polo norte en S^2 se convierten en rectas cuando se proyectan sobre el plano.

Ejercicio 2. Si $z, w \in \widehat{\mathbb{C}}$, probar que con las convenciones $1/0 = \infty$ y $1/\infty = 0$ (sea cuidadoso con esto!), vale $\chi(z, w) = \chi(\frac{1}{z}, \frac{1}{w})$.

3.2. Homografías

Definición 3.1. Una homografía es una función de la forma

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (1)$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ satisfacen $ad - bc \neq 0$.

La última condición es para garantizar que la función no sea constante. Piense por ejemplo en

$$f(z) = \frac{4z + 6}{2z + 3}.$$

Ejercicio 3. La composición de homografías es una homografía.

Existen tres tipos de homografías elementales:

Homotecias: Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ entonces $h_\lambda(z) = \lambda z$;

Traslaciones: Si $z_0 \in \mathbb{C}$ entonces $t_{z_0}(z) = z + z_0$;

Inversión: Es la función $r(z) = z^{-1}$

El resto de las homografías se pueden construir con estas tres elementales.

Proposición 3.2. Toda homografía es composición de homografías elementales

Demostración. Sea h una homografía como en (1). Veámoslo por casos

- Si $a = 0$ entonces $h(z) = h_b \circ r \circ t_d \circ h_c$;
- Si $c = 0$ entonces $h(z) = t_{b/d} \circ h_{a/d}$;
- Si $ac \neq 0$ entonces

$$h(z) = \frac{a}{c} \left(\frac{z + b/a}{z + d/c} \right) = \frac{a}{c} \left(1 + \frac{b/a - d/c}{z + d/c} \right)$$

de donde claramente se ve que también en este caso $h(z)$ es composición de las tres homografías elementales.

□

Una consecuencia importante de este simple resultado es el siguiente teorema

Teorema 3.3. Toda homografía manda rectas y circunferencias en rectas y circunferencias.

Demostración. Basta verlo para las homografías elementales. Es claro para las traslaciones y las homotecias. Luego, sólo es necesario probarlo para r . Sea L una recta de ecuación

$$Ax + By + c = 0$$

con $A, B \in \mathbb{R}$. Si $z = x + iy$ entonces la ecuación anterior se puede reescribir del siguiente modo:

$$A(z + \bar{z}) - iB(z - \bar{z}) + 2c = 0,$$

y luego, en términos de z y \bar{z} se puede escribir como

$$\alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} + c = 0,$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$ y $c \in \mathbb{R}$. Por otra parte, toda circunferencia se escribe de la forma

$$|z - z_0|^2 = (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = c^2,$$

o sea

$$z\bar{z} - z\bar{z}_0 - \bar{z}z_0 + |z_0|^2 = c^2$$

Sea $w = r(z) = z^{-1}$. Si z pertenece a la circunferencia anterior entonces w satisface

$$1 - \bar{z}_0 \bar{w} - z_0 w + |z_0|^2 w \bar{w} = c^2 w \bar{w},$$

o equivalentemente

$$(|z_0|^2 - c^2) w \bar{w} - \bar{z}_0 \bar{w} - z_0 w = -1$$

Si $|z_0|^2 - c^2 = 0$, es decir si la circunferencia original pasa por cero, entonces la anterior es la ecuación de una recta. Si $|z_0|^2 - c^2 \neq 0$, entonces llamando

$$w_0 = \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - c^2}$$

se tiene que

$$w\bar{w} - \bar{w}_0 w - w_0 \bar{w} + |w_0|^2 = \frac{-1}{|z_0|^2 - c^2} + \frac{|z_0|^2}{(|z_0|^2 - c^2)^2} = \frac{c^2}{(|z_0|^2 - c^2)^2},$$

la cual es la fórmula de la circunferencia:

$$|w - w_0| = \frac{c}{||z_0|^2 - c^2|}.$$

De manera semejante se puede ver que la recta $\alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} + c = 0$ se transforma en una recta (si $c = 0$) o en una circunferencia (si $c \neq 0$). \square

Podemos pensar una homografía h como una función de $\widehat{\mathbb{C}}$ en $\widehat{\mathbb{C}}$ de modo que

$$h(\infty) = \frac{a}{c} \quad \text{y} \quad h(-d/c) = \infty$$

con las convenciones de que $a/c = \infty$ si $c = 0$ y $-d/c = \infty$ si $c = 0$.

Teorema 3.4. Una homografía $h : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es inversible y su inversa es una homografía.

Demostración. Escribiendo $h(z) = \frac{az + b}{cz + d} = w$, debemos despejar z .

$$az + b = cwz + dw \Leftrightarrow (a - cw)z = dw - b \Leftrightarrow z = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

□

Corolario 3.5. La función $h : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ es biyectiva y su inversa es una homografía.

El siguiente resultado es muy útil para construir homografías que manden una recta o círculo fijado en otro/a.

Teorema 3.6. Dados tres puntos distintos z_1, z_2 y z_3 en $\widehat{\mathbb{C}}$ y otros tres puntos distintos w_1, w_2 y w_3 en $\widehat{\mathbb{C}}$, existe una **única** homografía h tal que $h(z_j) = w_j$ para $j = 1, 2, 3$.

Demostración. Con las convenciones necesarias

$$\phi(z) = \left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \right) \left(\frac{z_1 - z}{z_3 - z} \right)$$

envía z_1, z_2 y z_3 en $0, 1$ e ∞ respectivamente. Análogamente

$$\psi(z) = \left(\frac{w_3 - w_2}{w_1 - w_2} \right) \left(\frac{w_1 - z}{w_3 - z} \right)$$

envía w_1, w_2 y w_3 en $0, 1$ e ∞ respectivamente. Luego, la homografía buscada es $h = \psi^{-1} \circ \phi$.

Para ver la unicidad, supongamos que hay dos h_1 y h_2 . Luego, $g = h_2^{-1} \circ h_1$ fija los puntos z_1, z_2 y z_3 . Componiendo eventualmente con ϕ y ϕ^{-1} , podemos suponer que dichos puntos son el $0, 1$ e ∞ . Si fija el infinito, entonces no es difícil ver que debe ser lineal. Pero la única función lineal que fija el cero y el uno es la identidad. Luego, $h_2 = h_1$. □

Corolario 3.7. Sean A y B rectas o circunferencias del plano complejo \mathbb{C} . Luego, existe una homografía que envía A en B .

Ejemplo 3.8. Encontrar una homografía que transforme $D(0, 1)$ en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

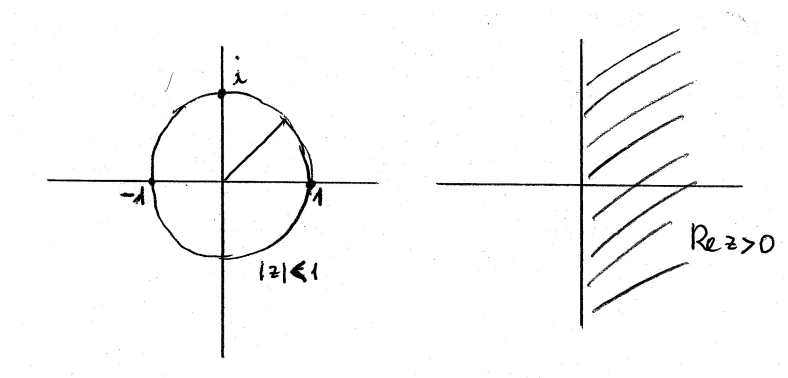


Figura 3: Del disco al semiplano.

Por ejemplo, consideremos una homografía $h(z)$ que mande el 1 al infinito y el -1 al 0:

$$h(z) = a \frac{z + 1}{z - 1},$$

y también que mande el punto i en el punto i :

$$\frac{i + 1}{i - 1} = \frac{-(1 + i)^2}{1^2 + 1^2} = -i \Rightarrow a = -1 \Rightarrow h(z) = \frac{1 + z}{1 - z}.$$

Esta homografía manda el borde del disco en el borde del semiplano, pero todavía deberíamos ver que manda el disco en el semiplanos. Para eso miramos donde manda el origen: $h(0) = 1$. ¿Es única?

4. Derivabilidad y holomorfía

Definición 4.1. Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{C} y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Se dice que f es derivable en $z_0 \in U$ si existe el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \stackrel{(h=z-z_0)}{=} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

En tal caso, al valor del límite se nota $f'(z_0)$ y se llama la derivada (compleja) de f en z_0 .

Ejemplo 4.2. La función $f(z) = z^2$ es derivable en \mathbb{C} y vale $f'(z) = 2z$:

$$\frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \frac{\cancel{z^2} + 2hz + h^2 - \cancel{z^2}}{h} = 2z + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2z.$$

Para $n \in \mathbb{N}$, la función $f(z) = z^n$ es derivable en \mathbb{C} y vale $f'(z) = nz^{n-1}$. La demostración es análoga al caso $n = 2$ usando la fórmula del desarrollo binomial para $(z+h)^n$.

Al igual que en el caso de funciones de una variable real, y siguiendo esencialmente los mismo pasos, se pueden probar las siguientes propiedades de las funciones derivables.

Proposición 4.3. Si una función es derivable en z_0 entonces es continua en z_0 .

Proposición 4.4. Sean f, g dos funciones derivables en $z_0 \in \mathbb{C}$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Entonces

- (i) $\alpha f + \beta g$ es derivable en z_0 y $(\alpha f + \beta g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0)$;
- (ii) fg es derivable en z_0 y $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$;
- (iii) Si $g(z_0) \neq 0$, entonces f/g es derivable en z_0 y

$$(f/g)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}.$$

Ejemplos 4.5.

- Un polinomio $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ es derivable en \mathbb{C} y vale $p'(z) = \sum_{k=1}^n a_k k z^{k-1}$.
- La función $f(z) = z^{-1}$ es derivable en todo su dominio $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $f'(z) = -z^{-2}$.
- La función $f(z) = \bar{z}$ no es derivable en ningún punto de \mathbb{C} . En efecto, basta probarlo en $z = 0$ (¿por qué?):

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1 \quad \text{mientras que} \quad \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(ih) - f(0)}{ih} = -1.$$

Proposición 4.6 (Regla de la cadena). Si g es derivable en z_0 y f es derivable en $g(z_0)$ entonces $f \circ g$ es derivable en z_0 y

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0).$$

Ejemplo 4.7. Derivar $f(z) = 1/z^n$ en un punto $z \neq 0$, donde $n \in \mathbb{N}$:

$$[(z^{-1})^n]' = n(z^{-1})^{n-1}(-1)z^{-2} = -nz^{-n+1-2} = -nz^{-n-1}.$$

4.1. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Dado que \mathbb{C} se identifica con \mathbb{R}^2 , una función $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se puede pensar como función de dos variables reales con valores en \mathbb{C} .

Veremos cómo la derivabilidad de f en términos de las variable compleja $z = x + iy$ se traduce en propiedades de f como función de la variables reales (x, y) .

Comencemos recordando la definición de diferenciabilidad. Una función $u : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se dice diferenciable en un punto $(x_0, y_0) \in U$ si existen $A, B \in \mathbb{R}$ tales que

$$u(x_0 + h_x, y_0 + h_y) - u(x_0, y_0) = Ah_x + Bh_y + \alpha(h_x, h_y)$$

donde la función α está definida en un entorno del $(0, 0)$ y satisface que

$$\lim_{(h_x, h_y) \rightarrow (0,0)} \frac{\alpha(h_x, h_y)}{\|(h_x, h_y)\|} = 0. \quad (3)$$

En tal caso, existen las derivadas parciales y valen

$$A = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{y} \quad B = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

De la misma forma se define diferenciabilidad real para una función a valores complejos:

Definición 4.8. Una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ se dice diferenciable en un punto $(x_0, y_0) \in U$ (como función de las variables (x, y)) si existen $A, B \in \mathbb{C}$ tales que

$$f(x_0 + h_x, y_0 + h_y) - f(x_0, y_0) = Ah_x + Bh_y + \alpha(h_x, h_y)$$

donde α toma valores complejos y satisface (3). En tal caso, $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ y $B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Proposición 4.9. La función compleja $f = u + iv$ es diferenciable en z_0 si y sólo si u y v son es diferenciables en z_0

Demostración. Ejercicio. □

El siguiente teorema es el resultado más importante de esta sección.

Teorema 4.10. Una función $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es derivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ si y sólo si es diferenciable en (x_0, y_0) y sus derivadas parciales satisfacen las **Ecuaciones de Cauchy-Riemann**:

$$u_x(z_0) = v_y(z_0) \quad \text{y} \quad u_y(z_0) = -v_x(z_0). \quad (4)$$

En tal caso,

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

Notar que la última igualdad es equivalente a (4).

Demostración. Notemos $\Delta f = f(z_0 + h_x + ih_y) - f(z_0)$.

(\Rightarrow) Si f es derivable en z_0 se tiene que

$$\alpha_0(h_x, h_y) := \frac{\Delta f - f'(z_0)(h_x + ih_y)}{h_x + ih_y} \xrightarrow{h_x + ih_y \rightarrow 0} 0,$$

y despejando queda

$$\Delta f = f'(z_0)(h_x + ih_y) + \underbrace{\alpha_0(h_x, h_y)(h_x + ih_y)}_{\alpha(h_x, h_y)},$$

donde α satisface (3). Esto dice que f es diferenciable en z_0 y

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = f'(z_0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = if'(z_0).$$

Esto significa que vale C-R (Cauchy-Riemann).

(\Leftarrow) La diferenciabilidad de f y C-R dicen que

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)h_x + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)h_y + \alpha(h_x, h_y) \\ &\stackrel{(\text{por C-R})}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)(h_x + ih_y) + \alpha(h_x, h_y), \end{aligned}$$

donde α satisface (3). Luego existe el límite

$$f'(z_0) = \lim_{h_x + ih_y \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h_x + ih_y} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0).$$

□

Desde esta perspectiva la función $f(z) = \bar{z}$, que como función de dos variables es $f(x, y) = x - iy$, no puede ser derivable en ningún punto puesto que en este caso $u_x = -v_y$, violando una de las ecuaciones de Cauchy- Riemann.

Notar que por ejemplo la función $f(x + iy) = ax + biy$, que como función de dos variables es muy buena, resulta derivable sólo cuando $a = b$.

Una manera de reescribir las ecuaciones de Cauchy-Riemann de manera más compacta es usando los operadores diferenciales que resultan de hacer los cambios de variables $z = x + iy$ y $\bar{z} = x - iy$:

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

En términos de estos operadores las ecuaciones de Cauchy-Riemann se escriben como

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \text{mientras que} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = f'(z).$$

4.2. Funciones holomorfas

A continuación vamos a introducir la noción central del análisis complejo.

Definición 4.11. La función f se dice **holomorfa** en $z_0 \in \mathbb{C}$ si es derivable en algún entorno de z_0 . Luego f es holomorfa en $U \subset \mathbb{C}$ abierto si es derivable en todos sus puntos. Si $U = \mathbb{C}$ entonces la función se llama **entera**.

Ejercicio 4. Una función f puede ser derivable en z_0 sin ser holomorfa en z_0 :

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^3}{|z|} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

es derivable en 0, pues

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^3}{|z|z} = 0.$$

Veamos que f no es derivable en $z_0 \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{z^3/|z| - z_0^3/|z_0|}{z - z_0} = \frac{|z_0|z^3 - |z|z_0^3}{(z - z_0)|z_0||z|} \\ &= \underbrace{\frac{1}{|z_0||z|}}_{\rightarrow |z_0|^{-2}} \left(\underbrace{|z_0| \frac{z^3 - z_0^3}{z - z_0}}_{\rightarrow |z_0|3z_0^2} - z_0^3 \frac{|z| - |z_0|}{z - z_0} \right), \end{aligned}$$

donde los límites son para $z \rightarrow z_0$. Luego basta con ver que no existe el $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|z| - |z_0|}{z - z_0}$. Para eso es suficiente con notar que si $z \rightarrow z_0$ sobre la semirrecta $\{tz_0 : t \in \mathbb{R}_{>1}\}$ el límite es $|z_0|/z_0$, pero cuando $z \rightarrow z_0$ sobre la circunferencia $|z| = |z_0|$ el límite es 0.

Veamos ahora algunas consecuencias inmediatas del Teorema 4.10.

Corolario 4.12. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo y sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Si $f'(z) = 0$ para todo $z \in U$ entonces f es constante.

Demostración. En efecto, la última ecuación en el enunciado del teorema implica que el diferencial de f (pensada como función de dos variables reales) es cero en todos lados. \square

El siguiente corolario muestra la rigidez de las funciones holomorfas:

Corolario 4.13. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo y sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa.

- (1) Si $\operatorname{Re}(f)$ o $\operatorname{Im}(f)$ es constante, entonces f es constante;
- (2) Si $|f|$ es constante, entonces f es constante;
- (3) Si la imagen de f está contenida en una recta o una circunferencia entonces f es constante.

Demostración.

- (1) Sea $u = \operatorname{Re}(f)$ y $v = \operatorname{Im}(f)$. Si u es constante entonces $u_x(z) = u_y(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann esto implica que $f'(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Luego por el corolario anterior f es constante. Si v es constante, por lo ya probado, if es constante, y por ende f también.
- (2) Supongamos ahora que $|f|$ es constante. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $|f(z)| = 1$ para todo z . En particular, nunca se anula, por lo que $\overline{f(z)} = \frac{1}{f(z)}$ también es holomorfa. Luego, si $u = \operatorname{Re}(f)$ y $v = \operatorname{Im}(f)$ se tiene que

$$u(z) = \frac{f(z) + \overline{f(z)}}{2} \quad \text{y} \quad v(z) = \frac{f(z) - \overline{f(z)}}{2i}$$

son funciones holomorfas a valores reales. Por el item (i), ambas deben ser constantes.

- (3) Supongamos que la imagen de f está contenida en $Q \subset \mathbb{C}$. Si Q es una recta, existe una homografía $h(z) = az + b$ que manda Q en \mathbb{R} . Luego $h \circ f$ es holomorfa y toma valores reales, por lo que es constante $c \in \mathbb{C}$, y entonces $f = h^{-1}(c)$.

Si Q es una circunferencia, hay una traslación $h(z) = z + b$ que manda Q en alguna circunferencia de la forma $|w| = c \in \mathbb{R}_{>0}$. Luego $h \circ f$ es holomorfa y de módulo constante, por lo que f es constante.

□

Ejemplos 4.14. Hallar el conjunto abierto más grande $U \subset \mathbb{C}$ tal que la función $f = u + iv$ es holomorfa en U , siendo

- (1) $u(x + iy) = x(1 + y)$. Por C-R,

$$v_y \stackrel{C-R}{=} u_x = 1 + y \Rightarrow v = y + \frac{y^2}{2} + \varphi(x).$$

Por otro lado,

$$\varphi'(x) = v_x \stackrel{C-R}{=} -u_y = -x \Rightarrow \varphi(x) = -\frac{x^2}{2} \Rightarrow v = y + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}.$$

Luego, $f(x + iy) = x(1 + y) + i(y + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2})$ es holomorfa en \mathbb{C} (de hecho, $f(z) = z - iz^2/2$).

- (2) $u(x + iy) = \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}$. Esta función sólo está definida en $U = \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Veamos si u es la parte real de una función holomorfa en U . Otra vez, por C-R:

$$u_x = \frac{-2(x-1)y}{[(x-1)^2 + y^2]^2} = v_y \Rightarrow v = \frac{(x-1)}{(x-1)^2 + y^2} + \varphi(x).$$

Haciendo $u_y = -v_x$ sale que $\varphi'(x) = 0$. Entonces la función

$$f(x + iy) = \frac{y}{(x-1)^2 + y^2} + i \frac{(x-1)}{(x-1)^2 + y^2} \text{ es holomorfa en } \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

(3) $u(x + iy) = x^2$. Por C-R:

$$u_x = 2x = v_y \Rightarrow v = 2xy + \varphi(x).$$

Además,

$$0 = u_y = -v_x = -2y - \varphi'(x) \Rightarrow \varphi'(x) = -2y.$$

Una función de x no puede ser $-2y$ en ningún conjunto abierto de \mathbb{C} (salvo el vacío). Luego no hay ninguna función holomorfa en un abierto de \mathbb{C} cuya parte real sea $u(x + iy) = x^2$.

5. Funciones armónicas

Muchas propiedades de las funciones holomorfas son compartidas por un conjunto más amplio de funciones denominadas armónicas. El concepto de función armónica es de variables reales y no necesita de las funciones holomorfas para su desarrollo. No obstante, en el caso de funciones armónicas definidas en subconjuntos de \mathbb{R}^2 , es muy útil entender la relación que existe entre las funciones armónicas y las funciones holomorfas. En particular, este vínculo nos permitirá encontrar demostraciones más simples de ciertas propiedades de las funciones armónicas.

Definición 5.1. Dado un abierto de U de \mathbb{R}^2 (o de \mathbb{C}), una función $u : U \rightarrow \mathbb{C}$ (que podría caer en \mathbb{R}) se dice armónica si es de clase C^2 y satisface la ecuación diferencial en U :

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (5)$$

El operador Δ se llama el **Laplaciano**.

Sea $f = u + iv$ una función C^2 definida en un abierto $U \subset \mathbb{C}$, con $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$. Como $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$, se tiene que

$$\Delta u = \operatorname{Re} \Delta f \quad \text{y} \quad \Delta v = \operatorname{Im} \Delta f,$$

por lo que f es armónica si y sólo si u y v lo son.

Proposición 5.2. Si f es holomorfa en $U \subset \mathbb{C}$ implica que f es armónica en U . En particular, las partes real e imaginaria de una función holomorfa son funciones armónicas.

Demostración. Por un resultado que veremos más adelante (el Corolario 15.4), f es C^∞ como función de (x, y) (en particular, es C^2), y por Cauchy-Riemann, $f_x = -if_y$. Luego, derivando esta igualdad con respecto a x y con respecto a y obtenemos

$$f_{xx} = -if_{yx} \quad \text{y} \quad f_{xy} = -if_{yy}.$$

Como f es C^∞ , las derivadas parciales cruzadas son iguales, por lo que despejando de las igualdades anteriores se obtiene: $f_{xx} = -f_{yy}$. \square

Por la proposición, la parte real de una función holomorfa es armónica. Uno podría preguntarse si esta propiedad caracteriza la parte real de una función holomorfa. Es decir, si u es una función real armónica en el abierto $U \subset \mathbb{C}$, ¿existe una f holomorfa en U tal que $u = \operatorname{Re} f$? Curiosamente, en general la respuesta depende del abierto U , lo cual veremos más adelante.

6. Funciones básicas

6.1. La función exponencial

La función exponencial es una de las más importantes de la matemática.

Definición 6.1. Dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$, se define $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$.

Proposición 6.2. La exponencial cumple

- (1) e^z es entera y $(e^z)' = e^z$;
- (2) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
- (3) e^z es periódica de período $2\pi i$, es decir, $e^z = e^{z+2k\pi i}$, donde $k \in \mathbb{Z}$;
- (4) la restricción de la exponencial $e^z : H_c \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es biyectiva en cualquier banda

$$H_c := \{z = x + iy : c \leq y < c + 2\pi\}, \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

Demostración. (1) Si notamos $e^z = u(z) + iv(z)$, con $u(z) = e^x \cos y$, $v(z) = e^x \operatorname{sen} y$, donde $z = x + iy$, entonces como funciones de las variables reales (x, y) , u y v son de clase C^1 (existen y son continuas todas las derivadas parciales), pues el producto de funciones C^1 es C^1 . Por lo tanto son diferenciables y

$$u_x = e^x \cos y = v_y \quad \text{y} \quad u_y = -e^x \operatorname{sen} y = -v_x,$$

que son las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Entonces e^z es holomorfa en \mathbb{C} y su derivada vale $u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = e^z$.

(2) Desarrollando el seno y el coseno de la suma queda:

$$e^{z_1+z_2} = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i \operatorname{sen}(y_1+y_2)) = e^{z_1}e^{z_2}.$$

(3) Es trivial a partir de (2).

(4) Notemos $\mathbb{T} = \{w : |w| = 1\}$. Como las funciones

$$e^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \quad \text{y} \quad L : [c, c + 2\pi) \rightarrow \mathbb{T}, \quad \text{donde } L(y) = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

son biyectivas, también lo es

$$e^{x+iy} = e^x \cdot L(y) : \underbrace{\mathbb{R} \times [c, c + 2\pi)}_{H_c} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

□

Como el punto (4) establece la biyectividad de la función exponencial e^{x+iy} , desde H_c con valores en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, tiene una inversa, que se llama un logaritmo complejo y que estudiaremos a la brevedad.

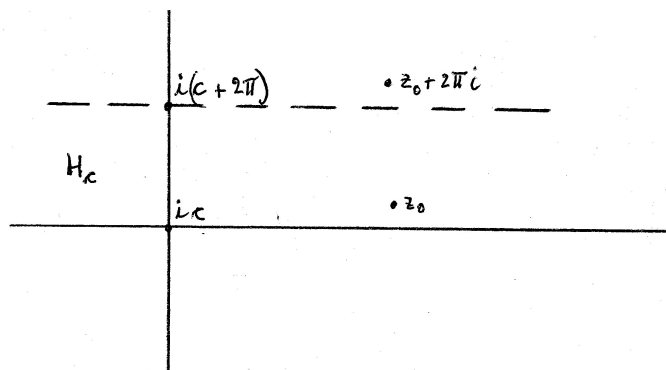
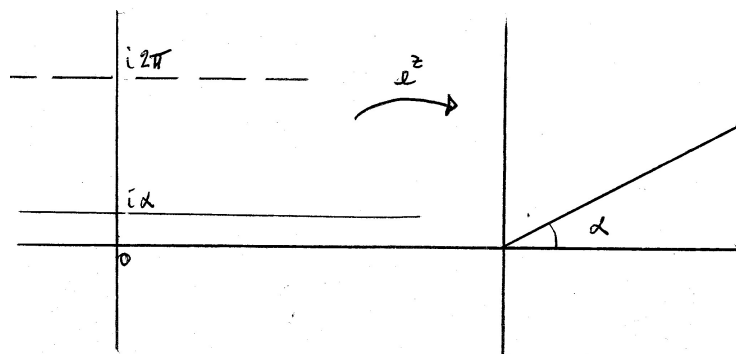


Figura 4: Región de inyectividad de e^z .

La siguiente figura muestra el comportamiento de la función exponencial.



Seno y coseno complejos

A partir de la definición de la función exponencial para todo número complejo, se define:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{y} \quad \text{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Notar que si $x \in \mathbb{R}$, entonces recuperamos el seno y coseno, mientras que si $z = it$ se obtienen el seno y coseno hiperbólicos. En particular se ve que

$$\cosh(x) = \cos(ix) \quad \text{y} \quad \text{senh}(x) = -i \text{sen}(ix).$$

Es inmediato que

$$(\text{sen } z)' = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \cos z \quad \text{y} \quad (\cos z)' = -\text{sen } z.$$

Observación 6.3. Por cálculo directo podemos ver que definidas de este modo, el seno y coseno continúan satisfaciendo las identidades:

$$\begin{aligned} \cos(z \pm w) &= \cos(z) \cos(w) \mp \text{sen}(z) \text{sen}(w) \\ \text{sen}(z \pm w) &= \text{sen}(z) \cos(w) \pm \text{sen}(w) \cos(z) \end{aligned}$$

y

$$\cos^2(z) + \text{sen}^2(z) = 1.$$

Veamos la última:

$$\cos^2(z) + \text{sen}^2(z) = \frac{(e^{iz} + e^{-iz})^2}{4} - \frac{(e^{iz} - e^{-iz})^2}{4} = \frac{(2e^{iz}e^{-iz}) - (-2e^{iz}e^{-iz})}{4} = 1.$$

Observación 6.4. Una región $E \subset \mathbb{C}$ es tal que la función $\cos z$ es acotada para $z \in E$, si y sólo si la parte imaginaria de sus puntos forman un conjunto acotado. O sea,

$$\sup\{|\text{Im } z| : z \in E\} \leq C \quad \text{para algún } C > 0.$$

Lo mismo vale para $\operatorname{sen} z$. Efectivamente, si $z = x + iy \in E$:

$$2|\cos z| \leq |e^{iz}| + |e^{-iz}| = e^{-y} + e^y,$$

que está acotada si y se mueve en un conjunto acotado. Por otro lado, si el y puede tender a $\pm\infty$, tenemos

$$2|\cos z| \geq ||e^{iz}| - |e^{-iz}|| = |e^{-y} - e^y| \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} \infty.$$

Ejercicio 5. Probar que

$$\operatorname{sen} z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi \quad \text{y} \quad \cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (\text{con } k \in \mathbb{Z}).$$

6.2. Cauchy-Riemann en coordenadas polares

Si $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, consideremos la composición que cambia coordenadas cartesianas a polares:

$$\tilde{u} = u \circ p : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \xrightarrow{p} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \xrightarrow{u} \mathbb{R}, \quad \text{donde } p(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Es decir, si $(x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, se define

$$\tilde{u}(r, \theta) = u(x(r, \theta), y(r, \theta)).$$

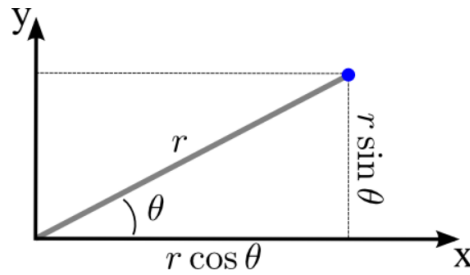


Figura 5: $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

Proposición 6.5. $u(x, y)$ es diferenciable en $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ si y sólo si $\tilde{u}(r, \theta)$ es diferenciable en (r_0, θ_0) , donde $(x_0, y_0) = (r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0)$.

Demostración. Como la función p es C^1 , entonces es diferenciable, y como $\tilde{u} = u \circ p$, si u es diferenciable entonces \tilde{u} es composición de diferenciable, con lo que ella también lo es.

Esbozaremos la prueba de la implicación recíproca. No podemos usar el argumento anterior sin más, dado que p no es inversible (pues $p(r, \theta) = p(r, \theta + 2\pi)$). Pero p es localmente inversible, con lo que tiene una inversa local, que es C^1 . Como la función u se escribe localmente como composición de \tilde{u} y esa inversa, y la diferenciable es un fenómeno local, si \tilde{u} es diferenciable también lo es u . \square

Teorema 6.6. Sea $f = u + iv$ definida en un entorno de $(x_0, y_0) = (r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0) \neq (0, 0)$. Entonces f es derivable en el punto si y sólo si \tilde{u} y \tilde{v} son diferenciables en (r_0, θ_0) y satisfacen C-R en polares:

$$\tilde{u}_r = \tilde{v}_\theta \quad \text{y} \quad \tilde{u}_\theta = -r\tilde{v}_r. \quad (6)$$

En tal caso, la derivada en $z_0 = x_0 + iy_0$ queda

$$f' = e^{-i\theta}(\tilde{u}_r + i\tilde{v}_r) = \frac{-i}{re^{i\theta}}(\tilde{u}_\theta + i\tilde{v}_\theta).$$

6.3. El logaritmo complejo

Primero veamos la siguiente observación.

Observación 6.7. Si restringimos la función exponencial e^z a los conjuntos de la forma

$$(H_c)^\circ = \{z = x + iy : c < y < c + 2\pi\}, \text{ con } c \in \mathbb{R},$$

resulta un homeomorfismo con su imagen, que es consiste en sacarle a \mathbb{C} una semirrecta cerrada que forma un ángulo c (módulo 2π) con el semieje de los reales positivos.

Dado un número complejo z , buscamos todos los números complejos w tales que

$$e^w = z. \tag{7}$$

Por lo visto en la Proposición 6.2, la ecuación va a tener solución sólo cuando $z \neq 0$, en cuyo caso tiene infinitas soluciones (dado que la función exponencial es $2i\pi$ -periódica). Veamos qué forma tienen esas soluciones. Si consideramos la descomposición polar $z = re^{iy}$ entonces, las soluciones de (7) son de la forma

$$w = \log_{\mathbb{R}}(r) + i(y + 2k\pi)$$

donde $\log_{\mathbb{R}}(r)$ denota el logaritmo real y $k \in \mathbb{Z}$. Es decir, si notamos $\arg z$ (por argumento de z) a cualquier número $\varphi \in \mathbb{R}$ tal que $z = re^{i\varphi}$ entonces todas las soluciones se reescriben como

$$\log(z) = \log_{\mathbb{R}}(|z|) + i(\arg(z) + 2k\pi).$$

Para definir un logaritmo univaluado, consideremos una semirrecta cerrada de ángulo α como en la figura 6 y definamos una **determinación del argumento**: $\alpha - 2\pi < \arg z \leq \alpha$. O también hubieramos podido elegir $\alpha - 2\pi \leq \arg z < \alpha$, o cualquiera de esos más $2k_0\pi$ para un $k_0 \in \mathbb{Z}$ fijo.

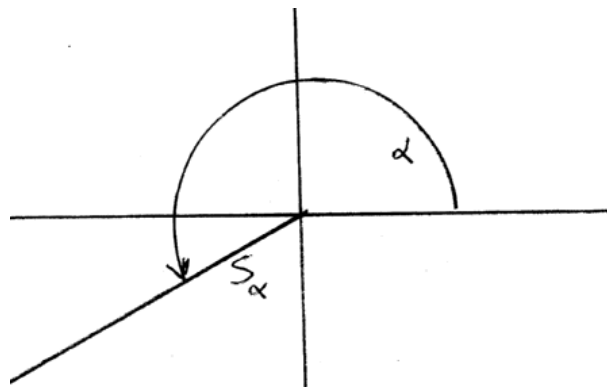


Figura 6: Semirrecta de ángulo α

Con ese argumento obtenemos un logaritmo $\log(z) = \log_{\mathbb{R}}(|z|) + i \arg(z)$ univaluado y definido en todo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. La función $\arg z$ es continua en todo $z_0 \in \mathbb{C} \setminus S_\alpha$, y por lo tanto también el logaritmo. Sin embargo, si $0 \neq z_0 \in S_\alpha$, la función $\arg z$ ni es continua ni se puede hacer continua redefiniéndola sobre la semirrecta, pues

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0 \text{ por arriba}} \arg z &= \alpha \\ \lim_{z \rightarrow z_0 \text{ por abajo}} \arg z &= \alpha - 2\pi \end{aligned}$$

Entonces, para obtener un logaritmo continuo sacamos la semirrecta S_α de su dominio, o sea, para $z \notin S_\alpha$ se toma $\alpha - 2\pi < \arg z < \alpha$. Cuando $\alpha = \pi$ tenemos $-\pi < \arg z < \pi$, que se llama el argumento principal (por convención), y algunas veces se nota $\text{Arg } z$. De la misma forma tenemos el logaritmo principal $\text{Log } z = \log |z| + i \text{Arg } z$, definido en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$.

Definición 6.8. Sea $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un conjunto abierto y conexo. Una función continua $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ se denomina **determinación o rama del logaritmo** si satisface que $e^{f(z)} = z$ para todo $z \in U$.

Proposición 6.9. Sea $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un conjunto abierto y conexo. Si $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ son dos ramas del logaritmo, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $g(z) = f(z) + 2k\pi i$.

Demostración. Consideremos la función $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$h(z) = f(z) - g(z).$$

Como $e^{h(z)} = e^{f(z)-g(z)} = 1$, la imagen de la función h está contenida en el conjunto discreto $2\pi i\mathbb{Z}$. Por otro lado, dado que U es conexo y h es continua, también $h(U)$ es conexo, por lo que debe ser constante. \square

Observación 6.10. Por definición de logaritmo, $e^{\log z} = z$ cualquiera sea el logaritmo que uno toma. Sin embargo, para poder definir $\log(e^z)$, en primer lugar e^z tiene que caer en el dominio de ese particular logaritmo que estamos considerando, e incluso si eso sucede, sin mayores datos sólo podemos afirmar que $\log(e^z) = z + 2ki\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 6.11. Si tomamos el logaritmo asociado a $\pi/2 + 6\pi < \arg z < \pi/2 + 8\pi$, entonces

$$\log(1+i) = \log \sqrt{2} + i(\pi/4 + 8\pi),$$

mientras que si tomamos el asociado a $-\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$, o también el logaritmo principal,

$$\log(1+i) = \log \sqrt{2} + i\pi/4 = \text{Log}(1+i).$$

Es interesante observar que estos dos logaritmos tienen distintos dominios, y que la unión de esos dominios es todo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Proposición 6.12. Para $0 \leq \alpha < 2\pi$ y $k \in \mathbb{Z}$, consideremos el logaritmo $\log : \mathbb{C} \setminus S_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$, con $(\alpha - 2\pi) + 2k\pi < \arg z < \alpha + 2k\pi$. Es decir, si $z = re^{i\theta} \neq 0$, con $\alpha - 2\pi < \theta < \alpha$, entonces

$$\log z = \log r + i(\theta + 2k\pi).$$

Esta función es holomorfa en todo su dominio y $\log'(z) = 1/z$.

Demostración. Si $z = re^{i\theta}$, escribamos $\log z = u(z) + iv(z)$, donde

$$u(re^{i\theta}) = \log r \quad y \quad v(re^{i\theta}) = \theta + 2k\pi.$$

Como ambas funciones son C^1 entonces son diferenciables. Además, sus derivadas parciales son

$$u_\theta = 0 = v_r, \quad u_r = 1/r \quad y \quad v_\theta = 1,$$

por lo que valen las ecuaciones de C-R: $u_\theta = -rv_r$ y $u_r = v_\theta/r$. Luego, el Teorema 6.6 dice que el logaritmo es derivable, y su derivada es

$$\log' z = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}.$$

□

Dada una determinación del logaritmo, que notaremos \log , entonces para cualquier número complejo $c \in \mathbb{C}$ es posible definir la función

$$z \mapsto z^c := e^{c \log(z)}$$

para z en el dominio de ese logaritmo particular. Cada determinación del logaritmo nos da una determinación de esta función. Notar que si $c = n \in \mathbb{N}$, entonces

$$e^{n \log(z)} = e^{n \log |z| + in \arg z} = z^n,$$

que nos dan la misma función cualquiera sea la determinación del logaritmo, como era de esperar. Sin embargo,

$$z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log(z)} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\arg z}{n}}$$

sí depende de la determinación del argumento elegida. En cualquier caso, podemos obtener todas las raíces n -ésimas tomando (como argumentos)

$$\frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Ejemplo 6.13. Veamos cuánto vale $(-i)^i$ usando el logaritmo principal:

$$(-i)^i = e^{i \operatorname{Log}(-i)} = e^{i(0 - i\pi/2)} = e^{\pi/2}.$$

Veamos todos los valores de $(-i)^i$ usando todos los logaritmos posibles:

$$(-i)^i = e^{i(\operatorname{Log}(-i) + 2k\pi i)} = e^{\pi/2 - 2k\pi} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ejercicio 6. Sea $0 \leq \alpha < 2\pi$. Si tomamos $\alpha - 2\pi < \arg z < \alpha$ (o sumándole $2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$ fijo), probar que cualquiera sea $c \in \mathbb{C}$, la función $f(z) = z^c$ definida con ese argumento es holomorfa para $z \in \mathbb{C} \setminus S_\alpha$ y

$$f'(z) = cz^{c-1},$$

definida con la misma determinación del argumento.

Ejemplo 6.14. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\operatorname{sen} z = 2i$.

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2i \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} + 4 = 0 \Leftrightarrow (e^{iz})^2 + 4e^{iz} - 1 = 0,$$

y esa ecuación cuadrática se resuelve si y sólo si

$$e^{iz} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = -2 \pm \sqrt{5} \Leftrightarrow iz = \log|-2 \pm \sqrt{5}| + i \arg(-2 \pm \sqrt{5}),$$

donde \arg varía entre todos los argumentos posibles. Entonces queda:

$$iz = \log(\sqrt{5} - 2) + i2k\pi \quad \text{o} \quad iz = \log(\sqrt{5} + 2) + i(\pi + 2k\pi), \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ejemplo 6.15. Pobar que

(1) $\operatorname{sen} z$ y $\operatorname{cos} z$ son funciones periódicas de período 2π .

(2) las ecuaciones $\operatorname{cos} z = w$ y $\operatorname{sen} z = w$ tienen infinitas soluciones, cualquiera sea $w \in \mathbb{C}$.

Las demostraciones son iguales para el seno y el coseno, así que sólo veremos el coseno: Como

$$\operatorname{cos}(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} \stackrel{(*)}{=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \operatorname{cos} z,$$

donde $(*)$ sale porque la exponencial es periódica de período $2\pi i$.

Para (2) planteamos la ecuación $\operatorname{cos} z = w$ y buscamos sus soluciones $z \in \mathbb{C}$:

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = w \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} - 2w = 0 \Leftrightarrow (e^{iz})^2 - 2we^{iz} + 1 = 0,$$

y esa ecuación cuadrática se resuelve si y sólo si

$$e^{iz} = \frac{2w \pm (4w^2 - 4)^{\frac{1}{2}}}{2} = w \pm (w^2 - 1)^{\frac{1}{2}},$$

la cual tiene infinitas soluciones $z = -i \log [w \pm (w^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]$ con sólo notar que $w \pm (w^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ nunca se anula. En efecto, si $w = \mp (w^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ entonces $w^2 = w^2 - 1$, lo que no es posible.

En particular, los ceros del coseno se obtienen cuando $w = 0$, con lo cual $z = -i \log(\pm i)$. O sea,

$$z = -i \left[0 + i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right] = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ó} \quad z = -i \left[0 + i \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right] = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Como $-\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \pi$, las segundas soluciones son de la forma $\frac{\pi}{2} + (2k - 1)\pi$. Es decir que todas las soluciones son de la forma $\pi/2$ más un entero par o impar multiplicado por π , lo que da: $\pi/2 + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 6.16. La función $\log|z|$ es armónica en $\mathbb{C}_* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pues localmente es la parte real de una función holomorfa (alguno de los logaritmos complejos que definimos con anterioridad), pero no hay ninguna función holomorfa en \mathbb{C}_* tal que $f(z) = \log|z| + iv(z)$, con v función real.

Si la hubiera, tomando el logaritmo principal $\operatorname{Log} z$, tendríamos que $f(z) - \operatorname{Log} z$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ y su parte real es nula. Como $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ es conexo, esta función es constante:

$$f(z) = \operatorname{Log} z + ic, \quad (c \in \mathbb{R}) \quad \text{en} \quad \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}.$$

Luego f no puede ser continua en $\mathbb{R}_{< 0}$, y por lo tanto allí no es holomorfa.

7. Series numéricas

Hasta ahora hemos desarrollado la teoría de funciones holomorfas. A partir de aquí estudiaremos las funciones analíticas y más adelante veremos que ambas clases de funciones coinciden. Por lo pronto, veamos algunos prerrequisitos elementales.

Definición 7.1. Si $\{z_k\}$ es una sucesión de números complejos, se definen las sumas parciales

$$S_n := \sum_{k=0}^n z_k, \text{ y la serie } \sum_{k=0}^{\infty} z_k := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \text{ si existe.}$$

En caso de que el límite dé un número, se dice que la serie converge. Además, cuando esté claro cuáles son los índices de sumación, podemos escribir la serie simplemente por $\sum z_k$.

Recordemos que las sumas parciales forman una sucesión de Cauchy si: dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 (que en general dependerá de ε) tal que si $n \geq n_0$,

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k \right| < \varepsilon, \quad \forall p \geq 1. \quad (8)$$

Es equivalente decir que esto pasa reemplazando $n \geq n_0$ por n_0 .

Proposición 7.2. Sea $\{z_k\}$ una sucesión en \mathbb{C} .

- (1) $\sum z_k$ converge si y sólo si sus sumas parciales son una sucesión de Cauchy.
- (2) $\sum z_k$ converge $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k \geq n} z_k \right| = 0$.
- (3) $\sum z_k$ converge $\Rightarrow z_k \rightarrow 0$.

Demostración. El punto (1) sale porque \mathbb{C} es completo. (2) sale tomando límite cuando $p \rightarrow \infty$ en (8), y (3) sale tomando $p = 1$ en (8). \square

Definición 7.3. Se dice que $\sum z_k$ es **absolutamente convergente** cuando $\sum |z_k|$ converge.

Proposición 7.4.

$$\sum |z_k| < \infty \Leftrightarrow \sum |z_k| \text{ converge} \Rightarrow \sum z_k \text{ converge.}$$

Demostración. La equivalencia sale porque una sucesión creciente es acotada superiormente si y sólo si es convergente. La segunda implicación sale de

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |z_k|$$

y de la proposición anterior. \square

Ejemplo 7.5. En este muy importante ejemplo estudiaremos el comportamiento de $\sum_{k \geq 0} z^k$ para los distintos valores de $z \in \mathbb{C}$. Primero notemos que si $z \neq 1$:

$$(1 - z) \sum_{k=0}^n z^k = \sum_{k=0}^n (z^k - z^{k+1}) = 1 - z^{n+1}.$$

Entonces

$$\sum_{k=0}^n z^k = \begin{cases} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} & \text{si } z \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } z = 1 \end{cases}$$

A partir de esta igualdad es claro que la serie converge (absolutamente) cuando $|z| < 1$, tiende a infinito cuando $|z| > 1$ o cuando $z = 1$, y oscila entre distintos valores cuando $|z| = 1$, con $z \neq 1$. Es interesante notar que en el último caso las sumas parciales se mantienen acotadas, lo cual será muy útil más adelante.

Proposición 7.6 (Álgebra de series). Si $\sum z_k$ y $\sum w_k$ convergen y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces la serie de la suma y de los λ múltiplos de z_k convergen y vale

$$\sum (z_k + w_k) = \sum z_k + \sum w_k \quad \text{y} \quad \sum \lambda z_k = \lambda \sum z_k.$$

Corolario 7.7.

$$\sum z_k \text{ converge} \Leftrightarrow \sum \operatorname{Re} z_k \text{ y } \sum \operatorname{Im} z_k \text{ convergen.}$$

7.1. Series de términos positivos (criterios)

Gracias a la Proposición 7.4 las series de términos positivos juegan un papel destacado en la teoría de series. Durante esta sección todas las sucesiones son **estrictamente** positivas. Luego $\sum a_k$ converge si las sumas parciales son acotadas, y si no, las mismas tienden a infinito, en cuyo caso se dice que la serie **diverge**. Veamos algunos criterios de convergencia.

1. Comparación: Si $a_k \leq Cb_k$ para todo $k \geq k_0$ (se dice que la sucesión $\{b_k\}$ *mayora* a $\{a_k\}$), entonces

$$\sum b_k \text{ converge} \Rightarrow \sum a_k \text{ converge.}$$

Es equivalente a decir que si la segunda *diverge* entonces también *diverge* al primera.

2. Comparación por límite: Sea $\ell = \lim_n a_n/b_n$. Entonces

(i) Si $\ell \neq 0, \infty$: $\sum a_k$ converge $\Leftrightarrow \sum b_k$ converge.

(ii) Si $\ell = 0$: $\sum b_k$ converge $\Rightarrow \sum a_k$ converge.

(iii) Si $\ell = \infty$: $\sum a_k$ converge $\Rightarrow \sum b_k$ converge.

Demostración. Claramente (ii) y (iii) son afirmaciones equivalentes. Si $\ell \neq \infty$, por definición de límite, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$:

$$(\ell - \varepsilon)b_k < a_k < (\ell + \varepsilon)b_k, \quad \forall k \geq k_0.$$

Luego $\{b_k\}$ *mayora* $\{a_k\}$, y si $\ell \neq 0$, tomando $\varepsilon = \ell/2$ también tenemos la *mayorización opuesta*. □

Recordemos las definiciones de límites superior e inferior

Definición 7.8.

$$\limsup a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k \quad \text{y} \quad \liminf a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k.$$

3. Criterio de D'Alembert: Sean $L = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$ y $\ell = \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Entonces

(i) Si $L < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge.

(ii) Si $\ell > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge, y de hecho $a_n \not\rightarrow 0$.

Demostración. Si $L < 1$ y tomamos $0 < \varepsilon < 1 - L$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_{n+1} < (L + \varepsilon)a_n, \quad \forall n \geq n_0.$$

Entonces,

$$a_{n_0+p} < (L + \varepsilon)^p a_{n_0}, \quad \forall p \geq 1.$$

Como $L + \varepsilon < 1$, la serie $\sum a_n$ converge. Para probar (ii), tomando $0 < \varepsilon < \ell - 1$, sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_n(\ell - \varepsilon) < a_{n+1}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Como $\ell - \varepsilon > 1$, la sucesión $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ es creciente y por lo tanto no tiende a cero. \square

4. Criterio de Cauchy: Sea $c = \limsup \sqrt[n]{a_n}$. Entonces

(i) Si $c < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge.

(ii) Si $c > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge, y el término general no tiende a 0.

Demostración. Si $c < 1$ y tomamos $0 < \varepsilon < 1 - c$, resulta que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < (c + \varepsilon)^n$ para todo $n \geq n_0$. Otra vez, comparación simple prueba (i). Si $c > 1$ existe una subsucesión

$$(a_{n_k})^{1/n_k} \rightarrow c > 1,$$

y por lo tanto, $a_{n_k} \not\rightarrow 0$. \square

Las cantidades en los criterios de D'Alembert y de Cauchy está relacionadas por el siguiente

Lema 7.9. Sea $\{c_n\}$ una sucesión de números positivos. Entonces

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

Demostración. La primera y última desigualdades tienen demostraciones análogas, por lo que sólo demostraremos la última. Sea

$$\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

Si $\alpha = +\infty$ no hay nada que probar. Si α es finito, tomemos $\beta > \alpha$. Existe $N \geq 1$ tal que $c_{n+1}/c_n \leq \beta$ para todo $n \geq N$. Por lo tanto $c_{N+1} \leq \beta c_N$, e iterando esta desigualdad obtenemos

$$c_{N+k} \leq \beta^k c_N = \beta^{N+k} \beta^{-N} c_N.$$

Luego, para todo $n \geq N$

$$\sqrt[n]{c_n} \leq \beta \sqrt[n]{\beta^{-N} c_N}.$$

Como el miembro derecho converge a β cuando $n \rightarrow \infty$ se tiene que

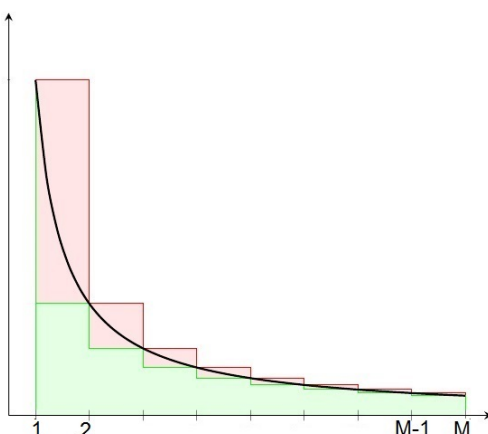
$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \beta.$$

Dado que esto es cierto para todo $\beta > \alpha$, el resultado queda demostrado. □

5. Criterio de la integral: Sea $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ una función continua y decreciente. Entonces

$$\sum_{n \geq 1} f(n) \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ converge.}$$

Demostración. Un vistazo a la siguiente figura



muestra que

$$f(2) \cdot 1 + \dots + f(M) \cdot 1 \leq \int_1^M f(x) dx \leq f(1) \cdot 1 + \dots + f(M-1) \cdot 1,$$

y por lo tanto la serie y la integral convergen o divergen simultáneamente. □

Una aplicación inmediata del criterio anterior es que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$ converge si y sólo si $p > 1$, pues

$$\int_1^M x^{-p} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p} (M^{1-p} - 1) & \text{si } p \neq 1 \\ \log M & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

En particular, la llamada serie armónica $\sum 1/n$ diverge, mientras que $\sum 1/n^2$ converge, lo que muestra que tanto en el criterio de D'Alembert como en el de Cauchy, no se puede decir nada cuando los límites dan 1.

Ejemplos 7.10. Comparando límites contra $\frac{1}{n^2}$ sale que

$$\sum_{n \geq 3} \frac{n^3 - 2n + 5}{4n^5 - 2n + 6} \text{ es convergente.}$$

Comparando límites contra $\frac{1}{n}$ sale que

$$\sum_{n \geq 3} \frac{n^3 - 2n \log n + 5}{n^4 - 2n + 6e^{-n}} \text{ es divergente.}$$

Si usamos el criterio de D'Alembert con la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$ obtenemos

$$\frac{(n+1)!/(n+1)^{(n+1)}}{n!/n^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} < 1,$$

y la serie converge.

Estudiamos la convergencia de $\sum_{n \geq 1} n [1 - \cos(1/n)]$. Por la regla de L'Hopital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Entonces, llamando $x = 1/n$ tenemos que el sumando se comporta como $1/n$ cuando $n \rightarrow \infty$, y por lo tanto la serie diverge.

Ejemplo 7.11. Sean $p, q \geq 0$. Probar que

$$\sum_{n \geq 3} \frac{1}{n^q (\log n)^p} \begin{cases} \text{converge} & \text{si } q > 1 \text{ o si } q = 1, p > 1 \\ \text{diverge} & \text{si } q < 1 \text{ o si } q = 1, p \leq 1 \end{cases}$$

Efectivamente, si $q > 1$ se tiene para todo $n \geq 3$:

$$\frac{1}{n^q (\log n)^p} \leq \frac{1}{n^q}, \text{ cuya serie converge.}$$

Si $q < 1$ tomemos el promedio $\tilde{q} = (q+1)/2$. Como $\tilde{q} < 1$, la serie de término general $n^{-\tilde{q}}$ diverge. Comparemos entonces esta sucesión con la del ejercicio en el infinito:

$$\frac{n^{-q} (\log n)^{-p}}{n^{-\tilde{q}}} = \frac{n^{\tilde{q}}}{n^q (\log n)^p} = \frac{n^{\tilde{q}-q}}{(\log n)^p} = \left[\frac{n^{\frac{\tilde{q}-q}{p}}}{\log n} \right]^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Entonces nuestra serie diverge. Finalmente, si $q = 1$ podemos usar el criterio de la integral, dado que para $x > 3$ la función $x (\log x)^p$ es producto de funciones crecientes, por lo que su inversa multiplicativa es decreciente. Vemos entonces que

$$\int_3^M \frac{dx}{x (\log x)^p} \stackrel{(y=\log x)}{=} \int_{\log 3}^{\log M} \frac{dy}{y^p},$$

la cual converge cuando $M \rightarrow \infty$ si y sólo si $p > 1$.

Ejercicio 7. Estudiar la convergencia de

$$\sum_{n \geq 3} \frac{n^3 - 2n(\log n)^6 + 5n^4(\log n)^2}{4n^5(\log n)^3 + 2n + 6n^4(\log n)^7}.$$

Lema de Abel y criterio de Dirichlet

Lema 7.12 (Lema de Abel). Sea $\{b_n\}$ una sucesión en \mathbb{C} cuyas sumas parciales $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ son acotadas: $|B_n| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de números positivos, se tiene

$$|a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n| \leq C a_1. \quad (9)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} |a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n| &= |a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) \cdots + a_n (B_n - B_{n-1})| \\ &= |B_1 (a_1 - a_2) + \cdots + B_{n-1} (a_{n-1} - a_n) + B_n a_n| \\ &\leq |B_1| (a_1 - a_2) + \cdots + |B_{n-1}| (a_{n-1} - a_n) + |B_n| a_n \\ &\leq C (a_1 - a_2) + \cdots + C (a_{n-1} - a_n) + C a_n = C a_1. \end{aligned}$$

□

Una consecuencia inmediata del lema es un criterio de convergencia que nos será muy útil.

Corolario 7.13 (Criterio de Dirichlet). Si $\{b_n\}$ es una sucesión en \mathbb{C} cuyas sumas parciales están acotadas y $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de números positivos que tiende a 0, entonces $\sum a_k b_k$ converge.

Demostración. Veamos que la sucesión de sumas parciales $S_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k$ es de Cauchy:

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leq C a_{n+1},$$

donde la última desigualdad sale de (9). Como $a_n \rightarrow 0$, la sucesión S_n es de Cauchy. □

Ejercicio 8. Probar el criterio de Abel: Si $b_n \in \mathbb{C}$ son tales que $\sum b_n$ converge y $a_n > 0$ tienden decreciendo a algún $a \geq 0$, entonces $\sum b_n a_n$ converge.

Observación 7.14. El criterio de Leibniz para series alternadas es el caso particular del criterio de Dirichlet en el que $b_n = (-1)^n$.

Ejemplos 7.15.

(1) Probemos que la serie $\sum_{n \geq 3} \frac{i^n}{n \log n}$ converge, pero no lo hace absolutamente. En efecto, la divergencia absoluta se probó en el Ejemplo 7.11. Para ver la convergencia basta con usar el criterio de Dirichlet, simplemente observando que las sumas parciales

$$\sum_{n=3}^{N+3} i^n = i^3 \sum_{n=0}^N i^n = i^3 \frac{1 - i^{N+1}}{1 - i}$$

están acotadas.

(2) Hallemos todos los $z \in \mathbb{C}$ de módulo 1 tales que $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n+1}$ es convergente. El conjunto $|z| = 1$ se puede parametrizar como $z = e^{it}$, con $0 \leq t < 2\pi$. Si $t = 0$ ya sabemos que la serie no converge. Si $t \neq 0$, entonces las sumas parciales

$$\left| \sum_{n=0}^N e^{int} \right| = \left| \frac{1 - e^{i(N+1)t}}{1 - e^{it}} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{it}|}$$

están acotadas. Además, como $1/(n+1)$ tiende a 0 decreciendo, el criterio de Dirichlet dice que

$$\sum_{n \geq 0} \frac{e^{int}}{n+1} \text{ converge si } t \neq 0.$$

Es decir, la serie converge en toda la circunferencia unidad salvo en el 1. Cuando $z = -1$, esto se hubiera podido obtener usando el criterio de Leibniz.

8. Sucesiones y series de funciones

Definición 8.1. Dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas en $U \subset \mathbb{C}$ a valores complejos y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, entonces:

(a) La sucesión $\{f_n\}$ converge **puntualmente** a f si para cada $z \in U$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z).$$

(b) La sucesión $\{f_n\}$ converge **uniformemente** a f en U si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{z \in U} |f(z) - f_n(z)| \right) = 0.$$

(c) La sucesión $\{f_n\}$ converge **uniformemente sobre compactos** de U a f si el punto (b) se verifica para cada subconjunto compacto $K \subseteq U$.

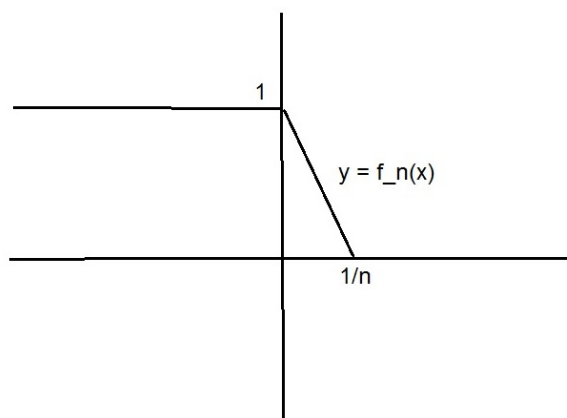
Es claro que:

$$\text{Convergencia uniforme} \Rightarrow \text{Convergencia uniforme en compactos} \Rightarrow \text{Convergencia puntual.} \quad (10)$$

Ninguna de las implicaciones recíprocas valen, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.2. La sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por los gráficos de la siguiente figura

1. Converge puntualmente a la función característica de $\mathbb{R}_{\leq 0}$ en todo \mathbb{R} .
2. Converge uniformemente sobre los compactos de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
3. No converge uniformemente en ningún conjunto que contenga un entorno del origen.



Proposición 8.3. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas definidas en $U \subseteq \mathbb{C}$, la cual converge uniformemente a una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces f también es continua en U .

Demostración. Sea $z_0 \in U$ y $\varepsilon > 0$. Por la convergencia uniforme, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_U |f - f_n| < \varepsilon/3.$$

Por otra parte, la continuidad de f_n implica que existe un $\delta > 0$ de modo que si $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f_n(z) - f_n(z_0)| < \varepsilon/3$. Luego, dado cualquier $z \in U$ tal que $|z - z_0| < \delta$,

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

□

Ejercicio 9 (Importante). Probar que el enunciado anterior continúa siendo verdadero si la convergencia es uniforme sobre compactos.

Proposición 8.4. Sea $f_n : K \rightarrow \mathbb{C}$ una sucesión de funciones continuas que es uniformemente de Cauchy: dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{z \in K} |f_n(z) - f_{n+p}(z)| < \varepsilon, \quad \text{si } n \geq n_0, \forall p \geq 1. \quad (11)$$

Entonces existe una función continua $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en K .

Demostración. Fijando un $z \in K$ arbitrario, la sucesión numérica $\{f_n(z)\}$ es de Cauchy en \mathbb{C} , y por lo tanto es convergente a un número complejo que podemos notar por $f(z)$, con lo cual obtuvimos la función f del enunciado y convergencia puntual. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos un $n_0 \in \mathbb{N}$ que satisfaga (11) con $\varepsilon/2$. Entonces, para todo $n \geq n_0$,

$$|f_n(z) - f(z)| \leq |f_n(z) - f_{n+p}(z)| + |f_{n+p}(z) - f(z)|.$$

Por (11) el primer sumando es $< \varepsilon/2$ cualquiera sea $p \geq 1$ y $z \in K$, y como la sucesión converge puntualmente, para cada $z \in K$ podemos elegir un $p = p(z) \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que el segundo sumando sea $< \varepsilon/2$. Entonces $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in K$ si $n \geq n_0$, lo que significa convergencia uniforme. Finalmente, la Proposición 8.3 afirma que f es continua. □

Ejemplo 8.5. La sucesión de funciones

$$f_n(z) = \begin{cases} |z|^n & \text{si } |z| < 1 \\ 1 & \text{si } |z| \geq 1 \end{cases}$$

converge puntualmente a la función característica de $|z| \geq 1$, o sea, que vale 1 allí y 0 en el resto de \mathbb{C} . La convergencia es uniforme en $|z| \geq 1$ (de hecho, allí son todas la constante 1), y también es uniforme sobre los compactos del disco unidad abierto \mathbb{D} . Por la Proposición 8.3 la convergencia no puede ser uniforme en $\overline{\mathbb{D}}$, algo que también se puede probar manualmente.

Un criterio muy útil para comprobar la convergencia uniforme de series de funciones es el siguiente:

Teorema 8.6 (Criterio de Weierstrass). Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en $U \subseteq \mathbb{C}$ tales que

$$\sup_{z \in U} |f_n(z)| \leq a_n, \quad \text{donde } \sum_n a_n < \infty.$$

Entonces, la serie $\sum_n f_n$ es uniformemente convergente.

Demostración. Basta ver que la serie es uniformemente de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $n_0 \geq 1$ tal que

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n < \varepsilon.$$

Luego, existe $n_0 \geq 1$ tal que si $m > n > n_0$ se tiene que para cualquier $z \in U$

$$\left| \sum_{k=1}^m f_k(z) - \sum_{k=1}^n f_k(z) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |f_k(z)| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k < \varepsilon.$$

□

Observación 8.7. Es obvio que la hipótesis del criterio implica que la serie converge absolutamente. Más aún, la demostración del teorema muestra que la serie de los módulos converge uniformemente.

Ejemplo 8.8. Probar que la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nz)}{n^2}$$

converge absoluta y uniformemente en \mathbb{R} pero no converge en ningún punto $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Para la convergencia en \mathbb{R} basta aplicar el criterio de Weierstrass, observando que

$$\left| \frac{\cos(nz)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{para todo } z \in \mathbb{R}.$$

Ahora, si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, con $y \neq 0$, una desigualdad de la Observación 6.4 muestra que:

$$2|\cos(nz)| \geq |e^{-ny} - e^{ny}| = e^{n|y|} - e^{-n|y|} > e^{n|y|} - 1,$$

por lo que

$$\left| \frac{\cos(nz)}{n^2} \right| > \frac{e^{n|y|} - 1}{2n^2} \not\rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Como el término general de la serie no tiende a 0, la serie no converge.

Observación 8.9. En la Proposición 8.4 vimos que toda sucesión de funciones uniformemente de Cauchy es uniformemente convergente. La afirmación recíproca es trivial, no requiere la completitud de \mathbb{C} (o de \mathbb{R}) y vale en cualquier espacio métrico. En particular, una serie de funciones uniformemente convergente es uniformemente de Cauchy, y dado ε existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$:

$$\sup_{z \in U} |f_n(z)| = \sup_{z \in U} \left| \sum_{k=n}^{n+0} f_k(z) \right| < \varepsilon,$$

lo que implica que su término general tiende a 0 uniformemente.

Ejercicio 10. Probar que la serie

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\sqrt{n}}{z^2 + n^2}$$

converge absoluta y uniformemente sobre los compactos de $U = \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$ pero no converge uniformemente en U .

9. Series de potencias

Una serie de potencias alrededor de un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

donde los coeficientes a_n son números complejos. Uno de los ejemplos más sencillos fué estudiado en el Ejemplo 7.5, donde vimos que la serie converge absolutamente sólo cuando $|z| < 1$, y que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}. \quad (12)$$

Este simple ejemplo se puede utilizar para estudiar la convergencia de series más generales.

Teorema 9.1. Dada una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, el número (o infinito) R definido por:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

se llama el **radio de convergencia** de la serie y satisface:

- (a) Si $|z - z_0| < R$ la serie converge absolutamente.
- (b) Si $|z - z_0| > R$ la serie no converge, y el término general no tiende a 0.
- (c) Si $|z - z_0| \leq r < R$ la serie converge de manera absoluta y uniforme.

Demostración. Con las convenciones obvias si $R = 0$ o ∞ ,

$$\frac{|z - z_0|}{R} = |z - z_0| \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| |z - z_0|^n}.$$

Luego el criterio de convergencia de Cauchy dice que valen (a) y (b). Si $R = 0$ el punto (c) no dice nada. Si $R > 0$, tomemos cualquier $0 < r < R$ y consideremos la región $|z - z_0| \leq r$. Luego $|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n|r^n$, y por el criterio de Weierstrass (Thm. 8.6) sólo hay que ver que la serie $\sum |a_n|r^n$ converge. Para eso usamos otra vez el criterio de Cauchy:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|r^n} = r \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{r}{R} < 1.$$

□

Ejemplos 9.2. El teorema anterior no afirma nada sobre posibles convergencias en el borde del disco de convergencia cuando $0 < R < \infty$. Efectivamente, series con igual disco de convergencia pueden comportarse de forma muy diferente en el borde. Ilustremos este fenómeno con 3 ejemplos:

$$\sum_{n \geq 0} z^n, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n+1}, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{(n+1)^2}.$$

Las 3 series tienen radio de convergencia 1. La primera no converge en ningún punto de la circunferencia unidad \mathbb{T} , porque el término general no tiende a 0. La segunda fué estudiada en los Ejemplos 7.15, donde se vió que converge en $\mathbb{T} \setminus \{1\}$ y diverge en 1. Finalmente, en la tercera,

$$\left| \frac{z^n}{(n+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^2}, \quad \forall z \in \mathbb{T},$$

por lo que la serie converge absolutamente en todo \mathbb{T} .

Ejemplo 9.3. Para hallar la región de convergencia de la serie $\sum_{k \geq 0} \frac{z^{2^k}}{2^k}$ primero notemos que

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 2^k \\ n^{-1} & \text{si } n = 2^k, \end{cases}$$

por lo que

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{n^{-1}} = 1.$$

Como el límite inferior es 0, el límite no existe. Eso no afecta el radio de convergencia. En el borde \mathbb{T} , la serie converge absolutamente.

Es claro que la definición del radio de convergencia está basada en el criterio de Cauchy. Como consecuencia del Lema 7.9 se obtiene que en algunos casos podemos también usar el de D'Alembert.

Proposición 9.4. Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, su radio de convergencia se puede calcular como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

siempre que el límite exista.

Por ejemplo, para calcular el radio de convergencia de la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n$, el factorial hace que el criterio de Cauchy no sea el más adecuado. Afortunadamente la proposición anterior nos dice que podemos calcularlo como $\lim |a_n/a_{n+1}| = e$ (ver el Ejemplo 7.10).

Corolario 9.5. Si la serie $\sum a_n(z - z_0)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$, es continua en $|z - z_0| < R$.

Demostración. Es una consecuencia inmediata del ítem (c) del Teorema 9.1 y del Ejercicio 9. \square

El corolario anterior sólo cuenta una pequeña parte de la historia. En lo que sigue veremos que la serie es holomorfa en el disco abierto de convergencia y que su derivada es la serie de sus derivadas. Primero necesitamos un par de lemas.

Lema 9.6. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, los radios de convergencia de las series

$$\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n \quad \text{y} \quad \sum_{n \geq 0} a_n(n + 1)^\alpha(z - z_0)^n$$

coinciden.

Demostración. Sale inmediatamente de la definición de radio de convergencia y de

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|(n + 1)^\alpha}.$$

\square

Lema 9.7. Si $n \geq 2$ es un número entero, entonces

$$\left| \frac{(z + h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} \right| \leq |h| n^2 (|z| + |h|)^{n-2}.$$

Teorema 9.8. Si la serie $S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$ y $z_1 \in D(z_0, R)$, entonces S es derivable en z_1 y vale

$$S'(z_1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (z_1 - z_0)^{n-1}.$$

Además, $S'(z)$ tiene radio de convergencia R .

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $z_0 = 0$. Sea $r > 0$ tal que $|z_1| < r < R$, y tomemos $h \in \mathbb{C}$ tal que $|z_1| + |h| < r$. Entonces las series

$$\sum_{n \geq 0} a_n(z_1 + h)^n, \quad \sum_{n \geq 0} a_n z_1^n \quad \text{y} \quad \sum_{n \geq 1} a_n n z_1^{n-1}$$

convergen. Luego

$$J_h(z_1) := \frac{S(z_1 + h) - S(z_1)}{h} - \sum_{n \geq 1} a_n n z_1^{n-1} = \sum_{n \geq 2} a_n \left[\frac{(z_1 + h)^n - z_1^n}{h} - n z_1^{n-1} \right].$$

Tomando módulos y usando el Lema 9.7 resulta

$$|J_h(z_1)| \leq |h| \sum_{n \geq 2} |a_n| n^2 (|z_1| + |h|)^{n-2} \leq |h| \sum_{n \geq 2} |a_n| n^2 r^{n-2},$$

cualquiera sea $h \in \mathbb{C}$ que satisface $|z_1| + |h| < r$. Como por el Lema 9.6, la serie $\sum a_n n^2 z^n$ tiene radio de convergencia R , y dado que $r < R$, la última serie converge. En consecuencia, $\lim_{h \rightarrow 0} J_h(z_1) = 0$, lo que prueba el teorema. \square

Aplicando este resultado sucesivamente obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 9.9. Una serie de potencias es infinitamente derivable (en sentido complejo) dentro de su disco abierto de convergencia. Más aún, las sucesivas derivadas se obtienen derivando la serie sucesivamente término a término. En particular, las sucesivas derivadas vuelven a ser series de potencias, las cuales además poseen el mismo radio de convergencia que la original.

Corolario 9.10. Si $s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ posee radio de convergencia $R > 0$, entonces

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$$

tiene radio de convergencia R y $S'(z) = s(z)$ para todo $z \in D(z_0, R)$.

Corolario 9.11. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ posee radio de convergencia $R > 0$, entonces

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Demostración. No hay nada que probar si $k = 0$. Si $k \geq 1$, por el Corolario 9.9:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n \geq k} a_n n(n-1) \dots (n-(k-1)) (z - z_0)^{n-k},$$

por lo que $f^{(k)}(z_0) = a_k k(k-1) \dots 1 = a_k k!$ \square

Ejemplos 9.12. Por el Ejemplo 7.5,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n, \quad \text{si } |z| < 1. \quad (13)$$

Entonces, derivando ambos miembros de la igualdad obtenemos

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n \geq 1} n z^{n-1}, \quad \text{si } |z| < 1.$$

Definición 9.13. Una función f se dice analítica en $z_0 \in \mathbb{C}$ si existe $r > 0$ tal que $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ en $D(z_0, r)$ (se sobreentiende que el radio de convergencia es $\geq r$).

Observación 9.14. Toda función analítica en $z_0 \in \mathbb{C}$ es holomorfa en z_0 . Más aún, el Teorema 9.8 dice que una serie es holomorfa en su disco abierto de convergencia. Todo lo anterior vale también para variable real con idénticas demostraciones. Veamos con un ejemplo que en variable real existen funciones C^∞ que no son analíticas. Existe una función f de clase C^∞ como en el siguiente gráfico.

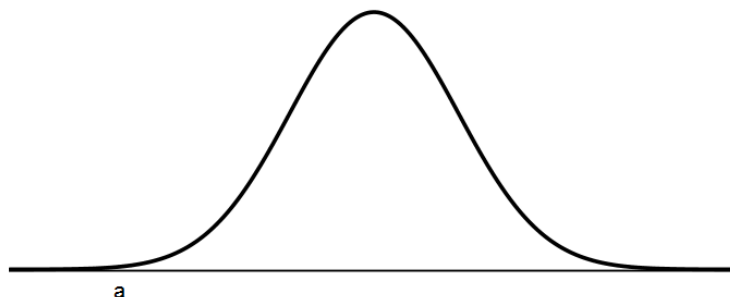


Figura 7: f es un pulso C^∞

El punto a es donde la función deja de ser nula para ser positiva. Esta función no es analítica en a , porque de lo contrario existiría $r > 0$ tal que

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n(x - a)^n \quad \forall x \in (a - r, a + r),$$

y como f es de clase C^∞ , sus coeficientes valen

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} = 0 \quad \forall n \geq 0,$$

lo que da la serie nula. Un ejemplo de funciones como la de arriba es

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

En contraposición con este ejemplo, más adelante veremos que una función compleja con sólo ser holomorfa también es analítica. En otras palabras, las clases de funciones holomorfas y analíticas coinciden.

10. Integración de funciones a valores complejos

Comencemos considerando una función $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de modo que

$$\alpha(t) = u(t) + iv(t)$$

donde $u = \operatorname{Re}(\alpha)$ y $v = \operatorname{Im}(\alpha)$. La función α se dice integrable en el intervalo $[a, b]$ si las funciones u y v son integrables (en el sentido de Riemann). En tal caso

$$\int_a^b \alpha(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

Las propiedades básicas de la integral se aplican a funciones a valores complejos; en particular, por el teorema fundamental del cálculo (aplicado en u y v), si α es una función continua

$$\frac{d}{dt} \int_a^t \alpha(s) ds = \alpha(t),$$

y si $\alpha'(t)$ es continua

$$\int_a^b \alpha'(t) dt = \alpha(b) - \alpha(a).$$

Integración a lo largo de curvas

Diremos que una función $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva (o un arco) parametrizada, la cual llamaremos **suave** si sus partes real e imaginaria son de clase C^1 y $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$ ¹.

Diremos que $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es **suave a trozos** si es continua y existen puntos

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$$

tales que α restringida a cada intervalo $[a_k, a_{k+1}]$ es suave. Notar que en a_k la derivada por izquierda y por derecha pueden ser distintas, si $k = 1, \dots, n-1$.

Definición 10.1. Diremos que dos curvas parametrizadas $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ son equivalentes si existe una biyección con derivada continua $s \mapsto t(s)$ del intervalo $[a, b]$ sobre el intervalo $[c, d]$ tal que $t'(s) > 0$ y

$$\alpha(s) = \beta(t(s)).$$

La clase de equivalencia de una curva parametrizada suave (resp. suave a trozos) $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ determina una **curva suave** (resp. **suave a trozos**) γ .

La clase γ^- se obtiene a partir de γ al invertir su orientación (de recorrido). Una parametrización de γ^- sería la dada por

$$\beta : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{C} \quad \beta(t) = \alpha(-t).$$

Los **extremos inicial y final** de la curva son respectivamente los puntos $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$. La curva se dice **cerrada** si $\alpha(a) = \alpha(b)$, y **simple** si no se interseca a sí misma salvo posiblemente por $\alpha(a) = \alpha(b)$ (cuando es cerrada). En otras palabras, si alguna (y por ende toda) parametrización α

¹En los extremos del intervalo $[a, b]$ las derivadas son laterales.

de la curva es inyectiva en $[a, b]$ salvo por posible igualdad en los extremos. Se dice que una curva cerrada simple está recorrida en sentido positivo si el sentido es antihorario.

Geoméricamente, la relación de equivalencia hace que una curva suave simple dependa de su imagen y de su sentido de recorrido, pero no de su velocidad.

Ejercicio 11. Sea γ una curva suave parametrizada por $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y sea $\Phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ una función C^1 tal que $\Phi'(s) < 0$ para todo $s \in [a, b]$. Probar que $\alpha \circ \Phi$ es una parametrización de γ^- .

Definición 10.2. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua y $\alpha : [a, b] \rightarrow U$ una parametrización de la curva suave γ . Entonces definimos

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\alpha(t)) \alpha'(t) dt.$$

Para que sea una buena definición, debemos probar que no depende de la parametrización de γ elegida. Supongamos que $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ es otra parametrización de γ . Entonces existe una función $s : [a, b] \rightarrow [c, d]$ de clase C^1 de modo que $s'(t) > 0$ y $\alpha(t) = \beta(s(t))$. Luego

$$\int_a^b f(\alpha(t)) \alpha'(t) dt = \int_a^b f(\beta(s(t))) \beta'(s(t)) s'(t) dt = \int_c^d f(\beta(s)) \beta'(s) ds.$$

En el caso de curvas suaves a trozos como las descritas al comienzo de esta sección, esta definición se extiende de la manera tradicional

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(\alpha(t)) \alpha'(t) dt.$$

Definición 10.3. La **longitud** de una curva γ se define como

$$Long(\gamma) = \int_{\gamma} |dz| := \int_a^b |\alpha'(t)| dt$$

donde $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una parametrización de γ .

Al igual que antes, esta definición no depende de la parametrización elegida (y en este caso particular, tampoco de la orientación). Es importante notar que si la curva no es simple, la longitud de la curva es la longitud de todo su recorrido y no su imagen. Por ejemplo, si $\alpha(t) = e^{it}$ para $t \in [0, 4\pi]$, entonces su imagen es la circunferencia de radio 1, pero

$$\int_0^{4\pi} |\alpha'(t)| dt = 4\pi,$$

pues recorre la circunferencia 2 veces.

Observación 10.4. En muchas ocasiones utilizaremos la siguiente notación:

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| := \int_a^b f(\alpha(t)) |\alpha'(t)| dt.$$

Esto significa que estamos integrando la función f con respecto al diferencial de longitud de arco y no con respecto al diferencial de arco.

Ejemplo 10.5. Sea γ una curva parametrizada por $\alpha(t) = e^{it}$, con $0 \leq t \leq \pi$. Entonces

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \int_0^{\pi} e^{i2t} i e^{it} dt \stackrel{\text{¿por?}}{=} \frac{e^{i3t}}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{3}(e^{i3\pi} - 1) = -\frac{2}{3},$$

mientras que

$$\int_{\gamma} z^2 |dz| = \int_0^{\pi} e^{i2t} dt = \frac{e^{i2t}}{2i} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2i}(e^{i2\pi} - 1) = 0.$$

Frecuentemente haremos el abuso de notación de llamar γ o también α , tanto a la clase de equivalencia de una curva como a una de sus parametrizaciones.

Proposición 10.6. La integración sobre curvas posee las siguientes propiedades:

(i) Dado $a, b \in \mathbb{C}$ entonces

$$\int_{\gamma} (af(z) + bg(z)) dz = a \int_{\gamma} f(z) dz + b \int_{\gamma} g(z) dz.$$

(ii) Si γ^- es la curva γ con la orientación invertida entonces

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

(iii) Vale la siguiente desigualdad

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|.$$

Demostración. Los dos primeros puntos son triviales. Para (iii) escribamos $r e^{i\theta} = \int_{\gamma} f(z) dz$. Entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= r = \int_{\gamma} e^{-i\theta} f(z) dz = \operatorname{Re} \int_{\gamma} e^{-i\theta} f(z) dz = \int_a^b \operatorname{Re} \left[e^{-i\theta} (f \circ \gamma)(t) \gamma'(t) \right] dt \\ &\leq \int_a^b \left| e^{-i\theta} (f \circ \gamma)(t) \gamma'(t) \right| dt = \int_{\gamma} |f(z)| |dz|. \end{aligned}$$

La desigualdad del cambio de línea la conocemos porque los integrandos son funciones reales. \square

El último punto de la Proposición muestra que si f es continua sobre una curva suave de a trozos, entonces

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{\gamma} |f|. \operatorname{Long}(\gamma).$$

Ejemplo 10.7. Sea $\alpha(t) = t4i + (1-t)(-i)$, con $t \in [0, 1]$, una parametrización del segmento que va desde $-i$ hasta $4i$. Entonces

$$\left| \int_{\alpha} \cos z dz \right| \leq 5 \sup_{-1 \leq y \leq 4} \frac{e^{-y} + e^y}{2}.$$

11. Primitivas

Definición 11.1. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Una función $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ se dice una **primitiva** de f en U si satisface que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in U$.

Notemos que si F y f son como en la definición anterior y $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una parametrización de una curva suave γ con extremos inicial z_0 y final z_1 , entonces

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\alpha(t)) \alpha'(t) dt = \int_a^b F'(\alpha(t)) \alpha'(t) dt \\ &= \int_a^b (F \circ \alpha)'(t) dt = F(z_1) - F(z_0). \end{aligned}$$

En particular, la integral sólo depende de los extremos de γ . Esto se extiende a curvas suaves de a trozos. En efecto, si γ está formada por una unión de curvas suaves, donde cada γ_j empieza en z_j y termina en z_{j+1} , vemos que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\gamma_j} f(z) dz = \sum_{j=0}^{n-1} F(z_{j+1}) - F(z_j) = F(z_n) - F(z_0).$$

Teorema 11.2. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Son equivalentes:

- (a) f tiene una primitiva en U ;
- (b) Si γ_1 y γ_2 son dos curvas suaves de a trozos que poseen el mismo punto inicial y el mismo punto final, entonces

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

- (c) La integral de f sobre toda curva cerrada (suave de a trozos) es nula.

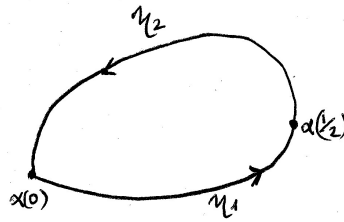
Demostración.

(a) \Rightarrow (b) Ya lo vimos.

(b) \Rightarrow (c) Si γ es una curva cerrada y $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ es una parametrización de γ , entonces $\gamma = \eta_1 \vee \eta_2$, donde η_1 es la curva parametrizada por $\alpha|_{[0, 1/2]}$ y η_2 es la curva parametrizada por $\alpha|_{[1/2, 1]}$. Luego,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\eta_1} f(z) dz + \int_{\eta_2} f(z) dz = \int_{\eta_1} f(z) dz - \int_{\eta_2^-} f(z) dz = 0,$$

donde en la última igualdad hemos usado la hipótesis, puesto que η_1 y η_2^- poseen los mismos extremos.



(c) \Rightarrow (b) La demostración es análoga a la anterior.

(b) \Rightarrow (a) Fijemos $z_0 \in U$. Dado otro punto $z \in U$, existe una curva γ que une z_0 con z . Por (b) la siguiente función está bien definida (no depende de γ):

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(w) dw := \int_{\gamma} f(w) dw.$$

Veamos ahora que $F'(z) = f(z)$.

Dado un $z \in U$ existe $\delta > 0$ tal que $D(z, \delta) \subseteq U$. Luego, para todo $h \in \mathbb{C}$ tal que $|h| < \delta$ el segmento $s(h)$ que va de z a $z + h$ está incluido en U , y se tiene que

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \left[\int_{z_0}^z f(w) dw + \int_{s(h)} f(w) dw - \int_{z_0}^z f(w) dw \right] = \frac{1}{h} \int_{s(h)} f(w) dw.$$

Como la función constante 1 tiene por primitiva a $g(w) = w$, se tiene que

$$f(z) = f(z) \left[\frac{(z+h) - z}{h} \right] = \frac{1}{h} \int_{s(h)} f(z) dw.$$

Luego

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{s(h)} (f(w) - f(z)) dw \right| \\ &\leq \left(\sup_{w \in s(h)} |f(w) - f(z)| \right) \frac{1}{|h|} \int_{s(h)} |dw| \\ &= \sup_{w \in s(h)} |f(w) - f(z)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $h \rightarrow 0$ por la continuidad de f .

□

Proposición 11.3. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo, y sean F_1 y F_2 dos primitivas de una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces $F_1 - F_2 = \text{cte}$.

Demostración. El resultado es inmediato del Corolario 4.12.

□

Ejemplos 11.4.

(1) Integramos la función z^2 sobre una curva cualquiera que vaya del punto 0 al punto $1+i$. Como la integral no depende de la curva, podemos escribirla como:

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \frac{z^3}{3} \Big|_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3} = \frac{2}{3}(-1+i).$$

(2) Aquí integraremos sobre una curva que no pase por el origen y va de z_1 a z_2 :

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z^2} dz = \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}.$$

(3) Si $(|z|=1)^+$ nota la circunferencia unidad recorrida en sentido positivo, el Teor. 11.2 dice que

$$\int_{(|z|=1)^+} \frac{dz}{z^2} = 0,$$

puesto que $-1/z$ es una primitiva de $1/z^2$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(4) Sea γ un arco suave que no pasa por $\mathbb{R}_{\leq 0}$ y que va de $-2i$ hasta $2i$. Entonces

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \text{Log}(2i) - \text{Log}(-2i) = (\log 2 + i\pi/2) - (\log 2 - i\pi/2) = i\pi.$$

¿Qué podríamos hacer si la hipótesis fuera que la curva no pasa por $\mathbb{R}_{\geq 0}$?

(5) Veamos una generalización del ejemplo anterior. Sea S_{α} es la semirrecta que nace en el origen y forma un ángulo $0 \leq \alpha < 2\pi$ con los reales positivos, y llamemos \log_{α} al logaritmo definido en $U := \mathbb{C} \setminus S_{\alpha}$ tal que $\alpha < \arg z < \alpha + 2\pi$. Entonces \log_{α} es una primitiva de $1/z$ en U , y por lo tanto si γ es una curva simple en U (o sea, que no cruza S_{α}) que va de $z_0 \in U$ a $z_1 \in U$, entonces

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \log_{\alpha}(z_1) - \log_{\alpha}(z_0).$$

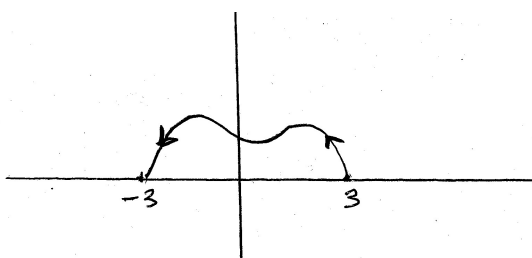
Si bien necesitamos sacarle a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ una semirrecta S_{α} para definir una de las primitivas de la función $1/z$ que habíamos visto con anterioridad (uno de los logaritmos antes vistos), eso no implica que $1/z$ no tenga una primitiva global en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sólo implica que uno de los logaritmos que vimos no es una tal primitiva. Por el Teorema 11.2 para ver que no existe una tal primitiva todo lo que tenemos que hacer es encontrar una curva simple cerrada en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que la integral de $1/z$ sobre esa curva no se anule. Si $R > 0$ la curva $(|z|=R)^+$ se puede parametrizar como $z = Re^{it}$, con $0 \leq t \leq 2\pi$. Entonces

$$\int_{(|z|=R)^+} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} iRe^{it} dt = 2\pi i \neq 0.$$

(6) Sea γ una curva suave que va de 3 a -3 manteniéndose en el semiplano $\mathbb{C}_+ = \{z : \text{Im } z > 0\}$, salvo por los puntos inicial y final. Integramos la función $z^{1/2}$, donde $0 \leq \arg z < 2\pi$ sobre esa curva.

Aquí tenemos un problema, porque así definida, la raíz cuadrada tiene una primitiva en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, pero el punto 3 está en $\mathbb{R}_{\geq 0}$, justo donde el argumento es discontinuo. Como el argumento es continuo

sobre la curva, algo que podríamos hacer es integrar desde un poco más arriba en la curva (usando una primitiva) y luego hacer que ese punto tienda a 3 sobre la curva. Eso funcionaría, pero veamos otra forma de hacerlo, cuya idea es estándar y va a resultar muy útil más adelante.



Definamos $z^{1/2}$ con el argumento $-\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$. Sobre $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}_{\neq 0}$ este nuevo argumento coincide con el anterior, y por lo tanto las dos definiciones de $z^{1/2}$ coinciden sobre la curva (¡son la misma función!). La ventaja, es que ahora tenemos una primitiva $F(z) = \frac{2}{3}z^{3/2}$ salvo en la semirrecta de los números imaginarios ≤ 0 . Por lo tanto la integral que queríamos calcular da

$$\int_{\gamma} z^{1/2} dz = \frac{2}{3} z^{3/2} \Big|_{-3}^3 = \frac{2}{3} 3^{3/2} (e^0 - e^{3i\pi/2}) = 2\sqrt{3}(1 + i).$$

11.1. Primitiva sobre una curva

Definición 11.5. Si $U \subset \mathbb{C}$ es abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua, diremos que f tiene primitivas locales en U si para todo $z_0 \in U$ existen un disco abierto $D(z_0, r) \subset U$ y una función F primitiva de f en ese disco (o sea, $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in D(z_0, r)$).

Proposición 11.6. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua con primitivas locales en el abierto U y sea $\alpha : [a, b] \rightarrow U$ una curva suave de a trozos simple, que no es cerrada. Entonces existe una función F definida en algún entorno de $\alpha([a, b])$ tal que $F'(\alpha(t)) = f(\alpha(t))$ para todo $t \in [a, b]$. La función F es única sobre $\alpha([a, b])$ salvo constante aditiva.

Idea de la demostración. Cada punto $t \in [a, b]$ tiene un entorno (un intervalo abierto en $[a, b]$) que α manda en un disco en el cual f tiene una primitiva. Por compacidad podemos cubrir todo $[a, b]$ con finitos de esos entornos. Es decir, hay puntos

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = b,$$

tales que para cada $0 \leq j \leq n$, α manda el segmento $[t_j, t_{j+1}]$ en un disco abierto $V_j \subset U$, en el que f tiene una primitiva F_j . La intersección $V_j \cap V_{j+1}$ contiene al punto $\alpha(t_{j+1})$ y por lo tanto no es vacía. Como además es conexa, tenemos que

$$F_{j+1}(z) - F_j(z) \text{ es constante en } V_j \cap V_{j+1}.$$

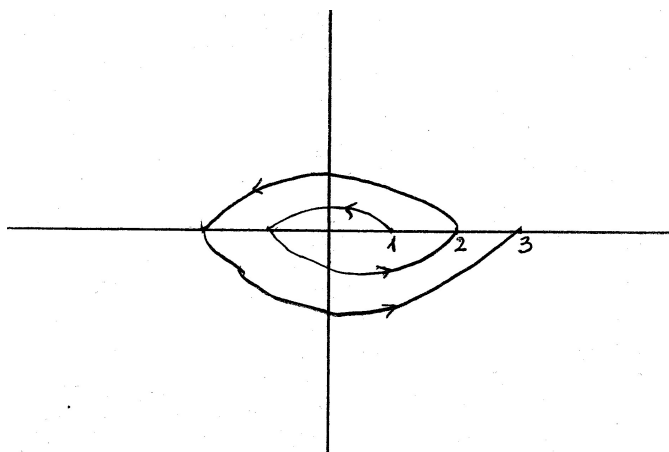
Entonces sumándole una constante a F_{j+1} en cada paso podemos suponer que coinciden en cada una de esas intersecciones, obteniendo al final una función F definida en $V_0 \cup \dots \cup V_n$ que es primitiva de f en ese conjunto.

Para ver la unicidad, supongamos que $V \subset U$ es un conjunto abierto y conexo que contiene a la curva y tal que hay dos funciones F y G que satisfacen

$$F'(z) = f(z) = G'(z) \text{ para todo } z \in V.$$

Luego la conexidad de V implica que $F - G$ es constante en V . □

Ejercicio 12. Calcular $\int_{\alpha} \frac{dz}{z}$, donde α es una curva suave de a trozos dada por la siguiente figura:



Si la función $1/z$, que está definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, tuviera una primitiva F en ese conjunto, tendríamos simplemente que la integral vale $F(3) - F(1)$. Pero el ítem (5) de los Ejemplos 11.4 muestra que no existe tal primitiva. Otra opción sería parametrizar la curva y calcular la integral con esa parametrización. Eso se podría hacer si, por ejemplo, la curva fuera una unión de semicírculos. Pero lo mejor será encontrar una primitiva a lo largo de la curva.

Por ejemplo, saliendo del 1 podemos usar el logaritmo principal hasta que lleguemos al eje imaginario, donde podemos cambiar al logaritmo cuyo argumento está en $(0, 2\pi)$. Luego el argumento se puede incrementar hasta el punto 2, donde vale $\arg 2 = 2\pi$ y así siguiendo hasta que en 3 el argumento vale 4π . Entonces queda

$$\int_{\alpha} \frac{dz}{z} = (\log 3 + i4\pi) - (\log 1 + i0).$$

12. Teorema de Cauchy-Goursat

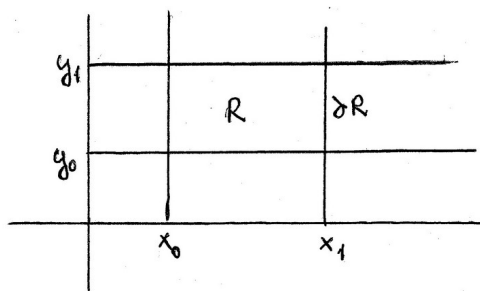
Una de las propiedades más importantes de las funciones holomorfas es que la integral a lo largo de una curva cerrada es cero si "dentro" del camino la función es holomorfa. Este hecho fué originalmente probado por Cauchy bajo la hipótesis adicional de que la función sea C^1 , que resulta ser una hipótesis muy restrictiva y limita el desarrollo de la teoría. La demostración de este resultado sin pedir esta hipótesis fué un enorme avance que se debe a Goursat. Es por esto que a este teorema se lo conoce como el Teorema de Cauchy-Goursat.

Veremos la demostración de Cauchy, puesto que muestra más claramente lo que está pasando y es mucho más simple. De ahora en más asumiremos que toda curva es suave de a trozos y cuando es cerrada y simple, el recorrido (por defecto) es positivo. Si $\gamma \subset \mathbb{C}$ es una curva cerrada simple, el Teorema de Jordan (que es mucho más difícil de demostrar de lo que la intuición sugiere) dice que $\mathbb{C} \setminus \gamma$ tiene 2 componentes conexas, una no acotada y una acotada. A la componente acotada la denotaremos γ° . Empezaremos esbozando una demostración del Teorema de Green.

Teorema 12.1 (Teorema de Green). Sea γ una curva cerrada simple en \mathbb{R}^2 y sean $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ funciones C^1 en algún entorno de $\gamma \cup \gamma^\circ$. Entonces

$$\int_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_{\gamma^\circ} (Q_x - P_y)dxdy.$$

Demostración. Primero probemos la fórmula para un rectángulo:



Luego

$$\iint_R Q_x dxdy = \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} Q_x dxdy = \int_{y_0}^{y_1} [Q(x_1, y) - Q(x_0, y)] dy = \int_{\partial R} Q(x, y) dy.$$

Análogamente

$$\iint_R P_y dxdy = \int_{x_0}^{x_1} [P(x, y_1) - P(x, y_0)] dx = - \int_{\partial R} P(x, y) dx.$$

Si ahora tomamos una unión de rectángulos, como en el ejemplo que sigue:

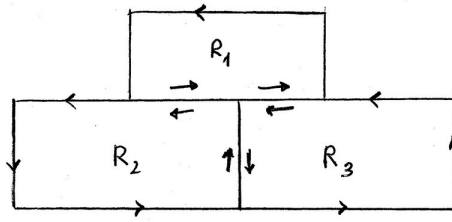


Figura 8: Unión finita de rectángulos

y llamamos $R = \bigcup_{j=1}^3 R_j$, obtenemos que

$$\int_{\partial R} Pdx + Qdy = \sum_{j=1}^3 \int_{\partial R_j} Pdx + Qdy = \sum_{j=1}^3 \iint_{R_j} (Q_x - P_y) dx dy,$$

donde la primera igualdad sale observando las compensaciones de integrales en la Figura 8 y la última igualdad sale del caso anterior. Claramente, este razonamiento funciona para cualquier unión finita de rectángulos. En general, $\gamma \cup \gamma^\circ$ se aproxima por dominios que son uniones finitas de rectángulos y se demuestra que la integral sobre el borde tiende a la integral sobre γ , y la integral de área tiende a la integral sobre γ° . \square

Como consecuencia inmediata se obtiene el:

Teorema 12.2 (Teorema de Cauchy). Sea γ una curva cerrada simple en \mathbb{C} y sea f una función holomorfa en algún entorno de $\gamma \cup \gamma^\circ$ tal que f' es continua. Entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Demostración. Escribamos $f = u + iv$, con u y v funciones reales. Como f es holomorfa y f' es continua, se tiene que las 2 derivadas parciales de u y de v son continuas. Luego, se puede aplicar el Teorema de Green a u y v . Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} (u + iv)(dx + idy) = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} u dy + v dx \\ &= \iint_{\gamma^\circ} (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_{\gamma^\circ} (u_x - v_y) dx dy = 0, \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad es por Green y la última por Cauchy-Riemann. \square

Teorema 12.3 (Teorema de Cauchy-Goursat). Sea γ una curva cerrada simple en \mathbb{C} y sea f una función holomorfa en algún entorno de $\gamma \cup \gamma^\circ$. Entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Ejemplos 12.4.

(1) La función z^{-n} para $n = 2, 3, \dots$ tiene primitiva en $\mathbb{C}_* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y por lo tanto su integral sobre toda curva cerrada en \mathbb{C}_* es nula por el Teorema 11.2. Sin embargo esta función no es holomorfa en la región interior al círculo $|z| = 1$. Eso significa que la integral sobre γ puede anularse aunque la f no sea holomorfa en todo γ° .

(2) Toda función entera tiene una primitiva. Por ejemplo:

$$f(z) = \exp [z^{17} - 5\sqrt{\pi}z^3 + i \operatorname{sen} z] \cos^2(1 - e^{-22iz}) + 10.$$

(3) La función

$$f(z) = \frac{z^5 - \sqrt{3}z^2 + i(e^5 - 2)}{z^3 + z + 2(z^2 + 1)}$$

tiene una primitiva en $U = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

(4) Si $S \subset \mathbb{C}$ es una semirrecta que nace en el origen, entonces z^{-1} tiene una primitiva en $\mathbb{C} \setminus S$. Esto ya lo sabíamos, pero también sale de los teoremas de Cauchy-Goursat y 11.2.

13. Aplicaciones del Teorema de Cauchy-Goursat

Definición 13.1. Un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}$ se dice **simplemente conexo** si es conexo y se cumple cualquiera de las siguientes (equivalentes) propiedades

- Para toda curva cerrada simple $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ se verifica que $\gamma^\circ \subset U$.
- Toda función continua $f : \partial\mathbb{D} \rightarrow U$ se puede extender a una función continua $F : \mathbb{D} \rightarrow U$.
- Para toda curva cerrada simple $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ existe una función continua $F : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow U$, tal que $F(0, t) = \gamma(t)$ y $F(1, t) = \text{cte}$.

Geoméricamente, un conjunto abierto es simplemente conexo cuando es conexo y no tiene agujeros. El tercer ítem en la definición dice que toda curva cerrada simple en U se puede deformar continuamente a un punto sin salir de U .

Observación 13.2. Una curva cerrada que se corta a sí misma sólo finitas veces se puede escribir como una unión finita de curvas cerradas simples. Luego, si γ es una de esas curvas que además está contenida en un abierto simplemente conexo U , y f es una función holomorfa en U , el Teorema de Cauchy-Goursat dice que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

La siguiente proposición es muy importante, y se deduce inmediatamente del Teorema de Cauchy-Goursat y el Teorema 11.2.

Proposición 13.3. Si U es un abierto simplemente conexo y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces tiene primitiva en U .

Ejemplos 13.4. Vimos anteriormente que para definir un logaritmo continuo necesitábamos sacarle al plano complejo alguna semirrecta S_α que empezaba en el origen, donde α denotaba el ángulo que forma con $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Veamos ahora que si $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es cualquier abierto **simplemente conexo**, existe un logaritmo holomorfo en U . En efecto, como la función $1/z$ es holomorfa en U , que es simplemente conexo, la proposición anterior dice que tiene alguna primitiva $G(z)$ en U . Fijemos de antemano un punto $z_0 \in U$ y un logaritmo $\log z_0$ cualquiera de z_0 . Entonces la función definida como

$$F(z) := \log z_0 + G(z) - G(z_0), \quad (z \in U)$$

satisface

$$(z^{-1}e^{F(z)})' = -z^{-2}e^{F(z)} + z^{-1}F'(z)e^{F(z)} = e^{F(z)}(-z^{-2} + z^{-2}) = 0.$$

Como U es conexo, necesariamente $z^{-1}e^{F(z)} = c \in \mathbb{C}$ es constante. Luego $e^{F(z)} = cz$, y como

$$cz_0 = e^{F(z_0)} = e^{\log z_0} = z_0,$$

se tiene que $c = 1$, lo que implica que $e^{F(z)} = z$, como queríamos probar. Por ejemplo, un conjunto simplemente conexo que no contiene al cero es $U = \mathbb{C} \setminus \overline{C}$, donde C es el Ejemplo 2.27. Otro casi igual de bonito es el complemento de la espiral $U = \mathbb{C} \setminus \{re^{ir} : r \geq 0\}$, como en la siguiente figura

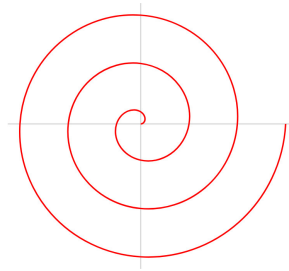


Figura 9: Sacamos la curva roja

Teorema 13.5. Sea Ω un abierto de \mathbb{C} *simplemente conexo*. Si $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica, entonces existe una función holomorfa $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de modo que $u = \operatorname{Re}(f)$. La función $v = \operatorname{Im}(f)$ se llama una conjugada armónica de u , y (en cualquier abierto conexo) es única salvo por la suma de una constante real.

Demostración. Como u es C^2 se tiene que $g := u_x - iu_y$ es C^1 como función de (x, y) , y por lo tanto es diferenciable. Además, como $\Delta u = 0$, tenemos que

$$(u_x)_x = (-u_y)_y \quad \text{y} \quad (u_x)_y = -(-u_y)_x,$$

que son las ecuaciones de Cauchy-Riemann para g . Luego el Teorema 4.10, dice que g es holomorfa en Ω . Por la Proposición 13.3 existe una primitiva $G = U + iV$ de g . O sea, $g = G' = U_x - iU_y$ en Ω . Entonces $u_x - iu_y = g = U_x - iU_y$, y por lo tanto los gradientes coinciden: $\nabla u = \nabla U$, y como Ω es conexo, se tiene que ambas funciones difieren en una constante aditiva. Entonces $U = u + c$, con $c \in \mathbb{R}$, y por lo tanto,

$$\operatorname{Re}(G(z) - c) = U(z) - c = u(z) \quad \forall z \in \Omega,$$

lo que prueba el Teorema con $f = G - c$. □

El teorema tiene una serie de corolarios importantes, que vemos a continuación.

Corolario 13.6. Toda función armónica real es localmente la parte real de una función holomorfa.

Demostración. La bola abierta $D(z_0, \varepsilon)$ es un abierto simplemente conexo. □

Corolario 13.7. Si $U \subset \mathbb{C}$ es abierto y $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica, entonces u es C^∞ .

Demostración. Es inmediato del corolario anterior y del Corolario 15.4, que veremos más adelante. □

Ejercicio 13. Hallar todos los números $a, b \in \mathbb{R}$, y $n \in \mathbb{N}$ tales que la función $u(x, y) = ax^n + by^n$ es armónica.

Dominios múltiplemente conexos

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata del Teorema 12.3, por lo que también a menudo se lo llama Teorema de Cauchy-Goursat para dominios múltiplemente conexos.

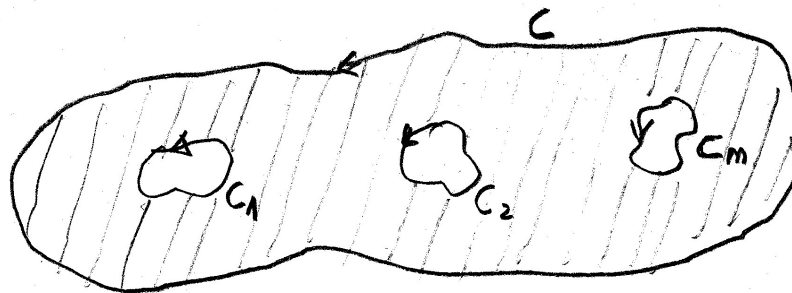


Figura 10: f es holomorfa en la región sombreada.

Teorema 13.8. Sean C, C_1, \dots, C_n curvas cerradas simples recorridas positivamente tales que todas las C_k están en C° , y las regiones interiores de los C_k no tienen puntos en común (para $1 \leq k \leq n$). Si f es holomorfa en algún entorno de $C \cup C^\circ \setminus \bigcup_{k=1}^n C_k^\circ$ (ver Figura 10), entonces

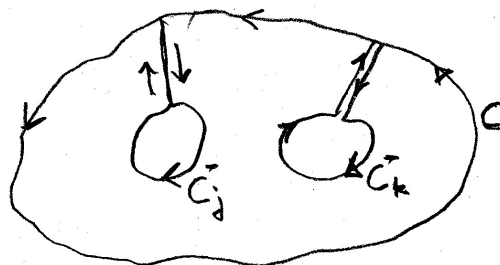
$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz. \quad (14)$$

Demostración. Pensemos en una curva cerrada grande formada por la C seguida por un segmento va hasta C_k^- , seguida por el mismo segmento que vuelve a C , y así siguiendo con todas la curvas C_k . Como f es holomorfa en el interior de toda esa curva, el teorema de Cauchy-Goursat asegura que

$$\int_C f(z) dz + \sum_{k=1}^n \int_{C_k^-} f(z) dz = 0,$$

que es otra forma de escribir (14). Observemos que en realidad, la curva que se obtiene con el proceso anterior no es simple ni es unión de finitas curvas simples, con lo que no podemos aplicar el

Teorema 12.3 sin más. Eso se arregla tomando un segmento para ir de C a C_k^- y otro muy cercano para volver (pero distinto). Es decir, dejar una pequeña luz entre ambos segmentos, y luego usar la continuidad de la función f para ver que la suma de las integrales sobre esos segmentos tiende a cero cuando la luz entre ambos tiende a cero. Ver la figura siguiente:



□

Ejemplo 13.9. Sean $\gamma_2 = (|z| = 2)^+$, la circunferencia de centro cero y radio 2 recorrida positivamente, y $\gamma_1 = (|z| = 1)^-$. Entonces

$$\int_{\gamma_2 \cup \gamma_1} \frac{dz}{z^2(z^2 + 9)^5} = 0.$$

14. Fórmula de Cauchy

A continuación veremos una representación integral de las funciones holomorfas que muestra como se puede recobrar una tal función en cualquier punto del interior de una curva cerrada simple γ conociéndola solamente sobre γ . Primero probemos el siguiente lema elemental.

Lema 14.1. Sea $\gamma = (|z - z_0| = r)^+$, donde $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, y sea $n \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$$

Demostración. Parametrizando γ como $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, donde $t \in [0, 2\pi]$, resulta que

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{r^n e^{int}} dt = \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt,$$

que se anula si $n \neq 1$ por la regla de Barrow. □

Observación 14.2. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, la función $(z - z_0)^n$ tiene una primitiva

$$\frac{(z - z_0)^{n+1}}{n+1} \quad \text{en } \mathbb{C} \setminus \{z_0\}.$$

El lema anterior implica que $(z - z_0)^{-1}$ no tiene una tal primitiva (lo habíamos visto cuando $z_0 = 0$).

Teorema 14.3 (Fórmula de Cauchy). Sea γ una curva cerrada simple recorrida positivamente y f una función holomorfa en un entorno de $\gamma \cup \gamma^\circ$. Si $z_0 \in \gamma^\circ$, vale que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Demostración. Tomemos $r > 0$ suficientemente pequeño para que el disco cerrado $\overline{D(z_0, r)}$ esté totalmente contenido en γ° , y llamemos $C_r = \partial D(z_0, r)$, recorrida positivamente. Como la función $f(z)/(z - z_0)$ es holomorfa en un entorno de $\gamma \cup (\gamma^\circ \setminus D(z_0, r))$, el Teorema 13.8 y el lema anterior dan respectivamente la primera y la segunda de las igualdades:

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + f(z_0) \underbrace{\int_{C_r} \frac{dz}{z - z_0}}_{2\pi i},$$

lo cual vale para cualquier $r > 0$ que satisfaga $\overline{D(z_0, r)} \subset \gamma^\circ$. Luego, en la primera integral de la suma podemos tomar límite cuando $r \rightarrow 0^+$, y la igualdad de arriba sigue valiendo. Y así:

$$\left| \int_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \sup_{C_r} |f(z) - f(z_0)| \underbrace{\frac{1}{r} \text{Long } C_r}_{2\pi} \rightarrow 0$$

cuando $r \rightarrow 0^+$, pues f es continua en z_0 . □

Observación 14.4. Es interesante observar que la demostración de este teorema es muy fácil una vez que uno tiene el Teorema de Cauchy-Goursat, y que por lo tanto es una consecuencia casi inmediata de éste último.

Ejemplos 14.5. (1) Calcular

$$J := \int_{(|z|=2)^+} \frac{z dz}{(9 - z^2)(z + i)}.$$

Como la función $f(z) = \frac{z}{(9 - z^2)}$ es holomorfa en la curva y su interior, la fórmula de Cauchy dice que $J = 2\pi i f(-i) = 2\pi/10$.

(2) Calcular

$$J := \int_{(|z|=3)^+} \frac{e^z dz}{(z^2 + 10)(z^2 - 1)}.$$

Por el Teorema 13.8 primero y la fórmula de Cauchy después,

$$\begin{aligned} J &= \int_{(|z-1|=1)^+} \frac{e^z dz}{(z^2 + 10)(z^2 - 1)} + \int_{(|z+1|=1)^+} \frac{e^z dz}{(z^2 + 10)(z^2 - 1)} \\ &= \frac{2\pi i e^z}{(z^2 + 10)(z + 1)} \Big|_{z=1} + \frac{2\pi i e^z}{(z^2 + 10)(z - 1)} \Big|_{z=-1} = \frac{2\pi i (e - e^{-1})}{22}. \end{aligned}$$

(3) Veamos que la función $f(z) = 2i(z^2 + 1)^{-1}$, definida en $U = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ no tiene una primitiva en U , pero tiene una primitiva en $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

Descomponiendo $f(z)$ en fracciones simples obtenemos

$$\frac{2i}{z^2 + 1} = \frac{1}{z - i} - \frac{1}{z + i}.$$

Para ver que f no tiene una primitiva en U basta con ver que su integral sobre el círculo $(|z - i| = 1)^+$ no se anula, que sale de arriba:

$$\int_{(|z-i|=1)^+} f(z)dz = \int_{(|z-i|=1)^+} \frac{dz}{z - i} = 2\pi i.$$

Para ver que existe una primitiva en V tomemos una curva cerrada simple $\gamma : [0, 1] \rightarrow V$. Si la región interior de γ no contiene ninguno de los puntos $-i, i$, se tiene que f es holomorfa en esa región y por lo tanto $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ por el teorema de Cauchy-Goursat. Si alguno de esos puntos está en γ° entonces el otro también. Entonces

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} \frac{dz}{z - i} - \int_{\gamma} \frac{dz}{z + i} = 2\pi i - 2\pi i = 0.$$

Entonces la integral sobre toda curva cerrada simple en V se anula, por lo que $f(z)$ tiene una primitiva.

(4) Veamos como podemos usar la fórmula de Cauchy para calcular algunas integrales reales. Si $a \in \mathbb{R}$, calculemos

$$J := \int_0^{\pi} e^{a \cos t} \cos(a \sin t) dt$$

usando que (por la fórmula de Cauchy): $\int_{(|z|=1)^+} \frac{e^{az}}{z} dz = 2\pi i$. Parametrizando la curva como $z = e^{it} = \cos t + i \sin t$, con $t \in [-\pi, \pi]$:

$$2\pi i = \int_{-\pi}^{\pi} e^{a(\cos t + i \sin t)} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = i \int_{-\pi}^{\pi} e^{a \cos t} (\cos(a \sin t) + i \sin(a \sin t)) dt$$

Igualando la parte imaginaria obtenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{a \cos t} \cos(a \sin t) dt = 2\pi,$$

y como el integrando es una función par, $J = \pi$. Es interesante observar que esta cantidad es independiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

(5) Sea $f(z) = \frac{1}{(z - z_0)(z - z_1)}$, donde $1 < |z_0| < 2$ y $|z_1| < 1$. Entonces por la fórmula de Cauchy:

$$\int_{|z|=2} f(z)dz - \int_{|z|=1} f(z)dz = \frac{2\pi i}{(z_0 - z_1)}.$$

15. Consecuencias de la fórmula de Cauchy

Si una función tiene una representación integral como en la fórmula de Cauchy, siendo continua sobre la curva γ , no es difícil ver que tiene que ser holomorfa en γ° y que su derivada se obtiene derivando el integrando. Así obtenemos una fórmula de Cauchy para la derivada, cuyo integrando también se puede derivar y podemos seguir haciendo lo mismo tantas veces como queramos. Al final obtendremos el siguiente

Teorema 15.1 (Fórmula de Cauchy para las derivadas). Sea γ una curva cerrada simple recorrida positivamente, f una función holomorfa en un entorno de $\gamma \cup \gamma^\circ$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad \forall z \in \gamma^\circ. \quad (15)$$

Este teorema se puede demostrar usando inducción y acotando cocientes incrementales con bastantes cuentas. Más adelante veremos que toda función holomorfa es analítica, y como subproducto obtendremos otra demostración de este teorema.

Ejercicio 14. Sea γ una curva cerrada simple, f una función holomorfa en $\gamma \cup \gamma^\circ$, y sea $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$. Probar que

$$\int_{\gamma} \frac{f'(w)}{w-z_0} dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^2} dw.$$

Ejemplo 15.2. (1) Un uso directo de (15) muestra que

$$\int_{(|z-5\pi|=\frac{9\pi}{2})^+} \frac{\operatorname{sen} z}{z(z-\pi)^8} dz = \frac{2\pi i}{7!} \left(\frac{\operatorname{sen} z}{z} \right)^{(7)} \Big|_{\pi}.$$

(2) Calcular

$$J := \int_{(|z|=4)^+} \frac{\operatorname{sen} z}{(z-2)(z^2+1)^4(z+i)} dz$$

El integrando (que notaremos $f(z)$) es una función holomorfa en el interior de la curva excepto en los puntos $2, -i, i$. Por el Teorema 13.8 podemos calcular J sumando las integrales sobre las curvas

$$(|z-2|=1)^+, \quad (|z-i|=1)^+, \quad (|z+i|=1)^+$$

como en la Figura 10. Es decir,

$$\begin{aligned} J &= \int_{(|z|=4)^+} \frac{\operatorname{sen} z}{(z-2)(z-i)^4(z+i)^5} dz \\ &= \int_{(|z-2|=1)^+} f(z) dz + \int_{(|z-i|=1)^+} f(z) dz + \int_{(|z+i|=1)^+} f(z) dz \\ &= 2\pi i \frac{\operatorname{sen} 2}{(2-i)^4(2+i)^5} + \frac{2\pi i}{3!} \left[\frac{\operatorname{sen} z}{(z-2)(z+i)^5} \right]_{z=i}^{(3)} + \frac{2\pi i}{4!} \left[\frac{\operatorname{sen} z}{(z-2)(z-i)^4} \right]_{z=-i}^{(4)}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad sale de la fórmula de Cauchy para derivadas (15).

Corolario 15.3. Si f es una función holomorfa en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ entonces tiene derivadas de todos los órdenes en un entorno de z_0 .

Demostración. Por hipótesis existe $r > 0$ tal que f es derivable en todos los puntos de $D(z_0, r)$. Si $\gamma = (|z - z_0| = r/2)^+$, se tiene que f es holomorfa en $\gamma \cup \gamma^\circ$ y se aplica el teorema anterior. \square

El corolario muestra la rigidez de las funciones holomorfas. Una función de variable real puede ser C^k y no ser C^{k+1} , cualquiera sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pero una función de variable compleja holomorfa, automáticamente tiene derivadas holomorfas de todos los órdenes.

Corolario 15.4. Si f es una función holomorfa en $z_0 \in \mathbb{C}$ entonces f es C^∞ en $z_0 \sim (x_0, y_0)$ como función de las variables reales (x, y) . En particular, la parte real e imaginaria de f son C^∞ .

Demostración. Como f es holomorfa en z_0 el corolario anterior implica que $f' = f_x = -if_y$ es holomorfa en z_0 , y por el mismo corolario, $f'' = f_{xx} = -if_{xy} = -if_{yx} = (-i)^2 f_{yy}$ es holomorfa en z_0 , y por el mismo corolario ...

Para la segunda afirmación, si $f = u + iv$, basta con demostrarla para u . Tomando parte real en el argumento anterior, y sabiendo que la parte real de una función holomorfa es diferenciable, sale primero que u_x y u_y son diferenciables, luego que u_{xx} , $u_{xy} = u_{yx}$ y u_{yy} son diferenciables, etc. \square

Teorema 15.5 (Teorema de Morera). Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Si $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para todo arco cerrado simple en U , entonces f es holomorfa en U .

Demostración. La hipótesis, conjuntamente con el Teorema 11.2 implican que f tiene una primitiva F en U . Luego el Teorema 15.1 dice que $F' = f$ es holomorfa en U . \square

Vimos con anterioridad que si U es un abierto simplemente conexo y f es holomorfa en U entonces la integral de f sobre toda curva cerrada simple en U se anula. Gracias al Teorema de Morera ahora tenemos la implicación recíproca para funciones que son continuas en U .

Corolario 15.6. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ continua, donde U es un abierto simplemente conexo. Entonces f es holomorfa en U si y sólo si $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para todo arco cerrado simple en U .

Teorema 15.7. Sea f una función holomorfa en un disco abierto $D(z_0, R)$. Entonces f admite un desarrollo en serie de potencias en dicho disco.

Demostración. Sean $0 < r_0 < r < R$. Para todo $z \in \overline{D(z_0, r_0)}$ se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

donde

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - z_0)} \frac{1}{[1 - (z - z_0)(w - z_0)^{-1}]} = \frac{1}{(w - z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n.$$

Como

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| \leq \frac{r_0}{r} < 1, \quad \text{cuando } w \in \partial D(z_0, r),$$

el criterio de Weierstrass dice que la serie converge uniformemente en $w \in \partial D(z_0, r)$ cualquiera sea $z \in \overline{D}(z_0, r_0)$. En consecuencia podemos sacar el símbolo de sumación fuera de la integral, obteniendo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw.$$

Luego, $f(z)$ admite un desarrollo en serie de potencias en $D(z_0, r_0)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

donde los coeficientes vienen dados por

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(z)}{(w - z_0)^{n+1}} dw.$$

Como el r_0 es arbitrario, dicho desarrollo vale en todo el disco $D(z_0, R)$, y por unicidad de los coeficientes de Taylor la expresión de los coeficientes c_n no depende del r elegido. \square

Corolario 15.8. Si U es un abierto de \mathbb{C} y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces es analítica en U .

Observación 15.9. Observemos que la última fórmula en la demostración del teorema dice que

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(z)}{(w - z_0)^{n+1}} dw,$$

de lo cual es fácil deducir el Teorema 15.1. Otra observación importante es que si una función es holomorfa en un disco abierto $D(z_0, R)$ y no lo es en un disco más grande centrado en z_0 , entonces el radio de convergencia de su serie en potencias de $(z - z_0)$ va a ser exactamente R .

Ejemplo 15.10. Supongamos que $p(z)$ es un polinomio cuyas raíces distintas son w_1, \dots, w_m , cada una con su respectiva multiplicidad. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ no es ninguna de esas raíces, la función $f(z) = 1/p(z)$ es holomorfa en z_0 y por lo tanto se puede escribir como $f(z) = \sum_n c_n (z - z_0)^n$ en algún disco centrado en z_0 . ¿Cuál es su radio de convergencia? De acuerdo al teorema anterior, es la distancia de z_0 al conjunto de las raíces $\{w_1, \dots, w_m\}$.

Ejemplo 15.11. Veamos que $\frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}$ cuando $|z-i| < \sqrt{2}$. Copiando parte de la demostración del Teorema 15.7, se tiene

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-i) - (z-i)} = \frac{1}{(1-i)} \frac{1}{[1 - (z-i)(1-i)^{-1}]} = \frac{1}{(1-i)} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z-i}{1-i} \right)^n$$

si $\left| \frac{z-i}{1-i} \right| < 1$, como se afirmó.

Ejercicio 15. Probar que para todo $z \in \mathbb{C}$ vale:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \operatorname{sen}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Vamos a hacerlo para el coseno:

$$\cos'(z) = -\operatorname{sen}(z), \quad \cos^{(2)}(z) = -\cos(z), \quad \cos^{(3)}(z) = \operatorname{sen}(z), \quad \cos^{(4)}(z) = \cos(z).$$

O sea que cada 4 derivadas volvemos a la función original, lo que en símbolos se puede escribir como $\cos^{(4k+p)}(z) = \cos^{(p)}(z)$, para $k, p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $0 \leq p < 4$. Además,

$$\cos^{(2n)}(0) = (-1)^n \quad \text{y} \quad \cos^{(2n+1)}(0) = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, lo que muestra el desarrollo en serie de potencias del coseno en su disco de convergencia alrededor del 0. Es trivial demostrar que el radio de convergencia es infinito, pero no es necesario, porque es algo que afirma el Teorema 15.7, dado que $\cos z$ es una función entera.

Aprovechemos el desarrollo anterior para calcular $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos(z) - 1 + z^2/2}{z^4}$.

$$\cos(z) - 1 + \frac{z^2}{2} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = z^4 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2(n-2)}}{(2n)!}.$$

Ejemplos 15.12.

(1) Hallar $f^{(42)}(0)$ para $f(z) = \operatorname{sen}(z^6)$. En el Ejercicio 15 obtuvimos el $\operatorname{sen} z$ en potencias de z , por lo cual

$$\operatorname{sen}(z^6) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z^6)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{12n+6}}{(2n+1)!}.$$

Como $12n+6 = 42$ cuando $n = 3$, en la serie anterior el coeficiente de z^{42} es $-1/7! = f^{(42)}(0)/42!$

(2) Hallar el desarrollo en serie de potencias alrededor de $1+i$ y el disco de convergencia de la función $f(z) = 1/z$. Tenemos

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1-i) + 1+i} = \frac{1}{(1+i)} \frac{1}{\left[1 + \frac{(z-1-i)}{1+i}\right]} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{(1+i)} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(\frac{z-1-i}{1+i}\right)^n$$

donde (*) es consecuencia de (12). El disco de convergencia es $D(1+i, \sqrt{2})$.

(3) Hallar el desarrollo en serie de potencias alrededor del 0 y el radio de convergencia de la función

$$f(z) = \frac{-4}{(z^4 + 5)^2}.$$

El cuadrado en el denominador sugiere hallar el desarrollo en serie de potencias de su primitiva (o algo similar) y después derivar esa serie. Por (12),

$$\frac{1}{z^4 + 5} = \frac{1/5}{(z^4/5) + 1} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{4n}}{5^{n+1}}, \quad \text{y derivando,} \quad \frac{-4z^3}{(z^4 + 5)^2} = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{4n}{5^{n+1}} z^{4n-1}.$$

Entonces

$$f(z) = \frac{-4}{(z^4 + 5)^2} = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{4n}{5^{n+1}} z^{4(n-1)}.$$

El radio de convergencia es $\sqrt[4]{5}$, cosa que sabíamos por el Teorema 15.7 sin necesidad de hallar su desarrollo.

16. Principio del módulo máximo

Lema 16.1. Sea f una función holomorfa en el disco $D(z_0, R)$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todo $z \in D(z_0, R)$. Entonces $f = \text{constante}$.

Demostración. Si $0 < r < R$ y parametrizamos la curva $\gamma := (|w - z_0| = r)^+$ por $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, con $0 \leq t \leq 2\pi$, la fórmula de Cauchy nos da:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_0} dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt. \quad (16)$$

Como el módulo de la integral es menor o igual que la integral del módulo,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| dt = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt,$$

por lo que

$$0 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f(z_0 + re^{it})| - |f(z_0)|) dt.$$

Pero por hipótesis el integrando es ≤ 0 , además de ser continuo. Concluimos que el integrando es nulo. O sea, $|f(z_0 + re^{it})| = |f(z_0)|$ para todo $t \in [0, 2\pi]$, y como $0 < r < R$ es arbitrario, se tiene que $|f(z)| = |f(z_0)|$ para todo $z \in D(z_0, R)$. Como f es holomorfa y su módulo es constante, el Corolario 4.13 implica que f es constante. \square

Observación 16.2. Una función continua que tiene la propiedad (16) se dice que tiene la propiedad de la media integral. Si $u : D(z_0, R) \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica, el Teorema 13.5 nos dice que existe una función holomorfa $f = u + iv$, con $u = \text{Re } f$. Entonces, si en (16) tomamos la parte real, obtenemos que también u tiene la propiedad de la media integral.

Teorema 16.3 (Teorema del módulo máximo). Sea f una función holomorfa en U abierto conexo. Si $|f|$ alcanza un valor máximo en U entonces $f = \text{cte. en } U$.

Demostración. Supongamos que $|f|$ alcanza un valor máximo m en U y consideremos el conjunto

$$A = \{z \in U : |f(z)| = m\}.$$

Luego $A \neq \emptyset$, y como $A = |f|^{-1}(\{m\})$ es la preimagen por la función continua $|f|$ del conjunto cerrado $\{m\}$, se tiene que A es cerrado en U . Veamos que también es abierto: si $z_0 \in A \subset U$, como U es abierto, existe una bola abierta $D(z_0, \varepsilon) \subset U$. Entonces $|f(z)| \leq m = |f(z_0)|$ para todo $z \in D(z_0, \varepsilon)$, y el lema anterior nos dice que $f = \text{cte. en } D(z_0, \varepsilon)$. En particular, $|f(z)| = |f(z_0)| = m$ para todo $z \in D(z_0, \varepsilon)$, y en consecuencia $D(z_0, \varepsilon) \subset A$.

Como U es conexo y A es un abierto y cerrado no vacío en U , necesariamente $A = U$, lo que implica que $|f|$ es constante en U . Como f es holomorfa, el Corolario 4.13 (otra vez) nos dice que f es constante. \square

Corolario 16.4 (Módulo máximo para armónicas reales). Sea $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica en U abierto conexo. Si u alcanza un valor máximo en U entonces u es constante.

Ejemplo 16.5.

(1) Si $Q \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ es un conjunto compacto y $f : Q \rightarrow \mathbb{C}$ está definida por

$$f(z) = (z^2 - iz^6 + 4iz^5)e^{-iz^2} + \operatorname{sen} z - \cos(\operatorname{Log} z) + \frac{1}{z} - \frac{2i}{z+4},$$

entonces $|f|$ alcanza su máximo en $\operatorname{Fr}(Q)$. Y si $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ es la función armónica $u(x+iy) = x^2 - y^2$, también u alcanza su máximo en $\operatorname{Fr}(Q)$.

17. Desigualdades de Cauchy

En general es de esperar tener un control del tamaño de una función en términos de sus derivadas. A continuación veremos que en el caso de las funciones holomorfas también vale un resultado en el sentido opuesto.

Teorema 17.1 (Desigualdades de Cauchy). Sea f una función holomorfa en un disco $D(z_0, r_0)$. Dados $0 < r < r_0$ y $n \geq 0$,

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq n! \frac{M(r)}{r^n},$$

donde $M(r) := \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$.

Demostración. Recordemos que por el Teorema 15.1 vale la siguiente representación integral

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Luego, tomando módulo en ambos miembros se obtiene

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}} |dz| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M(r)}{r^{n+1}} \int_{\partial D(z_0, r)} |dz| = n! \frac{M(r)}{r^n}.$$

□

Un corolario inmediato es el siguiente importante resultado de Liouville

Teorema 17.2 (Liouville). Una función entera acotada es constante.

Demostración. Por hipótesis, existe una constante $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Reteniendo la notación del teorema anterior, vemos que si $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces para todo $r > 0$:

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M(r)}{r} \leq \frac{M}{r}.$$

Haciendo tender $r \rightarrow \infty$ sale que $f'(z_0) = 0$. Luego, f es constante.

□

Si K es un cuerpo, es equivalente afirmar que todo polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes en K tiene n ceros en K (contando multiplicidades), o que tiene algún cero en K . Efectivamente, si p es un tal polinomio y $z_0 \in K$ es un cero de p , por el algoritmo de división podemos factorizar $p(z) = (z - z_0)q(z)$, donde q es otro polinomio con coeficientes en K , pero cuyo grado es $n - 1$. Un cuerpo con esta propiedad se dice que es **algebraicamente cerrado**. Los cuerpos \mathbb{Q} y \mathbb{R} no son algebraicamente cerrados, pues $p(z) = z^2 + 1$ no tiene ninguna raíz en ellos.

Un corolario inmediato del Teorema de Liouville es que \mathbb{C} es algebraicamente cerrado:

Corolario 17.3 (Teorema fundamental del álgebra). Sea $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ un polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes complejos. Entonces p tiene alguna raíz en \mathbb{C} .

Demostración. Supongamos que no. Luego, $f(z) = 1/p(z)$ es una función holomorfa acotada, pues

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{|z|^n |a_n + a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_0 z^{-n}|} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{|z|^n |a_n|} = 0.$$

Por lo tanto, el Teorema de Liouville nos dice que f es constante y por ende p es constante. Esto es absurdo, y en consecuencia p debe tener una raíz compleja. \square

Proposición 17.4. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo. Probar que si $f \neq \text{cte}$ es holomorfa en U y sin ceros entonces $|f|$ no alcanza un valor mínimo en U .

Demostración. La función $g(z) = 1/f(z)$, que es holomorfa en U pues es cociente de holomorfas donde el denominador no se anula. Como f no es constante, tampoco lo es g . Luego el teorema del módulo máximo dice que g no alcanza un máximo en U . Por lo tanto $f(z)$ no alcanza un mínimo en U . \square

Ejemplo 17.5.

(1) Sea f una función entera. Entonces

$$|f(z)| \leq A|z|, \quad \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow f(z) = \lambda z, \text{ donde } |\lambda| \leq A.$$

Demostración. Sólo hay que probar (\Rightarrow) . Si $z_0 \in \mathbb{C}$, por el Teorema 17.1 y la hipótesis,

$$|f^{(2)}(z_0)| \leq \frac{2!}{r^2} \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(z_0 + re^{it})| \leq \frac{2!}{r^2} \sup_{t \in [0, 2\pi]} A|z_0 + re^{it}| \leq \frac{2}{r^2} A(|z_0| + r)$$

para todo $r > 0$. Luego, tomando $r \rightarrow \infty$ vemos que $f^{(2)}$ es la función nula. Como \mathbb{C} es conexo tenemos que $f'(z) = a \in \mathbb{C}$. Entonces $f(z) = az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$, pero como $|b| = |f(0)| \leq 0$, se tiene que $f(z) = az$. Claramente $|a| \leq A$. \square

(2) Si $n \in \mathbb{N}$ y f es una función entera tal que $|f(z)/z^n| \leq C$ es acotada en $|z| > R$ entonces f es un polinomio de grado $\leq n$. La demostración es esencialmente la misma que en el ejemplo anterior.

$$|f^{(n+1)}(z_0)| \leq \frac{(n+1)!}{r^{n+1}} \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(z_0 + re^{it})| \stackrel{(*)}{\leq} \frac{(n+1)!}{r^{n+1}} C(|z_0| + r)^n \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0,$$

cualquiera sea $z_0 \in \mathbb{C}$, donde $(*)$ vale cuando r es suficientemente grande para que $\partial D(z_0, r)$ esté en $|z| > R$. Luego $f^{(n)}$ es constante, $f^{(n-1)}$ es un polinomio de grado ≤ 1 , etc.

18. Propiedades de las funciones holomorfas

18.1. Ceros de una función holomorfa

Comencemos probando que una función holomorfa en un conexo queda completamente determinada por los valores que toma en un subconjunto abierto de su dominio. Esto es otra manifestación de la rigidez de las funciones holomorfas.

Lema 18.1. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en un abierto conexo U . Si el conjunto $Z := \{z \in U : f(z) = 0\}$ tiene interior no vacío, entonces f es nula en todo U .

Demostración. Sea $E = \{z \in U : f^{(n)}(z) = 0, \forall n \in \mathbb{N}_0\}$. Este conjunto es cerrado relativo a U , puesto que

$$E = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{z \in U : f^{(n)}(z) = 0\}$$

y los conjuntos de la derecha son cerrados relativos porque las $f^{(n)}$ son continuas. Si $z_0 \in E$, hay un disco $D(z_0, \varepsilon) \subset U$ en el que f tiene un desarrollo en serie de potencias, y como los coeficientes de ese desarrollo son $f^{(n)}(z_0)/n! = 0$, entonces f es idénticamente nula en ese disco. Esto muestra que E es abierto. Finalmente, como por hipótesis el interior de Z es no vacío, y está contenido en E , se tiene que $E = U$. \square

Corolario 18.2. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en un abierto conexo U . Si existe $z_0 \in U$ tal que $f^{(n)}(z_0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ entonces f es nula en todo U .

Demostración. Si $D(z_0, r) \subset U$, tenemos que en ese disco:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = 0,$$

y se aplica el lema anterior. \square

Teorema 18.3. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en un abierto conexo U que no es idénticamente nula. Entonces los ceros de f son puntos aislados.

Demostración. Si $z_0 \in U$ es un cero de f , existe un disco abierto $D(z_0, r) \subset U$ tal que

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, r).$$

Como f no es idénticamente nula en U , el Corolario 18.2 dice que debe existir $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Consideremos el entero $n_0 = \min\{n : f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$. Entonces para todo $z \in D(z_0, r)$:

$$f(z) = (z - z_0)^{n_0} \left[\frac{f^{(n_0)}(z_0)}{n_0!} + \underbrace{\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-n_0}}_{g(z)} \right], \quad (17)$$

donde g es holomorfa en z_0 y $g(z_0) = 0$. Por la continuidad de g existe $0 < \delta < r$ tal que

$$|g(z)| < \frac{|f^{(n_0)}(z_0)|}{2n_0!} \quad \text{si } z \in D(z_0, \delta).$$

Insertando esta desigualdad en (17) obtenemos que

$$|f(z)| \geq |z - z_0|^{n_0} \frac{|f^{(n_0)}(z_0)|}{2n_0!} \quad \text{si } z \in D(z_0, \delta),$$

lo que demuestra que en $D(z_0, \delta)$ la función f sólo se anula en z_0 . □

El teorema anterior implica que una función holomorfa en un conjunto abierto conexo está unívocamente determinada por sus valores en cualquier conjunto que se acumule en U . Dicho formalmente:

Corolario 18.4 (Principio de identidad). Si f y g son funciones holomorfas en un abierto conexo U y $\{z \in U : f(z) = g(z)\}$ tiene algún punto de acumulación en U , entonces $f \equiv g$ en U .

Ejemplos 18.5.

(1) Sabiendo que $\cos^2 z + \sen^2 z = 1$ para todo $z \in \mathbb{R}$, el corolario anterior implica que también vale para todo $z \in \mathbb{C}$.

(2) Observar que los ceros de una función holomorfa no nula en un abierto conexo U sí se pueden acumular en la frontera de U . Por ejemplo, la función $f(z) = \sen(1/z)$ es holomorfa en el semiplano $U = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, y sus ceros en U son $z_k = 1/k\pi$, con $k \in \mathbb{N}$, que se acumulan en el origen.

(3) Sea $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, con $a_n \in \mathbb{C}$, una serie absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}$. ¿Existirá alguna función entera que coincida con f en \mathbb{R} ? Y en tal caso, ¿cuáles son todas?

Por hipótesis, la serie $\sum_{n \geq 0} |a_n z^n|$ converge para todo $z \in \mathbb{R}$, y por lo tanto también para todo $z \in \mathbb{C}$. Luego la serie de potencias complejas $F(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ tiene radio de convergencia infinito y determina una función entera que en los reales coincide con f . Por el principio de identidad, es la única función entera con esa propiedad.

En particular, la única función entera que en los reales coincide con la exponencial real $e^x = \sum_{n \geq 0} x^n/n!$ (para $x \in \mathbb{R}$) es $e^z = \sum_{n \geq 0} z^n/n!$, con $z \in \mathbb{C}$.

(4) No existe ninguna función entera tal que

$$f(1/n) = \frac{n}{2n-5} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Efectivamente, llamando $z = 1/n$, tenemos que

$$f(z) = \frac{z^{-1}}{2z^{-1}-5} = \frac{1}{2-5z} \quad \text{en el conjunto } A := \{1/n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Como A se acumula en 0 y es holomorfa en $U = \mathbb{C} \setminus \{2/5\}$, por el principio de identidad, la igualdad de arriba vale para todo $z \in U$.

Ejercicio 16. Hallar todas las funciones holomorfas f y g en el disco \mathbb{D} tales que

$$f\left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2k+1} \quad \text{y} \quad g\left(\frac{1}{2k+1}\right) = -\frac{1}{2k}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definición 18.6. Sea f una función holomorfa en un abierto conexo U y sea $z_0 \in U$ tal que $f(z_0) = 0$. Diremos que z_0 es un cero de f de orden $k \in \mathbb{N}$ si

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0, \quad \text{y} \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0,$$

y diremos que es de orden infinito si $f \equiv 0$ en U . Si $k < \infty$, es equivalente decir que alrededor de z_0 vale el desarrollo:

$$f(z) = \sum_{n \geq k} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k g(z), \quad \text{con} \quad g(z_0) \neq 0.$$

Teorema 18.7 (Morera). Sea U un conjunto abierto conexo de \mathbb{C} y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en U y holomorfa en U excepto quizás en puntos contenidos en una recta. Entonces f es holomorfa en todo U .

Idea de la demostración. Sea L la recta en cuestión, la cual podemos suponer que es horizontal. Si $z_0 \in L$, tomemos $r > 0$ tal que $\overline{D(z_0, r)} \subset U$. Por el Teorema 15.5, si la integral de f sobre toda curva cerrada simple γ en $D(z_0, r)$ se anula, entonces f es holomorfa en z_0 . Pensemos a una tal γ como la unión de curvas cerradas α_j que están por arriba de la recta L y curvas cerradas β_k que están por debajo, como en la Figura 11.

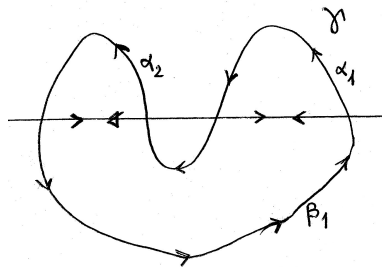


Figura 11: Descomposición de γ

Entonces debemos ver que las integrales de f sobre cada una de estas curvas se anula, y como el argumento es el mismo para todas, basta probarlo para una de ellas, que llamaremos α . Notemos que si modificamos la curva α ligeramente como para que quede totalmente por encima de la recta L , y la llamamos $\tilde{\alpha}$, el Teorema de Cauchy-Goursat asegura que

$$\int_{\tilde{\alpha}} f(z) dz = 0.$$

Por la continuidad uniforme de f en $\overline{D(z_0, r)}$ la integral sobre α es un límite de integrales como la de arriba y por lo tanto es nula. \square

Corolario 18.8. Si f es continua en un abierto conexo U y holomorfa salvo en puntos aislados entonces es holomorfa en todo U .

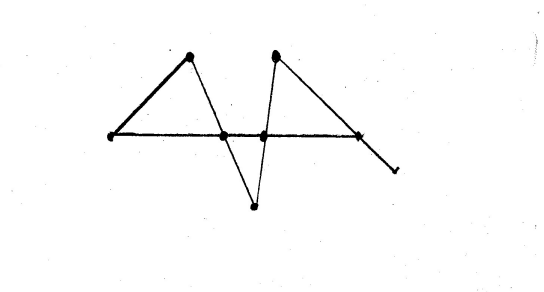
Ejemplos 18.9.

(1) La función $f(z) = \text{sen } z/z$ no puede ser entera porque no está definida en 0. Sin embargo, si definimos

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{sen } z}{z} = 1,$$

el teorema anterior dice que esta nueva función es entera.

(2) Si $U \subset \mathbb{C}$ es abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua que es holomorfa salvo por los puntos de una poligonal $P \subset U$, entonces f es holomorfa en U . En efecto, si $z_0 \in P$ es un punto que no es intersección de dos segmentos distintos, existe un disco $D(z_0, r) \subset U$ tal que f es holomorfa en ese disco salvo un trozo de recta en el disco.



Luego el Teorema de Morera dice que f es holomorfa en $D(z_0, r)$, y por lo tanto en z_0 . Con esto hemos probado que f es holomorfa en todo U salvo en los puntos de la poligonal donde se intersecan segmentos distintos. Pero esos puntos son finitos y por lo tanto son aislados. El corolario anterior dice que f es holomorfa también en esos puntos.

19. Series de Laurent

Como hemos visto, una función holomorfa en un disco $D(z_0, r)$ admite un desarrollo en serie de potencias de $(z - z_0)$. Cuando el dominio es un anillo es necesario considerar un desarrollo más general. Supongamos que la serie

$$\sum_{n \geq 1} a_n (w - z_0)^n \text{ converge cuando } |w - z_0| < R.$$

Haciendo el cambio de variable $w = h(z) := z_0 + (z - z_0)^{-1}$ obtenemos que la serie de potencias negativas

$$\sum_{n \geq 1} a_n (z - z_0)^{-n} \text{ converge cuando } |z - z_0| > R^{-1},$$

y determina una función holomorfa en esa región, dado que la composición de funciones holomorfas es holomorfa. Esto nos lleva a considerar desarrollos en series de la forma

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n \leq -1} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \quad (18)$$

en regiones anulares:

$$U = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\},$$

donde la primer serie a la derecha en (18) converge en $R_1 < |z - z_0|$ y la segunda en $|z - z_0| < R_2$, y determinan una función holomorfa en el anillo. Una serie de este tipo se denomina **serie de Laurent**, y la serie de potencias negativas se llama la **parte principal** de la serie.

Teorema 19.1. Sea f una función holomorfa en un anillo

$$U = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}, \text{ donde } 0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty,$$

y sea β un arco cerrado simple en U tal que $z_0 \in \beta^\circ$ (o sea, β da una vuelta alrededor de z_0). Entonces f admite un desarrollo de Laurent

$$f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m (z - z_0)^m, \quad \forall z \in U$$

que converge absoluta y uniformemente en cualquier conjunto compacto contenido en U . Además,

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta^+} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{m+1}} dw, \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

Demostración. Fijemos r_1 y r_2 tales que $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$. Veremos que existe un desarrollo de Laurent uniformemente convergente en el anillo $r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2$. Luego, como dicho desarrollo está unívocamente determinado por f , el mismo no dependerá de los r_1 y r_2 elegidos. De este modo el desarrollo será válido en U . Vamos a usar un método completamente análogo al utilizado para probar la existencia de desarrollo en serie de potencias en un disco a partir de la fórmula de Cauchy.

Tomemos ρ_1 y ρ_2 tales que

$$R_1 < \rho_1 < r_1 < r_2 < \rho_2 < R_2.$$

Si z es tal que $r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2$, vamos a usar la fórmula de Cauchy para reproducir $f(z)$ con una curva γ que es la unión de cuatro curvas γ_j como en el siguiente gráfico (cuidando que $z \notin \gamma$).

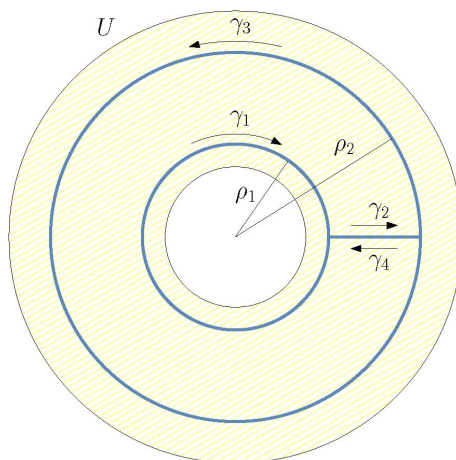


Figura 12: Gráfica de las cuatro partes de γ .

Entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1^-} \frac{f(w)}{w-z} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_3^+} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

donde la última igualdad usa que las integrales sobre γ_2 y γ_4 se cancelan entre sí. Analicemos estas integrales comenzando con la segunda. Como $|z - z_0| \leq r_2 < \rho_2 = |w - z_0|$ cuando $w \in \gamma_3^+$, se tiene que

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \frac{1}{1 - (z-z_0)(w-z_0)^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}},$$

donde por el criterio de Weierstrass la serie converge uniformemente cuando $z \in \overline{D(z_0, r_2)}$ y $w \in \gamma_3$. En consecuencia,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_3^+} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \int_{\gamma_3^+} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw. \quad (19)$$

Veamos ahora la integral sobre γ_1^- . Como $|w - z_0| = \rho_1 < r_1 \leq |z - z_0|$ cuando $w \in \gamma_1$, se tiene

$$\frac{1}{w-z} = \frac{(-1)}{z-z_0} \frac{1}{1 - (w-z_0)(z-z_0)^{-1}} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}},$$

donde de nuevo por el criterio de Weierstrass, la serie de la derecha converge uniformemente cuando $z \in \mathbb{C} \setminus D(z_0, r_1)$ y $w \in \gamma_1$. En consecuencia

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1^-} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^{-(n+1)} \int_{\gamma_1^+} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n}} dw. \quad (20)$$

Esto muestra la existencia de un desarrollo de f en serie de Laurent uniformemente convergente para $r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2$. Los coeficientes de la serie vienen dados por las ecuaciones (19) y (20), y

valen $a_m =$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_3^+} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{m+1}} dw, \text{ si } m \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1^+} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{m+1}} dw, \text{ si } m < 0.$$

Aplicando el Teorema de Cauchy-Goursat obtenemos que cualquiera de esas integrales coincide con

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta^+} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{m+1}} dw,$$

para $m \in \mathbb{Z}$, lo que demuestra el teorema. □

Las descomposiciones de la función f que proveen las ecuaciones (19) y (20) dan un resultado que es interesante en sí mismo:

Proposición 19.2. Toda función holomorfa f definida en el anillo

$$U = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$$

se puede escribir como $f = f_1 + f_2$ donde f_1 es holomorfa en $D(z_0, R_2)$ y f_2 es holomorfa cuando $|z - z_0| > R_1$.

Demostración. La función $f_1(z)$ viene dada por (19). Si llamamos $f_2(z)$ a la función en (20) vemos que $f_2(z) = h(z_0 + (z - z_0)^{-1})$, donde

$$h(\xi) = \sum_{m \geq 1} a_{-m} (\xi - z_0)^m \text{ es holomorfa cuando } |\xi - z_0| < R_1^{-1}.$$

Luego $f_2(z)$ es holomorfa cuando $|z - z_0| > R_1$. □

Proposición 19.3. Si $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ en un anillo abierto U entonces

$$f'(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n n (z - z_0)^{n-1} \text{ en } U$$

Demostración. La demostración copia la de la proposición anterior. Para $f_1(z)$ ya lo sabíamos, y si escribimos $f_2(z) = h(z_0 + (z - z_0)^{-1})$ como en la proposición anterior, el resultado es consecuencia de la regla de la cadena. □

La proposición dice que la derivada de una serie de Laurent es la serie de Laurent de las derivadas. Es natural preguntar si podemos hacer lo mismo para obtener una primitiva. La respuesta es no, y el motivo es que si $a_{-1} \neq 0$, el término $a_{-1}(z - z_0)^{-1}$ no tiene primitiva en ningún anillo abierto de la forma $R_1 < |z - z_0| < R_2$. Sin embargo, a continuación veremos que hay una primitiva si esta obstrucción no está presente.

Proposición 19.4. Sea $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ en un anillo abierto $U = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$, y supongamos que $a_{-1} = 0$. Entonces

$$F(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$$

es una primitiva de f en U .

Demostración. La demostración es igual que en la proposición anterior. □

Es interesante notar que demostraciones de las tres últimas proposiciones se basan en la misma idea: un cambio de variables y la regla de la cadena.

Ejemplos 19.5. (1) Calculemos $\int_{\gamma} e^{1/z} dz$, donde γ es una curva cerrada simple recorrida positivamente con $0 \in \gamma^{\circ}$. Por el Teorema 19.1 la integral es $2\pi i$ veces el coeficiente a_{-1} en el desarrollo de Laurent en $|z| > 0$ de

$$e^{1/z} = 1 + \frac{z^{-1}}{1!} + \frac{z^{-2}}{2!} + \dots$$

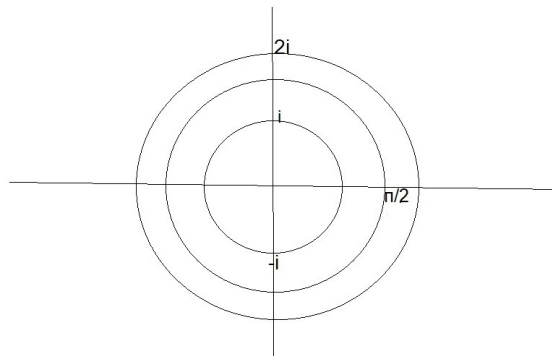
Luego

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{1/z} dz = 1.$$

(2) ¿Cuáles son las regiones abiertas maximales en las que convergen las series de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{4z}{(z^2 + 1)(z - \pi/2)^7(z - 2i)^5}$$

en potencias de z ?



¿Alguna de esas series es de Taylor? Las regiones son 4:

$$(|z| < 1), \quad (1 < |z| < \pi/2), \quad (\pi/2 < |z| < 2), \quad (2 < |z|).$$

En la primera de estas regiones la serie es de Taylor. En todas las otras el desarrollo en serie de Laurent tiene potencias negativas, dado que las series de Taylor convergen en discos.

(3) Hallemos el de desarrollo de Laurent de

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)} \quad \text{en } 1 < |z| < 2.$$

Usando primero la descomposición en fracciones simples y luego copiando parte de la demostración del Teorema 19.1 vemos que

$$\begin{aligned} \frac{-1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \frac{1}{(1-z^{-1})} + \frac{1}{2} \frac{1}{(1-z/2)} \\ &= \frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{2^n} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{z^n} + \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Hallar el desarrollo de Laurent de la misma función en $|z| > 2$. Por la primera igualdad de arriba:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \frac{1}{(1-z^{-1})} - \frac{1}{z} \frac{1}{(1-2/z)} \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{z^n} - \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{z^{n+1}}. \end{aligned}$$

20. Singularidades

Proposición 20.1 (Desigualdades de Cauchy generalizadas). Sea f una función holomorfa en un anillo $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$, dada por el desarrollo de Laurent

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n.$$

Si $R_1 < r < R_2$, entonces $|a_n| \leq \frac{M_r(f)}{r^n}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, donde $M_r(f) := \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$.

Demostración. Como la serie

$$f(z_0 + re^{it}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k r^k e^{ikt}$$

converge absoluta y uniformemente cuando $t \in [0, 2\pi]$, podemos integrar término a término (sacar la serie fuera de la integral), y obtener la identidad:

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} f(z_0 + re^{it}) dt,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. El resultado sale acotando el módulo de la integral por la integral del módulo. \square

Teorema 20.2. Sea f una función holomorfa en un anillo $0 < |z - z_0| < R$. Entonces f se extiende a una función holomorfa en z_0 si y sólo si f es acotada cerca de z_0 (existe $0 < \alpha < R$ tal que $f(z)$ es acotada en $D(z_0, \alpha) \setminus \{z_0\}$).

Demostración. (\Rightarrow) Es trivial. (\Leftarrow) Escribamos $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ en $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$. Si existen $0 < \alpha < R$ y $M > 0$ tales que $|f(z)| \leq M$ cuando $z \in D(z_0, \alpha) \setminus \{z_0\}$, la Proposición 20.1 dice que

$$|a_n| \leq \frac{M_r(f)}{r^n} \leq \frac{M}{r^n}$$

para todo $0 < r < \alpha$ y $n \in \mathbb{Z}$. En particular, cuando $r \rightarrow 0$ obtenemos $a_n = 0$ para todo $n < 0$. \square

Notar que el teorema anterior es estrictamente más fuerte que el Corolario 18.8, pues no se asume que f sea continua.

20.1. Clasificación de singularidades

Las singularidades de una función son puntos donde la función tiene algún problema de definición. Hay cuatro tipo de singularidades:

- No aisladas;
- Aisladas: esta clase se divide en:
 - Evitables;
 - Polos;
 - Esenciales.

Ejemplos 20.3. (1) Consideremos la función

$$f(z) = \frac{1}{e^{1/z} - 1}.$$

Las singularidades de esta función son el origen y los puntos donde el denominador se anula. Luego, basta resolver la ecuación

$$e^{1/z} = 1.$$

Dado que $e^w = 1$ sólo cuando $w = 2k\pi i$, deducimos que el conjunto de singularidades de f es:

$$S = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{2k\pi i} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Luego el cero es una singularidad no aislada, mientras que el resto de las singularidades son aisladas.

(2) Por la misma razón, las singularidades de la función $g(z) = \left[\operatorname{sen} \left(\frac{5}{z - \sqrt{2}} \right) \right]^{-1}$ vienen dadas por

$$S = \left\{ \sqrt{2} \right\} \cup \left\{ \sqrt{2} + \frac{5}{k\pi} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\},$$

y por lo tanto el punto $\sqrt{2}$ es una singularidad no aislada. A continuación dedicaremos algún tiempo a la clasificación de las singularidades aisladas.

20.2. Singularidades aisladas

Comencemos con la definición. Supongamos que f es una función definida en cierto abierto Ω .

Notación: Dado $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, por medio de $D_*(z_0, r)$ denotaremos al **disco "pinchado"**

$$D_*(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}.$$

Definición 20.4. Una singularidad $z_0 \in \mathbb{C}$ de una función f se dice *aislada* si existe $\varepsilon > 0$ tal que f es holomorfa en $D_*(z_0, \varepsilon)$.

Si estamos en este caso, f admite en el disco pinchado un desarrollo de Laurent

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

En función de este desarrollo clasificaremos las singularidades aisladas como:

Evitables: Si $a_n = 0$ para todo $n < 0$;

Polos: Si $a_n \neq 0$ sólo para finitos valores de $n < 0$. En este caso, si $a_{n_0} \neq 0$ y $a_m = 0$ para todo $m < n_0$ entonces diremos que el polo es de orden $|n_0|$;

Esenciales: Si $a_n \neq 0$ para una cantidad infinita de valores de $n < 0$.

Ejemplos 20.5.

Evitables: Consideremos la función **seno cardinal** definida como $\text{sinc}(z) = \frac{\text{sen } z}{z}$ en el plano pinchado $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. En dicho dominio, a partir del desarrollo en serie de potencias del seno obtenemos el siguiente desarrollo de Laurent:

$$\text{sinc}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Polos: El ejemplo más obvio de un polo de orden $k \in \mathbb{N}$ es el de la función $f(z) = z^{-k}$. Pero motivados por el ejemplo anterior podríamos considerar la función

$$g(z) = \frac{\text{sen } z}{z^{75}},$$

que tiene un polo en el origen de orden 74, y la función

$$h(z) = \left(\frac{\text{sen } z}{z^{15}} \right)^{23}$$

que tiene un polo de orden $14 \times 23 = 322$. Este ejemplo no es tan claro como los anteriores, pero la Proposición siguiente provee una forma sencilla de visualizarlo.

Esenciales: En estas singularidades la función se comporta de manera más caótica. Un ejemplo es la función $f(z) = e^{1/z}$ también definida en el plano pinchado $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pensar el comportamiento de esta función cuando nos acercamos al origen por el eje real y por el eje imaginario.

Proposición 20.6. Una función f holomorfa en $D_*(z_0, \varepsilon)$ tiene un polo de orden k en z_0 si y sólo si se puede factorizar como

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}, \text{ donde } g \text{ es holomorfa en } D(z_0, \varepsilon) \text{ y } g(z_0) \neq 0.$$

Demostración. Mirando el desarrollo de Laurent en $D_*(z_0, \varepsilon)$ vemos que f tiene un polo de orden k si y sólo si

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{a_{-(k-1)}}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)^{-1}} + h(z) \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^k} \left[a_{-k} + a_{-k+1}(z - z_0) + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{k-1} + (z - z_0)^k h(z) \right], \end{aligned}$$

donde $h(z)$ es holomorfa en $D(z_0, \varepsilon)$ y $a_{-k} \neq 0$. Llamando $g(z)$ a la expresión entre corchetes resulta que $g(z_0) = a_{-k} \neq 0$. □

Corolario 20.7. f tiene un cero de orden k en $z_0 \Leftrightarrow 1/f$ tiene un polo de orden k en z_0 .

Corolario 20.8. Si f posee un polo en z_0 entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

El corolario muestra una condición necesaria para que una singularidad aislada sea un polo. Más adelante (Proposición 20.10) veremos que también es suficiente y condensaremos en un sólo resultado varias condiciones similares para determinar a qué clase pertenece una singularidad aislada. Pero primero debemos entender qué sucede cerca de una singularidad esencial.

Teorema 20.9 (Weierstrass). Si f es holomorfa en un disco pinchado $D_*(z_0, \varepsilon)$ y z_0 es una singularidad esencial de f entonces para todo $r < \varepsilon$

$$f(D_*(z_0, r)) \text{ es denso en } \mathbb{C}.$$

Demostración. Supongamos que no es cierto. Entonces existen $0 < r < \varepsilon$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que

$$|f(z) - \lambda| > c > 0$$

para todo $z \in D_*(z_0, r)$. Luego, la función $(f(z) - \lambda)^{-1}$ es acotada en $D_*(z_0, r)$, y por lo tanto se puede extender a una función holomorfa en el disco $D(z_0, r)$ (por el Teorema 20.2). Entonces

$$(f(z) - \lambda)^{-1} = (z - z_0)^k h(z),$$

donde $k \geq 0$ y $h(z_0) \neq 0$. Luego $f(z) - \lambda = (z - z_0)^{-k} h(z)^{-1}$ es holomorfa en z_0 si $k = 0$ o tiene un polo de orden k si $k \geq 1$. Cualquiera de estos dos casos contradice que z_0 es esencial. \square

Proposición 20.10. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de la función f . Entonces

$$(1) \quad z_0 \text{ es evitable} \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C} \Leftrightarrow f \text{ es acotada en algún disco pinchado } D_*(z_0, \varepsilon).$$

$$(2) \quad z_0 \text{ es un polo} \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty.$$

$$(3) \quad z_0 \text{ es esencial} \Leftrightarrow \nexists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z).$$

Demostración. La única implicación no trivial de (1) está probada en el Teorema 20.2. La implicación (\Rightarrow) de (2) es el Corolario 20.8. Si el $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, por (1) la singularidad no puede ser evitable, y por el Teorema de Weierstrass no puede ser esencial, por lo que es un polo. Otra vez, el Teorema de Weierstrass prueba (\Rightarrow) de (3), y la implicación recíproca sale por descarte. \square

Observación 20.11. Sea f una función con un polo en z_0 de orden $k \geq 1$, y consideremos

$$\ell := \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z), \text{ con } m \in \mathbb{N}_0.$$

Entonces

$$\ell \begin{cases} = \infty & \text{si } m < k \\ \in \mathbb{C}_* & \text{si } m = k \\ = 0 & \text{si } m > k. \end{cases}$$

Ejemplos 20.12.

(1) Veamos que la función $f(z) = \left(\frac{1-\cos z}{z^3}\right)^5$ tiene en 0 un polo de orden 5:

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^5 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1-\cos z}{z^2}\right)^5 = \left(\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1-\cos z}{z^2}\right)^5 \stackrel{(*)}{=} \left(\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5} \neq 0,$$

donde (*) sale de aplicar 2 veces la regla de L'Hôpital.

(2) Toda homografía que no fija el ∞ tiene un polo simple en \mathbb{C} como única singularidad. Veámoslo: una homografía cualquiera con esa propiedad se escribe como

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{donde } ad - bc \neq 0 \neq c.$$

Dividiendo arriba y abajo por c y llamando $\alpha = a/c$, $\beta = b/c$ y $z_0 = -d/c$, vemos que

$$h(z) = \frac{\alpha z + \beta}{z - z_0} = \frac{\alpha(z - z_0) + \beta + \alpha z_0}{z - z_0},$$

que es el desarrollo de Laurent de h en $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Como $\beta + \alpha z_0 \neq 0$ (¿por qué?), la función tiene un polo de orden 1 en z_0 .

Definición 20.13 (Singularidad en ∞).

Si f es holomorfa en una región $|z| > R$ salvo singularidades, donde las no evitables tienden a infinito, se dice que ∞ es una singularidad no aislada de f . Por ejemplo, $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$.

Si f es holomorfa en una región $|z| > R$, entonces allí tiene un desarrollo en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n \leq -1} a_n z^n + a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n z^n.$$

- Si $a_n = 0$ para todo $n \geq 1$ se dice que ∞ es una singularidad evitable.
- Si existe $n_0 \geq 1$ tal que $a_{n_0} \neq 0$, pero $a_n = 0$ para todo $n > n_0$, se dice que ∞ es un polo de orden n_0 .
- Si $a_n \neq 0$ para infinitos valores de $n \in \mathbb{N}$ se dice que ∞ es una singularidad esencial.

En definitiva, la definición anterior dice que si f es holomorfa en $|w| > R$, con lo que $f(z^{-1})$ es holomorfa en $D_*(0, R^{-1})$, entonces f tiene en infinito la misma singularidad que $f(z^{-1})$ tiene en el cero. Y lo mismo vale si ∞ es una singularidad no aislada.

Ejemplos 20.14. Analicemos las singularidades en el plano ampliado $\widehat{\mathbb{C}}$ en los siguientes ejemplos.

(1) La función $f(z) = z \operatorname{sen}(1/z)$ sólo tiene singularidades en 0 y en ∞ . Entonces f es holomorfa en $|z| > 0$, y su desarrollo de Laurent correspondiente es

$$f(z) = z \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-(2n+1)} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-2n}.$$

Entonces ∞ es una singularidad evitable de f . ¿Y el 0?

(2) Un polinomio de grado $m \geq 1$ tiene un polo de orden m en ∞ . Una función entera que no es un polinomio tiene una singularidad esencial en ∞ .

Como el comportamiento de $f(z)$ en ∞ se traduce en el de $f(z^{-1})$ en 0, se tiene que toda función entera y acotada tiene en ∞ una singularidad evitable (por el Teorema 20.2). Luego, no es un polinomio de grado ≥ 1 ni es una función entera no polinómica, con lo cual tiene que ser constante.

El lector atento acaba de notar que hemos recobrado el Teorema de Liouville.

(3) $f(z) = e^{-1/z^2} \cos z$. En $z = 0$ la función e^{-1/z^2} tiene una singularidad esencial, por lo que

$$\nexists \lim_{z \rightarrow 0} e^{-1/z^2} \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \cos z = 1.$$

Luego no existe el límite de f y por lo tanto tiene una singularidad esencial en 0. En ∞ sucede exactamente lo opuesto:

$$\nexists \lim_{z \rightarrow \infty} \cos z \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} e^{-1/z^2} = 1.$$

Luego ∞ también es esencial. La función no tiene ninguna otra singularidad.

Proposición 20.15. Sean p y q polinomios no nulos y sea f una función con una singularidad esencial en $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$. Entonces $(p/q)f$ tiene una singularidad esencial en z_0 .

Demostración. Si $z_0 \in \mathbb{C}$, haciendo el cambio de variables $z = w - z_0$, podemos suponer que $z_0 = 0$. Entonces factorizando $p(z) = p_0(z)z^n$ y $q(z) = q_0(z)z^m$, donde $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y $p_0(0) \neq 0 \neq q_0(0)$, se tiene:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{p(z)}{q(z)} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{p_0(z)}{q_0(z)} \frac{z^n}{z^m} f(z) = \frac{p_0(0)}{q_0(0)} \lim_{z \rightarrow 0} z^{n-m} f(z),$$

y debemos demostrar que ese límite no existe cualesquiera sean $n, m \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 20.10 eso es equivalente a afirmar que $z^k f(z)$ tiene una singularidad esencial en cero cualquiera sea $k \in \mathbb{Z}$. Y eso es cierto porque el desarrollo de Laurent de esa función alrededor del cero tiene infinitos coeficientes no nulos.

Si $z_0 = \infty$ podemos hacer un razonamiento análogo reduciendo el problema al origen mediante el cambio $z = w^{-1}$. □

Ejercicio 17. Estudiar todas las singularidades en $\widehat{\mathbb{C}}$ de

$$(a) f(z) = \frac{\cos z - \operatorname{sen} z}{z^4 + 2z^2 + 1} \quad (b) g(z) = \operatorname{sen} \left(\frac{1}{z} \right) + \frac{1}{z} \quad (c) h(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$$

Veamos el ejemplo (a). Como el numerador es una función entera que no es un polinomio, tiene una singularidad esencial en ∞ . Por la proposición anterior lo mismo pasa con $f(z)$. Haciendo el cambio de variables $w = z^2$ el numerador queda $w^2 + 2w + 1 = (w + 1)^2$, por lo que

$$f(z) = \frac{\cos z - \operatorname{sen} z}{(z^2 + 1)^2} = \frac{\cos z - \operatorname{sen} z}{(z - i)^2(z + i)^2}.$$

Para asegurar que alguno de los puntos $-i, i$ es un polo de orden 2 deberíamos ver el numerador no tiene un cero en ese punto. Afortunadamente es inmediato verificar que

$$\cos(\pm i) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\pm i) \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

21. Teorema de los residuos

Definición 21.1. Sea f una función holomorfa en $D_*(z_0, \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$. Si

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

es el desarrollo de Laurent de f en $D_*(z_0, \varepsilon)$, entonces se define el **residuo** de f en z_0 como

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1}.$$

Observación 21.2. Si una función se puede escribir como

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)},$$

con g holomorfa en z_0 y $g(z_0) \neq 0$, entonces $\text{Res}(f, z_0) = g(z_0)$.

Proposición 21.3. Sea f es una función holomorfa en $D_*(z_0, r)$ y γ una curva simple cerrada contenida en dicho dominio tal que $z_0 \in \gamma^\circ$. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \text{Res}(f, z_0).$$

Demostración. Consideremos el desarrollo de Laurent de f en dicha región

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}} a_n (z - z_0)^n.$$

Por la Proposición 19.4, la función definida por la serie de la derecha tiene una primitiva. En consecuencia su integral sobre γ es nula. Luego

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = a_{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \text{Res}(f, z_0).$$

□

El teorema que sigue generaliza el teorema de Cauchy-Goursat al permitir que la función posea algunas singularidades. Notar sin embargo que la demostración es una consecuencia inmediata de Cauchy-Goursat y de la proposición anterior.

Teorema 21.4 (Teorema de los residuos). Sea γ un arco cerrado simple (recorrido positivamente) y f una función holomorfa en un entorno de $\gamma \cup \gamma^\circ$ salvo finitas singularidades $\{z_k\}$, ninguna de las cuales está en γ . Entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \gamma^\circ} \text{Res}(f, z_k). \quad (21)$$

Demostración. Tomemos para cada k un $r_k > 0$ tal que $\overline{D(z_k, r_k)} \subset \gamma^\circ$ y f es holomorfa en un entorno de este disco salvo en z_k . Consideremos su frontera C_k recorrida positivamente. Por el teorema de Cauchy-Goursat para dominios múltiplemente conexos primero, y la Proposición 21.3 después, resulta que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_k \int_{C_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f, z_k).$$

□

Ejemplos 21.5.

(1) Calculemos la integral

$$J := \frac{1}{2\pi i} \int_{(|z-2i|=7)^+} \frac{dz}{z(z^2+1)}$$

usando residuos. Las singularidades en el interior de la curva son $0, i, -i$. Entonces

$$J := \text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, -i) + \text{Res}(f, i) = \frac{1}{0^2+1} + \frac{1}{(-i)(-2i)} + \frac{1}{i(2i)} = 0,$$

donde la primera igualdad sale del teorema de los residuos y la segunda de la Observación 21.2. Es interesante notar que este resultado implica que la función $(z(z^2+1))^{-1}$ tiene primitiva en la región $\mathbb{C} \setminus \overline{D(2i, 7)}$, cosa que no pasa para ninguna de las funciones z^{-1} , $(z-i)^{-1}$ y $(z+i)^{-1}$.

(2) Calculemos

$$I := \frac{1}{2\pi i} \int_{(|z-1|=92)^+} z^9 \prod_{k=1}^{10} \frac{1}{(z-ki)} dz,$$

donde el símbolo \prod es el análogo para el producto del símbolo sumatoria \sum para la suma. Si a la función en el integrando la llamamos $f(z)$, el teorema de los residuos dice que $I = \sum_{p=1}^{10} \text{Res}(f, pi)$. Como todas las singularidades son polos simples, la Observación 21.2 dice que

$$\text{Res}(f, pi) = (pi)^9 \prod_{k=1, k \neq p}^{10} \frac{1}{(p-k)i} = p^9 \prod_{k=1, k \neq p}^{10} \frac{1}{(p-k)}.$$

Y ahora debemos sumarlos para $1 \leq p \leq 10$. ¿Habría alguna forma de hacer esto sin tanta cuenta? Veremos a continuación que algunas integrales (incluyendo esta) se pueden calcular de forma mucho más económica si usamos una versión del teorema de los residuos que incorpore el infinito.

21.1. Residuo en el ∞

Empezaremos introduciendo la noción de residuo en el infinito.

Definición 21.6. Sea f una función holomorfa en $|z| > R$, para cierto $R > 0$. Entonces el **residuo** de f en ∞ se define como

$$\text{Res}(f, \infty) = \text{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right).$$

En otras palabras, si f tiene un desarrollo de Laurent $f(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n w^n$ para $|w| > R$, entonces

$$\text{Res}(f, \infty) = \text{Res}\left(-\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-2}, 0\right) = -a_{-1}.$$

Una pregunta natural es ¿por qué se define $\text{Res}(f, \infty)$ de este modo? Como hemos visto, los residuos están íntimamente relacionados con el cálculo de integrales, y cuando uno integra lo que realmente importa es la “forma diferencial” $f(w)dw$. Veamos que cuando hacemos el cambio $w = \frac{1}{z}$, la forma diferencial $f(w)dw$ se transforma en

$$-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)dz.$$

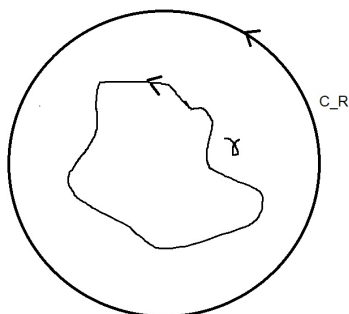
Si γ es una curva simple que no pasa por el cero, entonces lo mismo ocurre para la curva $1/\gamma$. Luego

$$\begin{aligned}\int_{1/\gamma} -\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)dz &= -\int_0^1 \gamma^2(t)f(\gamma(t)) \frac{-\gamma'(t)}{\gamma^2(t)} dt \\ &= \int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} f(w)dw.\end{aligned}$$

Teorema 21.7. Sea γ una curva cerrada simple en \mathbb{C} recorrida positivamente y f una función holomorfa en un entorno de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \gamma^\circ$ salvo una cantidad finita de singularidades z_1, \dots, z_n (una de ellas es ∞), ninguna de las cuales está en γ . Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = -\sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

Demostración. Supongamos sin pérdida generalidad que $z_n = \infty$. Consideremos $R > 0$ suficientemente grande para que $D(0, R)$ contenga a la curva γ todas las singularidades finitas de f .



Por el Teorema 21.4,

$$-\int_{\gamma^+} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n-1} \text{Res}(f, z_k). \quad (22)$$

Por otro lado, si el desarrollo de Laurent de f en $|z| > R$ es

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq -1} a_n z^n,$$

el hecho de que la serie tiene una primitiva implica que integrándola sobre C_R da cero (igual que en la demostración de la Proposición 21.3). Luego

$$\int_{C_R} f(z) dz = a_{-1} \int_{C_R} \frac{1}{z} dz = a_{-1} 2\pi i = -\text{Res}(f, \infty) 2\pi i.$$

Incorporando esta igualdad en (22) y despejando, queda

$$\int_{\gamma^+} f(z) dz = -2\pi i \text{Res}(f, \infty) - 2\pi i \sum_{k=1}^{n-1} \text{Res}(f, z_k),$$

tal como se afirmara. □

Corolario 21.8. Sea f una función holomorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$ salvo singularidades aisladas z_k (que necesariamente son finitas). Entonces

$$\sum_{z_k \in \widehat{\mathbb{C}}} \text{Res}(f, z_k) = 0.$$

Demostración. Sea γ un arco cerrado simple en \mathbb{C} (recorrido positivamente) que no pasa por ninguna singularidad. Entonces los Teoremas 21.4 y 21.7 dicen respectivamente que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \gamma^\circ} \text{Res}(f, z_k)$$

y

$$-\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \gamma^\circ} \text{Res}(f, z_k).$$

El resultado se obtiene sumando ambas expresiones. □

Armados con el Teorema 21.7 volvamos a revisar el punto (2) del Ejemplo 21.5:

$$I := \frac{1}{2\pi i} \int_{(|z-1|=92)^+} z^9 \prod_{k=1}^{10} \frac{1}{(z-ki)} dz = -\text{Res}(f, \infty).$$

Como

$$\frac{-1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -z^{-11} \prod_{k=1}^{10} \frac{1}{(z^{-1}-ki)} = -z^{-1} \prod_{k=1}^{10} \frac{1}{(1-zki)},$$

esta función tiene residuo -1 en $z=0$ (por la Observación 21.2). Entonces $I=1$.

Cálculo de residuos

Si f tiene un polo de orden $k \in \mathbb{N}$ en $z_0 \in \mathbb{C}$, se escribe como $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$, donde g es holomorfa en z_0 y $g(z_0) \neq 0$. Entonces el residuo de f en z_0 es el coeficiente a_{k-1} en el desarrollo de g en potencias positivas de $z-z_0$. Es decir,

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{[(z-z_0)^k f(z)]^{(k-1)}}{(k-1)!}. \quad (23)$$

Cuando $k = 1$ recobramos la Observación 21.2. Un caso particular de polo simple es cuando $f = g/h$, donde g y h son holomorfas en z_0 , $g(z_0) \neq 0$ y h tiene un cero simple en z_0 . En este caso,

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \frac{(z - z_0)}{h(z) - h(z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Esto provee una receta para calcular el residuo en un caso muy frecuente.

Ejemplos 21.9.

(1) Calculemos el residuo en 0 de $f(z) = \frac{z^5 - 2}{\operatorname{Log}(1+z)}$. En $z = 0$ el denominador tiene un cero simple. Luego

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^5 - 2}{\operatorname{Log}(1+z)}, 0\right) = \frac{z^5 - 2}{(1+z)^{-1}} \Big|_{z=0} = -2.$$

(2) Calcular

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^{56} - 17z^{20} + z - 5}{(z-1)^{11}}, z=1\right).$$

El cambio de variables $w = z - 1$ convierte ese residuo en

$$\operatorname{Res}\left(\frac{(1+w)^{56} - 17(1+w)^{20} + 1 + w - 5}{w^{11}}, w=0\right).$$

el cual coincide con el coeficiente de la potencia w^{10} en el desarrollo de Taylor del polinomio $p(w)$ que está en el numerador. Por la fórmula binomial:

$$p(w) = \sum_{j=0}^{56} \binom{56}{j} w^j - 17 \sum_{j=0}^{20} \binom{20}{j} w^j + w - 4.$$

Entonces $\operatorname{Res} = \binom{56}{10} - 17 \binom{20}{10}$.

(3) La función $f(z) = \frac{1}{1 - \cos z}$ tiene un polo de orden 2 en $z = 0$. Entonces

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1 - \cos z}, 0\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(2-1)!} \left(\frac{z^2}{1 - \cos z}\right)' = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z(1 - \cos z) - z^2 \operatorname{sen} z}{(1 - \cos z)^2} = 0.$$

22. Cálculo de integrales usando residuos

Varias integrales reales se pueden calcular usando el teorema de los residuos sin necesidad de hallar primitivas. En esta sección nos limitaremos a algunos casos típicos. En la literatura existen muchos más casos que el lector interesado podrá descubrir por sí mismo en los libros de análisis complejo.

Primer tipo

El primer tipo de integrales que vamos a considerar son de la forma

$$I = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) dt,$$

donde $F(x, y)$ es una función racional sin polos en la circunferencia unidad $x^2 + y^2 = 1$. Si $z = e^{it}$, con $0 \leq t \leq 2\pi$, parametriza dicha circunferencia, entonces

$$I = \int_{(|z|=1)^+} F\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}.$$

Por el teorema de los residuos, I es $2\pi i$ veces la suma de los residuos de la función

$$G(z) = \frac{1}{iz} F\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)$$

dentro del disco unidad.

Ejemplo 22.1. Consideremos la integral

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t}, \quad \text{donde } a > 1.$$

Entonces

$$I = 2\pi i \sum_{\mathbb{D}} \text{Res} \left(\frac{1}{iza + iz(z - z^{-1})/2i} \right) = 2\pi \sum_{\mathbb{D}} \text{Res} \left(\frac{2i}{z^2 + 2iaz - 1} \right)$$

Las raíces del denominador son $-ai \pm i\sqrt{a^2 - 1}$, pero sólo $-ai + i\sqrt{a^2 - 1}$ está en el disco unidad, pues

$$|-ai + i\sqrt{a^2 - 1}| = a - \sqrt{a^2 - 1} < 1 \Leftrightarrow a - 1 < \sqrt{a^2 - 1}.$$

Y el residuo respectivo es

$$\frac{2i}{2z + 2ai} \Big|_{z=-ai+i\sqrt{a^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Por lo tanto, $I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

Segundo tipo

Definición 22.2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Se dice que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ converge si existen y son finitos los límites

$$\int_{-\infty}^0 f(x)dx := \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^0 f(x)dx \quad \text{y} \quad \int_0^{\infty} f(x)dx := \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r f(x)dx,$$

en cuyo caso $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ es la suma de esos límites.

Veamos algunas observaciones importantes sobre esta definición. En primer lugar, el número 0 en las integrales puede ser reemplazado por cualquier $a \in \mathbb{R}$. Además, si la integral converge,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x)dx.$$

Especialmente útil para nosotros va a ser el último de estos límites. Notar que ese límite puede existir aunque la integral no converja. Por ejemplo, si $f(z) = x$ o $f(x) = \sin x$, ese límite se anula pero la integral en \mathbb{R} no converge.

Consideremos ahora integrales de la forma

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx,$$

donde F es una función racional sin polos reales. Como F es racional, para garantizar la convergencia de la integral necesitamos que en $\pm\infty$ la función se comporte como $1/x^n$, con $n \geq 2$. Eso es equivalente a asumir que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xF(x) = 0.$$

Para calcular I , integraremos la función $F(z)$ a lo largo de la región descrita en la siguiente figura:

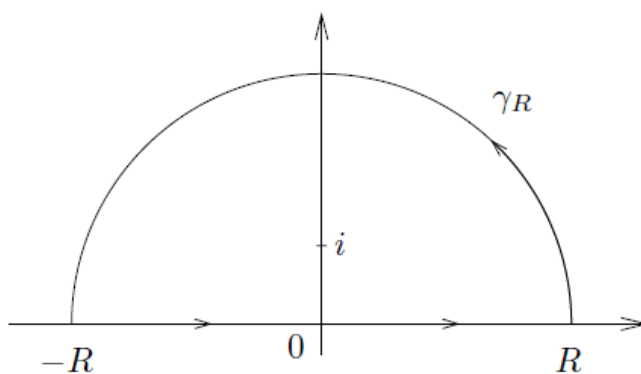


Figura 13:

Aquí tomaremos el R suficientemente grande como para que todos los polos de F en el semiplano superior \mathbb{C}_+ estén en el interior de la curva. Luego

$$\int_{-R}^R F(x) dx + \int_{\gamma_R} F(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{C}_+} \text{Res}(F, a).$$

Cuando $R \rightarrow \infty$, la primera integral converge a I , y veremos que la integral sobre la semicircunferencia de radio R tiende a cero cuando $R \rightarrow \infty$. El siguiente lema da una condición suficiente para que esto ocurra.

Lema 22.3. Sea f una función continua definida en el sector angular

$$\Lambda = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{it}, \text{ con } \theta_1 \leq t \leq \theta_2 \text{ y } r > 0\},$$

y para $R > 0$ consideremos la curva $\gamma_R(t) = Re^{it}$, con $\theta_1 \leq t \leq \theta_2$. Entonces

$$(a) \text{ Si } \lim_{|z| \rightarrow \infty, z \in \Lambda} zf(z) = 0 \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0.$$

$$(b) \text{ Si } \lim_{z \rightarrow 0, z \in \Lambda} zf(z) = 0 \Rightarrow \lim_{R \rightarrow 0} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0.$$

Demostración. Si $M_f(R) = \sup_{z \in \Lambda, |z|=R} |f(z)|$ entonces

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq M_f(R) R(\theta_2 - \theta_1),$$

y por lo tanto ambos resultados son consecuencia inmediata de su respectiva hipótesis. \square

Ejemplo 22.4. Consideremos la integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$$

Entre las raíces sextas de -1 :

$$e^{i\pi/6}, e^{i\pi/2}, e^{i5\pi/6}, e^{i7\pi/6}, e^{i3\pi/2} \text{ y } e^{i11\pi/6},$$

sólo las 3 primeras están en el semiplano superior. Calculemos el residuo en de $F(z) = (1+z^6)^{-1}$ en estos puntos, que son todos polos simples. Si z_0 es alguno de estos puntos, entonces

$$\text{Res}(F, z_0) = \frac{1}{6z_0^5} = \frac{z_0}{6z_0^6} = -\frac{z_0}{6}.$$

Por lo tanto, puesto que claramente $\lim_{|z| \rightarrow \infty} zF(z) = 0$ se tiene que

$$I = \frac{-2\pi i}{6} \left(e^{i\pi/6} + e^{i\pi/2} + e^{i5\pi/6} \right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Tercer tipo

Ahora vamos a considerar integrales de la forma

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix} dx.$$

donde f es una función holomorfa en un entorno del semiplano superior cerrado, excepto quizás en finitos puntos. Consideremos primero el caso en el que ninguna de estas singularidades se encuentra sobre el eje real. En este caso vamos a probar la siguiente proposición:

Proposición 22.5. Si $\lim_{|z| \rightarrow \infty, \text{Im}(z) \geq 0} f(z) = 0$ entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{C}_+} \text{Res}(f(z) e^{iz}, a)$$

Comencemos notando que $|e^{iz}| \leq 1$ en el semiplano superior. Para probar la proposición vamos a integrar la función $f(z)e^{iz}$ sobre la curva de la Figura 13 y veremos que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{iz} dz = 0.$$

Si supiésemos que $\lim_{|z| \rightarrow \infty, z \in \Lambda} z f(z) = 0$, entonces bastaría con aplicar el Lema 22.3.

Ejemplo 22.6. Para calcular la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx.$$

vemos que $z = i$ es el único polo de la función $\frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$ en el semiplano superior, y el residuo es

$$\left. \frac{e^{iz}}{2z} \right|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Luego, el valor de la integral es $\pi/2e$.

Probemos ahora que la integral sobre la semicircunferencia de radio R tiende a cero usando solamente la hipótesis de la Proposición 22.5.

Lema 22.7. Sea f una función holomorfa en el semiplano superior cerrado de modo que

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty, \text{Im}(z) \geq 0} f(z) = 0.$$

Entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{iz} dz = 0.$$

Demostración. Tomando la parametrización de γ_R dada por Re^{it} , con $0 \leq t \leq \pi$, si escribimos $M_f(R) = \sup_{z \in \mathbb{C}_+: |z|=R} |f(z)|$, vemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{iz} dz \right| &\leq \int_0^\pi |f(Re^{it})| |e^{iR(\cos t + i \sin t)}| |iRe^{it}| dt \\ &\leq M_f(R) R \int_0^\pi e^{-R \sin t} dt = 2M_f(R) R \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin t} dt, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a la simetría de la función seno. Una simple comparación de los gráficos de la función $y = \operatorname{sen} t$ y la recta dada por $y = 2t/\pi$ muestra que

$$\operatorname{sen} t \geq \frac{2t}{\pi} \quad \text{si } 0 \leq t \leq \pi/2.$$

Por lo tanto,

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)e^{iz} dz \right| \leq 2M_f(R)R \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{R2t}{\pi}} dt = 2M_f(R)R \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R}) \leq \pi M_f(R).$$

En consecuencia, por la hipótesis resulta que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z)e^{iz} dz = 0.$$

□

Observación 22.8. Es importante notar que la Proposición 22.5 no dice que la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix} dx$$

converge. Sólo afirma que existe el límite simétrico de la integral y dice cuánto vale. Una condición suficiente para la convergencia es que haya convergencia absoluta, es decir, que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ converja. Veamos a continuación una condición más débil, que va a resultar muy útil.

Proposición 22.9. Sea $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona y continua. Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ entonces existe

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x)e^{ix} dx \in \mathbb{C}.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que f es decreciente, y como $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, se tiene que $f \geq 0$. Vamos a probar que la integral de $f(x) \operatorname{sen} x$ converge, y como el mismo argumento vale para la integral de $f(x) \operatorname{cos} x$, eso demostrará la proposición. Primero integremos hasta $n\pi$, con $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{n\pi} f(x) \operatorname{sen} x dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x) \operatorname{sen} x dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \underbrace{\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x) |\operatorname{sen} x| dx}_{a_k},$$

donde la última igualdad vale porque en cada uno de esos intervalos el seno es positivo o negativo, alternando signos. Veamos que la serie converge usando el criterio de Leibniz:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} f(x) |\operatorname{sen}(x - \pi)| dx \stackrel{(y=x-\pi)}{=} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(y + \pi) |\operatorname{sen} y| dy \\ &\leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(y) |\operatorname{sen} y| dy = a_k, \end{aligned}$$

donde la primera igualdad vale porque $|\operatorname{sen}(x)| = |\operatorname{sen}(x - \pi)|$ y la desigualdad porque f es decreciente. Además,

$$a_k \leq f(k\pi) \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\operatorname{sen} x| dx \leq \pi f(k\pi) \rightarrow 0 \text{ si } k \rightarrow \infty, \quad (24)$$

lo que prueba la convergencia de la serie. Finalmente, si tomamos un $R > 0$ cualquiera y llamamos $[R]$ a su parte entera, tenemos que

$$\int_0^{R\pi} f(x) \operatorname{sen} x dx = \int_0^{[R]\pi} f(x) \operatorname{sen} x dx + \int_{[R]\pi}^{R\pi} f(x) \operatorname{sen} x dx.$$

Acabamos de ver que la primer integral de la derecha converge cuando $R \rightarrow \infty$, y la misma acotación que en (24) muestra que la segunda integral tiende a cero, lo que prueba la proposición. \square

Obviamente, la proposición anterior también vale para una función continua y monótona en el semieje negativo que tiende a cero en $-\infty$.

Ejercicio 18. Explicar por qué converge la siguiente integral y calcularla.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 1} dx.$$

Comentario: se puede probar que esta función no es absolutamente integrable.

Supongamos ahora que la función f tiene algún polo simple sobre el eje real. Por simplicidad supondremos que está en el origen, aunque el mismo método sirve para casos más generales. Consideremos la curva de la siguiente figura:

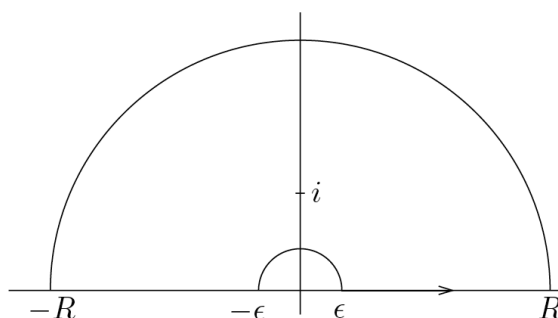


Figura 14:

A diferencia de los casos anteriores, ahora debemos ver también que ocurre con la integral sobre la semicircunferencia pequeña de radio ϵ . De eso se encarga el siguiente lema:

Lema 22.10. Si $z = 0$ es un polo simple de $g(z)$, entonces

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon^+} g(z) dz = \pi i \operatorname{Res}(g, 0).$$

Demostración. Escribamos el desarrollo de Laurent de g cerca del 0 como $g(z) = a_{-1}z^{-1} + h(z)$, con h holomorfa en 0. Luego

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon^+} h(z) dz \right| \leq \int_{\gamma_\varepsilon^+} |h(z)| |dz| \leq \left(\sup_{\gamma_\varepsilon^+} |h| \right) \pi \varepsilon \rightarrow 0.$$

Por otro lado,

$$\int_{\gamma_\varepsilon^+} \frac{a_{-1}}{z} dz = a_{-1} \int_0^\pi \frac{i z e^{it}}{\varepsilon e^{it}} dt = a_{-1} i \pi.$$

□

Ejemplo 22.11. Calculemos la integral

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

Integrando sobre el camino γ descrito en la Figura 14, y notando que $\frac{e^{iz}}{z}$ no posee singularidades en la región encerrada por γ , se tiene

$$0 = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma_\varepsilon^-} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Tomando límite para $R \rightarrow \infty$ y para $\varepsilon \rightarrow 0^+$, los Lemmas 22.7 y 22.10 dan

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx - \pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iz}}{z}, 0 \right)$$

Por lo tanto, $I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \pi i = \frac{\pi}{2}$.

Observación 22.12. Para calcular $\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ix} dx$ usamos el semiplano superior ($y \geq 0$) porque es allí donde $|e^{iz}|$ está acotada (aquí $z = x + iy$). Si tuviéramos que calcular $\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix} dx$ debemos usar el semiplano inferior, con igual prevención si tenemos que calcular $\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\lambda x} dx$, con $\lambda \in \mathbb{R}_*$. Y tengamos en cuenta que ni el seno ni el coseno están acotados en esos semiplanos.

Cuarto tipo

Consideremos una integral de la forma

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{F(x)}{x^\alpha} dx,$$

donde $0 < \alpha < 1$ y F es una función racional sin polos en el semieje $x \geq 0$. Como $\alpha < 1$ no hay problema de integrabilidad cerca del cero, y como $\alpha > 0$, una condición necesaria y suficiente para que la integral converja en el infinito es que $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$. Consideremos la función $f(z) = z^{-\alpha} F(z)$, definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, cuyo argumento varía entre 0 y 2π . Con esta convención, vamos a integrar sobre la curva γ mostrada en la siguiente figura:

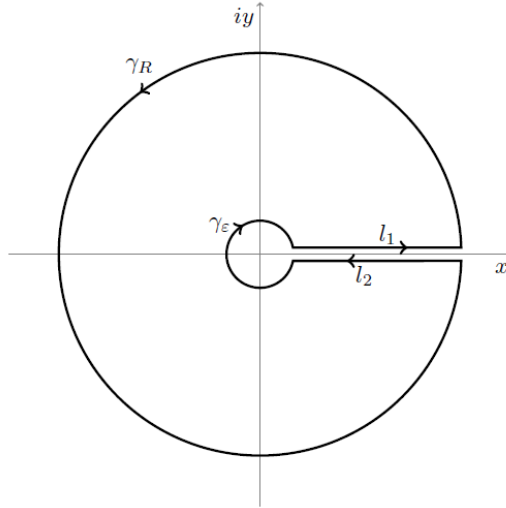


Figura 15:

En este dibujo, l_j son segmentos paralelos al eje real separados del mismo en $\eta > 0$ pequeño, que luego haremos tender a cero. Dado que F no posee polos en $[0, +\infty)$, tomando η y ε suficientemente pequeños, y R suficientemente grande, se tiene que todas las singularidades de F están en el interior de γ , y por lo tanto

$$\int_{\gamma_R} \frac{F(z)}{z^\alpha} dz + \int_{\gamma_\varepsilon^-} \frac{F(z)}{z^\alpha} dz + \int_{l_1} \frac{F(z)}{z^\alpha} dz + \int_{l_2} \frac{F(z)}{z^\alpha} dz = 2\pi i \sum_{a \notin \mathbb{R}_{\geq 0}} \text{Res}(z^{-\alpha} F(z), a).$$

Haciendo que $\eta \rightarrow 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{l_1} \frac{F(z)}{z^\alpha} dz + \int_{l_2} \frac{F(z)}{z^\alpha} dz &\xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \int_\varepsilon^R \frac{F(x)}{x^\alpha} dx - \int_\varepsilon^R \frac{F(x)}{e^{\alpha(\log x + 2\pi i)}} dx \\ &= \left(1 - \frac{1}{e^{2\pi\alpha i}}\right) \underbrace{\int_\varepsilon^R \frac{F(x)}{x^\alpha} dx}_{I_{\varepsilon, R}}. \end{aligned}$$

Entonces volviendo a la igualdad de arriba obtenemos

$$\int_{\gamma_R} \frac{F(z)}{z^\alpha} dz + \int_{\gamma_\varepsilon^-} \frac{F(z)}{z^\alpha} dz + (1 - e^{-2\pi\alpha i}) I_{\varepsilon, R} = 2\pi i \sum_{a \notin \mathbb{R}_{\geq 0}} \text{Res}(z^{-\alpha} F(z), a).$$

Por los puntos (a) y (b) del Lema 22.3 las dos primeras integrales tienden a cero cuando $R \rightarrow \infty$ y $\varepsilon \rightarrow 0$, respectivamente. Luego

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi\alpha i}} \sum \text{Res} \left(\frac{F(z)}{z^\alpha} \right), \quad (25)$$

donde la suma es sobre todos los polos de $F(z)$.

Ejemplo 22.13. Calcular la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}, \quad \text{con } 0 < \alpha < 1.$$

La función $\frac{1}{z^\alpha(1+z)}$ tiene un polo en $z = -1$. Dado que la determinación del argumento usada es igual a π cuando $z = -1$, resulta que

$$\text{Res}\left(\frac{1}{z^\alpha(1+z)}, -1\right) = z^{-\alpha}|_{-1} = e^{-\alpha\pi i}.$$

Por la fórmula (25) tenemos

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} = 2\pi i \frac{e^{-\alpha\pi i}}{1 - e^{-2\pi\alpha i}} = \frac{2i\pi}{e^{\alpha\pi i} - e^{-\pi\alpha i}} = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi\alpha)}.$$

Quinto tipo

Consideremos una integral de la forma

$$I = \int_0^{+\infty} F(x) \log x \, dx,$$

donde F es una función racional sin polos en el semieje $x \geq 0$, y $\lim_{x \rightarrow \infty} xF(x) = 0$. Esta última condición garantiza la integrabilidad. Usaremos la función $f(z) = F(z) \log^2 z$, y al igual que en el caso anterior, f se define en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, y el argumento varía entre 0 y 2π . Y también vamos a integrar sobre la curva de la Figura 15 con las mismas convenciones que antes. El motivo para usar el cuadrado del logaritmo quedará claro en seguida. Al igual que antes, tomando límites para $\eta \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$, obtenemos

$$\int_0^\infty F(x) \log^2 x \, dx - \int_0^\infty F(x) (\log x + 2\pi i)^2 \, dx = 2\pi i \sum \text{Res}(F(z) \log^2 z),$$

donde la suma es sobre todos los polos de F y las integrales

$$\int_{\gamma_R} F(z) \log^2 z \, dz \rightarrow 0, \quad \int_{\gamma_\varepsilon} F(z) \log^2 z \, dz \rightarrow 0$$

cuando $R \rightarrow \infty$ y $\varepsilon \rightarrow 0$ por (a) y (b) del Lema 22.3, respectivamente. Además, aquí se vé el por qué del cuadrado del logaritmo. De no haberlo puesto la integral que queríamos calcular se hubiera cancelado. También vemos que $F(z) \log z$ hubiera servido para calcular $\int_0^\infty F(x) \, dx$. Haciendo las cuentas en la última igualdad se obtiene

$$\int_0^\infty F(x) \log x \, dx + \pi i \int_0^\infty F(x) \, dx = -\frac{1}{2} \sum_{a \notin \mathbb{R}_{\geq 0}} \text{Res}(F(z) \log^2 z, a). \quad (26)$$

Y en general necesitaremos calcular la segunda integral para calcular la primera. Sin embargo, si tenemos la suerte de que $F(x)$ tome valores reales para x real, igualando la parte real de ambos miembros, vemos que

$$\int_0^\infty F(x) \log x \, dx = -\frac{1}{2} \text{Re} \left[\sum_{a \notin \mathbb{R}_{\geq 0}} \text{Res}(F(z) \log^2 z, a) \right].$$

Ejemplo 22.14. Calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^3} \quad \text{y} \quad \int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3} dx.$$

Como $F(z) = (1+z)^{-3}$ es una función racional sin polos en $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} xF(x) = 0$ y F toma valores reales en \mathbb{R} , estamos en las condiciones del caso anterior, y podemos usar (26). Entonces

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3} dx + \pi i \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^3} = -\frac{1}{2} \operatorname{Res} \left(\frac{\log^2 z}{(1+z)^3}, -1 \right).$$

Luego las dos integrales que queremos calcular son la parte real e imaginaria de la expresión de la derecha. Debemos entonces calcular el residuo en -1 , que es un polo de orden 3. Por (23):

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{\log^2 z}{(1+z)^3}, -1 \right) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} \left[\frac{\cancel{(z+1)^3} \log^2 z}{\cancel{(z+1)^3}} \right]^{(2)} = \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{\log z}{z} \right)' \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1 - \log z}{z^2} = 1 - i\pi. \end{aligned}$$

Referencias

- [1] L. V. Ahlfors, Complex Analysis, Mc.Graw-Hill Book Co. (1979)
- [2] H. Cartan, Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables. Translated from the French. Reprint of the 1973 edition. Dover Publications, Inc., New York, 1995.
- [3] R. Churchill y J. Brown, Variable Compleja y Aplicaciones, Cuarta Edición, Mc. Graw-Hill, 1986.
- [4] J. B. Conway, Functions of one complex variable, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 11. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.
- [5] W. Rudin, Real and complex analysis. Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.