

Análisis complejo, integración por residuos Series de Fourier, Transformadas de Fourier y Laplace

Marco Farinati*

19 de agosto de 2022

Introducción

Estas notas corresponden a la materia Matemática 4 de la Lic. en Cs. Físicas de la FCEN UBA. Algunos temas están desarrollados más profundamente de lo que se da en clases y deben ser considerados como un primer material de profundización, en caso de interés. En líneas generales, los temas se pueden dividir en dos:

- La primera parte: consiste en el análisis complejo tradicional, teoría de integración y residuos. Toda esta parte está profundamente influenciada por los recuerdos de la propia cursada de Análisis Complejo con Carlos Segovia -a cuya memoria dedico este apunte- y adaptada su presentación al público mayoritario de estudiantes de física.
- La segunda parte es sobre Series de Fourier y las transformadas de Fourier y Laplace, enfocadas todas ellas en la resolución de ecuaciones diferenciales.

Índice

1. Números complejos	5
1.1. Los complejos como matrices	6
1.2. Disgresión histórica: Los complejos y la ecuación cúbica	7
2. Topología en \mathbb{C}	11
2.1. La métrica, geometría de rectas y círculos	11
2.2. Rectas, círculos y homografías	12
2.3. Sucesiones y convergencia	14

*Dpto. Matemática FCEyN UBA - IMAS Conicet

2.4.	La exponencial: ejemplo de definición como límite	15
2.5.	Comentario histórico	16
2.6.	Forma polar y notación exponencial	16
3.	Las funciones complejas y el análisis: las condiciones de Cauchy-Riemann	18
3.1.	Cauchy-Riemann y las derivadas en los ejes coordenados	19
3.2.	Cauchy-Riemann y la matriz de la multiplicación por un complejo	20
3.3.	Aplicación abierta e inversa local	22
3.4.	Interpretaciones y aplicaciones de las ecuaciones de Cauchy-Riemann . . .	23
3.4.1.	Flúidos	23
3.4.2.	Funciones armónicas	24
3.4.3.	La compañera armónica	24
3.4.4.	Familias de curvas ortogonales	27
3.4.5.	Transformaciones conformes	29
4.	Sucesiones y series: criterios	31
4.1.	Series de potencias, radio de convergencia	31
4.2.	Sobre el criterio de la raíz y el criterio del cociente	34
4.2.1.	Cálculo de radio de convergencia con el criterio de la raíz	36
4.2.2.	El criterio del cociente	37
4.3.	Convergencia en el borde	40
4.3.1.	Criterio Leibniz	40
4.3.2.	Criterio Abel/Dirichlet	41
4.3.3.	Disgresión: La derivada discreta y \sum como integral discreta	41
4.3.4.	Demostración del Criterio de Dirichlet.	44
5.	Sucesiones de funciones	45
5.1.	Convergencia puntual y convergencia uniforme	45
5.2.	Convergencia uniforme de las derivadas: caso real	48
5.3.	Ejemplo importante: series de potencias	50
6.	Integrales complejas sobre curvas	51
6.1.	Interpretación geométrica real de la integral compleja	52
6.2.	El ejemplo de integral	54
6.3.	Primer resultado: cálculo de $\int_C f'(z)dz$	55
6.4.	¿Cuándo existe la primitiva de una holomorfa?	56
6.5.	Integral y convergencia uniforme	57
6.6.	Aplicación: Las series son holomorfas	59
7.	Fórmula integral de Cauchy y consecuencias	62
7.1.	Fórmula integral de Cauchy	62
7.2.	Derivadas superiores	65
7.3.	Teorema de Liouville	66

7.3.1.	Disgresión: Teorema fundamental del álgebra	67
7.4.	Principio del Módulo Máximo	67
7.4.1.	Usando funciones armónicas	68
7.4.2.	Usando la fórmula integral de cauchy	68
7.4.3.	“Demostración física” usando la ecuación del calor	70
7.5.	Analiticidad: las holomorfas son localmente series	70
7.5.1.	Consecuencias de la demostración de analiticidad	72
7.5.2.	Demostración directa de las fórmulas para derivadas superiores	72
7.6.	Liouville generalizado	73
7.7.	Tipos de ceros y principio de identidad	73
7.8.	Cantidad de ceros	75
8.	Desarrollo en series de Laurent, singularidades, residuos	76
8.1.	Series de Laurent	76
8.2.	Un ejemplo fácil de cálculo de serie de Laurent	79
8.3.	Singularidades aisladas	81
8.4.	Residuos: Integración de funciones con singularidades aisladas	86
8.5.	Fórmula útil de Residuo	88
8.6.	Derivada logarítmica, cantidad de ceros y de polos	89
8.7.	El teorema de Rouché	90
8.8.	Residuo en el infinito	90
8.9.	Cálculo de integrales reales usando residuos	94
8.9.1.	Ejemplos del tipo $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \text{sen } t) dt$	94
8.9.2.	Integrales el tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$	95
8.9.3.	Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)P(t)}{Q(t)} dt$	97
9.	Series de Fourier	100
9.1.	Serie de Fourier y serie de Laurent	100
9.2.	Relaciones de ortogonalidad y cálculo de coeficientes de Fourier	101
9.3.	Regularidad	104
9.3.1.	Series y convergencia uniforme: aplicación a continuidad	104
9.3.2.	Series y convergencia uniforme: aplicación a derivadas	105
9.3.3.	Series y primitivas	106
9.4.	Aplicación de representación en series de Fourier al resorte forzado	108
9.5.	Álgebra lineal y análisis	110
9.6.	Coeficientes de Fourier en espacios con producto interno	111
9.7.	La desigualdad de Cauchy-Schwartz, desigualdad triangular y distancia	112
9.8.	El ejemplo $\ell^2(\mathbb{N})$	114
9.9.	Convergencia, completitud y espacios de Hilbert	116
9.10.	Proyección ortogonal y mejor aproximación en media cuadrática	120
9.11.	Desigualdad de Bessel e identidad de Parseval	121
9.12.	Stone-Weierstrass	124

9.13. Sobre la convergencia puntual	125
9.14. Ejercicios para completar la demostración del Teorema 9.45	128
10. Ecuación del calor / onda y separación de variables	130
10.1. Ecuación del calor	130
10.2. La ecuación del calor unidimensional y separación de variables	131
10.3. Ecuación de onda	132
10.4. Ejemplo de aplicación de la ecuación del calor: la bodega ideal	132
11. Transformada de Fourier	136
11.1. Primeros ejemplos y propiedades	136
11.2. Demostración de regularidad utilizando análisis funcional	141
11.3. La transformada de la Gaussiana	146
11.4. Producto de Convolución	147
11.5. Unidad aproximada para la convolución	150
11.6. Anti-transformada	153
11.7. La ecuación del calor con transformada de Fourier	155
11.8. Transformada de Fourier en L^2 : fórmula de Plancherel	156
11.9. Transformada de Fourier - Resumen de resultados	158
12. Transformada de Laplace	160
12.1. Definición y algunas propiedades	160
12.2. Algunas transformadas de Laplace	163
12.3. Más ejemplos: la función Heaviside	164
12.4. Más propiedades	165
12.5. Convolución para Laplace	166
12.6. Ejemplo genérico	168
12.7. La función Γ	173
12.8. Integración "por partes" de la transformada de Laplace	174
13. Ecuaciones ordinarias de orden 2	176
13.1. Soluciones analíticas	176
13.2. El Laplaciano en cilíndricas y separación de variables	177
13.3. Singularidades, método de Frobenius	179
13.4. El método de Frobenius para el Laplaciano en cilíndricas: la función de Bessel	182

1. Números complejos

Utilizando los números reales, si $x \in \mathbb{R}$ puede ser $x > 0$, $x < 0$ o $x = 0$, pero en cualesquiera de esos tres casos,

$$x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

y por lo tanto

$$x^2 + 1 \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

En particular, $x^2 = -1$ es una ecuación que no tiene solución en \mathbb{R} . Los números complejos subsanan esta dificultad, introduciendo una unidad imaginaria i , tal que $i^2 = -1$. Si queremos sumar y multiplicar números entre sí debemos admitir números de la forma $a + bi$ con a y b en \mathbb{R} , y afortunadamente usando la distributividad, la multiplicación la definimos en consecuencia, reemplazando i^2 por -1 en caso de que aparezca:

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 = ac + (ad + bc)i + bd(-1) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

Es decir, la multiplicación de dos "números complejos" es un "número complejo".

Con esta construcción, no queda claro qué es un número complejo, o cual es su naturaleza matemática, por lo que vamos a dar una definición formal. *Por definición*, los números complejos son un conjunto dotado de las operaciones algebraicas de suma y producto; como conjunto, denotado \mathbb{C} , definimos

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \stackrel{not.}{=} \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

La última igualdad es sólo notacional, hemos identificado $\mathbb{R} \ni 1 \leftrightarrow (1, 0) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, y denotamos por $i = (0, 1)$. Es un cambio de nombre de la base canónica de \mathbb{R}^2 . Al definir $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ estamos asumiendo que no sólo vemos a \mathbb{R}^2 con una estructura de \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión 2, sino que tiene una estructura multiplicativa:

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(z, w) = (a + bi, x + iy) \mapsto zw = ax - by + i(ay + bx)$$

De esta manera $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ se identifica como subespacio via

$$x \leftrightarrow x + 0i = (x, 0)$$

y también como sub-cuerpo: la multiplicación de los complejos en los elementos de la forma $x + 0i$ es la misma que la multiplicación usual de los reales.

Observamos también, a partir de la definición formal de la multiplicación:

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0^2 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

Es decir, en los números complejos podemos resolver la ecuación

$$z^2 = -1 \implies z = \pm i$$

Sin embargo, esa no fué la motivación histórica para "considerar seriamente" a los números complejos, más allá de un invento matemático (ver subsección 1.2). Antes de eso, veremos algunas propiedades de los números complejos:

Lema 1.1. *Son válidas las siguientes identidades*

1. *Conmutatividad:* $zw = wz$.

2. *Distributividad:*

$$z(w + w') = zw + zw', \quad (z + z')w = zw + z'w$$

3. *Asociatividad:* $(zz')z'' = z(z'z'')$

4. *Existencia de inverso:* $\forall z \neq 0$ existe w tal que $wz = 1 = zw$. A éste elemento w lo denotaremos z^{-1} , o $\frac{1}{z}$.

Demostración. La conmutatividad es clara mirando la fórmula:

$$(a + bi)(x + iy) = ax - by + i(ay + bx),$$

que no cambia si intercambiamos simultáneamente $a \leftrightarrow x$, $b \leftrightarrow y$, pues

$$ax \leftrightarrow xa = ax, \quad by \leftrightarrow yb = by,$$

$$ay \leftrightarrow xb, \quad bx \leftrightarrow ya \implies ay + bx \leftrightarrow xb + ya = ay + bx$$

La distributividad es obvia a partir de la definición misma de la multiplicación compleja y la propiedad distributiva de la multiplicación de los números reales. La asociatividad también es una consecuencia directa de la asociatividad de la multiplicación de los números reales, aunque la cuenta es un poco más larga y quizás tediosa. Por el momento dejamos la verificación directa como ejercicio, pero en contrapartida, veremos una manera alternativa de ver los números complejos.

Finalmente si $z = x + iy \neq 0$ entonces $x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$ es no nulo, y se puede definir

$$w := \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i$$

y es un ejercicio elemental chequear que este elemento funciona de inverso. □

1.1. Los complejos como matrices

Retomamos la fórmula de la multiplicación de los números complejos

$$(a + bi)(x + iy) = ax - by + i(ay + bx)$$

Si fijamos a y b , pero en cambio consideramos variables al par (x, y) , entonces la aplicación

$$x + iy \mapsto (a + bi)(x + iy) = ax - by + i(ay + bx)$$

es claramente una aplicación \mathbb{R} -lineal de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , y por lo tanto le corresponde una matriz. Observamos

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix}$$

Es decir, ésta es la matriz de la transformación lineal en cuestión. Más aún, las matrices de este tipo

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \text{Id} + bJ$$

donde $\text{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, además de formar un subespacio de dimensión 2 de todas las matrices 2×2 reales, tienen la siguiente manera de multiplicarse:

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\text{Id}$$

$$\text{Id}^2 = \text{Id}, \quad \text{Id}J = J\text{Id} = J$$

y en consecuencia

$$(a \text{Id} + bJ)(x \text{Id} + yJ) = ax \text{Id}^2 + ay \text{Id}J + bxJ\text{Id} + byJ^2 = (ax - by) \text{Id} + (ay + bx)J$$

Es decir, es la misma tabla de multiplicación que la de los números complejos. Concluimos en particular que la multiplicación de los complejos es asociativa, pues coincide con un caso particular de multiplicación de matrices.

1.2. Disgresión histórica: Los complejos y la ecuación cúbica

El método de Cardano - Tartaglia - del Ferro

Todos conocemos la fórmula de resolución de la ecuación cuadrática general:

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

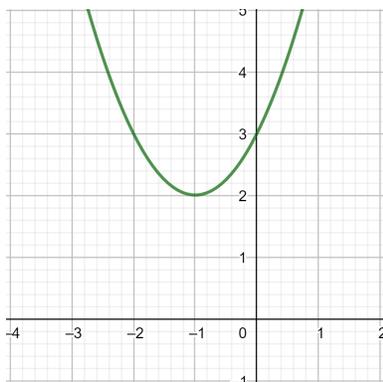
Sin embargo, en algunos ejemplos, la parte de la raíz cuadrada puede introducir un inconveniente algebraico. Consideremos por ejemplo la ecuación

$$x^2 + 2x + 3 = 0$$

La fórmula famosa indica:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 3}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

En el mundo de los números reales estamos en problemas, no podemos calcular $\sqrt{-8}$. Pero ésto en principio no es malo, nos da la indicación de que algo no está sucediendo. Si estudiamos la función $f(x) = x^2 + 2x + 3$:



$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x + 3 \\ &= x^2 + 2x + 1 + 2 \\ &= (x + 1)^2 + 2 \end{aligned}$$

Vemos que f tiene un mínimo en $x_0 = -1$, en donde f vale 2, y en los demás puntos es mayor que 2. Si queremos ver dónde interseca el gráfico de f con la recta horizontal " $y = 0$ " la respuesta es clara: *en ningún lado*. De la misma manera que ningún número al cuadrado es -8 . De hecho, que no se pueda resolver una raíz cuadrada de un número negativo nos da una información relevante al problema. Porqué entonces la necesidad de introducir números complejos? qué significan las soluciones complejas de la ecuación cuando no existe solución real? Históricamente los números complejos tuvieron relevancia no por proveer soluciones de una ecuación cuadrática cuando esta no admitía soluciones reales, sino a partir de las ecuaciones de grado 3.

Repasaremos brevemente la resolución de la ecuación cúbica, conocida como el método de Cardano, ya que éste fue quien publicó el método, obtenido en realidad por Tartaglia, y del que se afirma que en esa época, del Ferro también poseía un método (del cual no hubo registros publicados).

A partir de la ecuación

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

con $a \neq 0$, si pasamos dividiendo a , y eventualmente renombrando las otras constantes ($b' = b/a, c' = c/a, d' = d/a$) podemos suponer que la ecuación es de la forma

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Notamos que si $y := x + \frac{b}{3}$, entonces

$$y^3 = x^3 + bx^2 + \text{términos de grado 1 o 0 en } x$$

Luego, a menos de un cambio de variables, podemos considerar como caso general una ecuación de la forma

$$y^3 + py + q = 0$$

(Dejamos como ejercicio describir p y q a partir de b, c, d .)

Supondremos que la solución de tal ecuación es de la forma

$$y = u + v$$

entonces

$$\begin{aligned}y^3 &= (u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 \\ &= u^3 + v^3 + 3uv(u + v)\end{aligned}$$

En términos de u y v , la ecuación original queda

$$\begin{aligned}0 &= y^3 + py + q = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q \\ &= u^3 + v^3 + \underbrace{(3uv + p)}_{=0?}(u + v) + q\end{aligned}$$

Esta expresión ciertamente valdrá 0 si u y v verifican simultáneamente

$$u^3 + v^3 = -q$$

$$3uv = -p$$

Lo cual a su vez implica

$$u^3 + v^3 = -q$$

$$27u^3v^3 = -p^3$$

Observamos que éste es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, y si vemos $u^3 := U$ y $v^3 = V$ como nuevas incógnitas:

$$U + V = -q$$

$$27UV = -p^3$$

esto conduce a una ecuación cuadrática, por ejemplo en U . Pues de la segunda ecuación podemos despejar $V = -p^3/9U$, y al poner en la primera obtenemos

$$U + \frac{-p^3}{27U} = -q$$

y multiplicando por U :

$$U^2 - \frac{p^3}{27} = -qU$$

que es ciertamente una ecuación cuadrática, y la sabemos resolver. Nos quedarán dos soluciones del tipo $\frac{(*) \pm \sqrt{*}}{2}$. Como ejercicio podemos chequear que en realidad es

$$\frac{q \pm \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}$$

Como sabemos que $u^3 = U$, entonces debemos obtener una raíz cúbica. Observamos que en los números reales siempre se puede sacar raíz cúbica, pero a su vez, cada número real tiene una *única* raíz cúbica.

De la condición $3uv = -p$, una vez obtenido u , se despeja unívocamente v .

Es posible ver que de la simetría de intercambiar u con v (no cambia $u + v$ ni uv), en realidad la libertad de elección de signo \pm en $\frac{(*) \pm \sqrt{*}}{2}$ es superflua, pues corresponde al intercambio de u con v . Pero entonces nos encontramos con una dificultad: en caso de que podamos resolver la cuadrática para U (porque " $b^2 - 4ac \geq 0$ "), obtenemos una única solución de la ecuación cúbica. Pero existen ejemplos de ecuaciones de grado tres, con tres raíces reales, y entonces este método se está perdiendo las otras dos raíces! Sin embargo, en los números complejos observamos que

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

verifica (ejercicio!)

$$\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \quad \omega^3 = 1$$

Por lo tanto, si $u^3 = U$, entonces

$$(\omega u)^3 = \omega^3 u^3 = U, \quad (\omega^2 u)^3 = \omega^6 u^3 = U,$$

Si $u \in \mathbb{R}$, "lamentablemente" ωu y $\omega^2 u$ son complejos *no reales*. Si no nos gustan los complejos, tendremos reparos en usarlos. Pero junto con $\frac{1}{\omega} v = \omega^2 v$ y $\frac{1}{\omega^2} v = \omega v$ respectivamente, obtenemos tres soluciones reales válidas

$$y_1 = u + v$$

$$y_2 = \omega u + \omega^2 v$$

$$y_3 = \omega^2 u + \omega v$$

De esta manera, con ecuaciones cúbicas a coeficientes reales, en donde el método de Cardano provee un U real, con raíz cúbica real u , incursionando en el mundo de los complejos no reales, se obtienen ωu y $\omega^2 u$, ambos *complejos no reales*, pero que nos proveen de y_2 e y_3 , ambas *soluciones reales* de la ecuación real original.

Una situación aún peor se da cuando $q^2 - 4p^3/27 < 0$. En se caso no hay soluciones reales para U , y sin usar los complejos no es posible encontrar ninguna solución, cuando todos sabemos que la ecuación cúbica $y^3 + py + q = 0$ siempre tiene por lo menos una raíz real (si p y q son reales), simplemente considerando límite $y \rightarrow \pm\infty$ vemos que la función $f(y) = y^3 + py + q$ necesariamente toma valores negativos para $y \ll 0$ y valores positivos para $y \gg 0$; usando la continuidad y el teorema de los valores intermedios debe pasar por el cero.

Históricamente ésta fue la razón de peso para que los números complejos fueran tomados seriamente y no sean simplemente vistos como un divertimento de abstracción matemática, pues interesados en un problema real, el hecho de describir las soluciones reales se hacía imposible sin pasar por los números complejos.

2. Topología en \mathbb{C}

2.1. La métrica, geometría de rectas y círculos

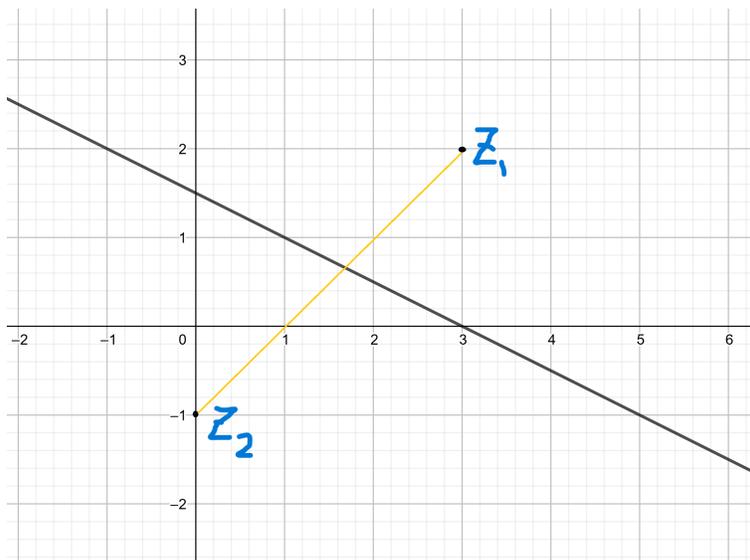
En $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ tenemos la distancia eucídea usual: si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, la distancia entre z_1 y z_2 se calcula vía

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ejemplo 2.1. Sean $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{C}$. Entonces el conjunto de los puntos que equidistantes de z_1 y z_2 es una recta:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| = |z - z_2|\} = \{tv + z_0 : t \in \mathbb{R}\}$$

donde $z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$ y $v = i(z_1 - z_2)$.



En efecto, la ecuación

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

equivale a

$$|z - z_1|^2 = |z - z_2|^2$$

Escribamos $z = x + iy$, entonces tenemos

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$

Si desarrollamos los cuadrados, vemos que los términos de x^2 y de y^2 se cancelarán, dando origen a una ecuación lineal entre x e y , cuyos coeficientes dependerán de x_1, x_2, y_1, y_2 . De hecho, queda la ecuación

$$-2xx_1 + x_1^2 - 2yy_1 + y_1^2 = -2xx_2 + x_2^2 - 2yy_2 + y_2^2$$

o bien

$$(x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y = \frac{x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2}{2}$$

Esto es una recta perpendicular a $(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = z_2 - z_1$, por lo tanto se puede parametrizar en la forma

$$tv + z_0$$

donde $v \perp z_2 - z_1$ (por ejemplo $v = i(z_2 - z_1)$) y que pase por z_0 (por ejemplo $z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$, que claramente es equidistante de z_1 y z_2).

Dejamos como ejercicio el siguiente:

Ejemplo 2.2. Sea $1 < \lambda \in \mathbb{R}$, $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{C}$, entonces el conjunto

$$\{z \in \mathbb{Z} : |z - z_1| = \lambda|z - z_2|\}$$

es un círculo.

La clave es ver que, a diferencia del ejemplo anterior, los términos cuadráticos no se cancelan y la ecuación se puede organizar en la forma

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

para ciertos $a, b, R \in \mathbb{R}$. Dejamos los detalles como ejercicio.

2.2. Rectas, círculos y homografías

Comencemos por un ejemplo:

Proposición 2.3. La función $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dada por

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

manda rectas en rectas o círculos y círculos en círculos o rectas. Más precisamente manda rectas que pasan por el origen en rectas que pasan por el origen, círculos que tocan el origen en rectas que no tocan el origen, círculos que no pasan por el origen en círculos que no pasan por el origen, y rectas que no pasan por el origen en círculos que pasan por el origen.

Demostración. Es claro que $z \mapsto \frac{1}{z}$ manda la recta $\{t \cdot z_0 : t \in \mathbb{R}\}$ en $\{t \cdot \frac{1}{z_0} : t \in \mathbb{R}\}$, con la salvedad que t debe ser $\neq 0$.

Si ahora consideramos una recta que no pasa por el origen

$$L = \{tz_0 + w_0 : t \in \mathbb{R}\}$$

con $w_0 \neq 0$ un complejo que no sea un múltiplo real de z_0 , es claro que

$$\frac{1}{tz_0e^{i\theta} + w_0e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{tz_0 + w_0}$$

Como multiplicar por un número complejo de módulo 1 es una rotación, la condición geométrica no cambia si rotamos la recta L . Similarmente si multiplicamos por un número real positivo. Podemos suponer entonces que a la recta L la podemos rotar, y multiplicar por un factor de escala a gusto, por lo que consideraremos el caso $L =$ la recta vertical que pasa por el 1:

$$L = \{1 + it : t \in \mathbb{R}\}$$

Queremos ver ahora que

$$\frac{1}{1 + it} : t \in \mathbb{R}$$

parametriza un círculo que pasa por el origen. De hecho, es el círculo de radio $\frac{1}{2}$ que pasa por el $\frac{1}{2}$. En efecto

$$\frac{1}{1 + it} = \frac{1 - it}{1 + t^2}$$

Ahora escribamos, para $t \in \mathbb{R}$, $t = \operatorname{tg}(\alpha)$ con $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$. Ahora reescribimos

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + it} &= \frac{1 - it}{1 + t^2} = \frac{1 - i \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{1 + \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}} = \frac{\cos^2(\alpha) \left(1 - i \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)}{\cos^2(\alpha) \left(1 + \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}\right)} \\ &= \frac{\cos^2(\alpha) - i \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\alpha)}{\cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha)} = \cos^2(\alpha) - i \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\alpha) \end{aligned}$$

Veamos que esos puntos están en el círculo de centro $\frac{1}{2}$ y radio $\frac{1}{2}$. Calculamos

$$\begin{aligned} &\left(\cos^2(\alpha) - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\cos(\alpha) \operatorname{sen}(\alpha)\right)^2 = \\ &= \cos^4(\alpha) - \cos^2(\alpha) + \frac{1}{4} + \cos^2(\alpha) \operatorname{sen}^2(\alpha) \\ &= \cos^4(\alpha) - \cos^2(\alpha)(1 - \operatorname{sen}^2(\alpha)) + \frac{1}{4} \\ &= \cos^4(\alpha) - \cos^2(\alpha) \cos^2(\alpha) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Dejamos como ejercicio verificar que esta parametrización cubre todos los puntos de este círculo salvo el 0.

Para ver que manda círculos que pasan por el origen en rectas se razona de manera análoga al caso anterior, notando que la aplicación $z \mapsto \frac{1}{z}$ es su propia inversa.

Para ver que $z \mapsto \frac{1}{z}$ manda círculos que no pasan por el origen en círculos que no pasan por el origen haremos el caso del círculo de centro 1 y radio $0 < r < 1$. Dejaremos como ejercicio verificar que los demás casos se pueden reducir a éste multiplicando por algún número dado.

Parametrizamos un círculo con estas características:

$$1 + r \cos(t) + ir \operatorname{sen}(t)$$

y vía la inversión $z \mapsto \frac{1}{z}$ obtenemos los puntos de la forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + r \cos(t) + ir \operatorname{sen}(t)} &= \frac{1 + r \cos(t) - ir \operatorname{sen}(t)}{(1 + r \cos(t))^2 + r^2 \operatorname{sen}^2(t)} = \\ &= \frac{1 + r \cos(t) - ir \operatorname{sen}(t)}{1 + 2r \cos(t) + r^2 \cos^2(t) + r^2 \operatorname{sen}^2(t)} = \frac{1 + r \cos(t) - ir \operatorname{sen}(t)}{1 + r^2 + 2r \cos(t)} \end{aligned}$$

Notar que para $t = 0$ obtenemos el punto

$$x_1 = \frac{1}{1 + r}$$

mientras que para $t = \pi$ obtenemos

$$x_2 = \frac{1}{1 - r}$$

Por esto, podemos sospechar que el centro del círculo estará en

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + r} + \frac{1}{1 - r} \right) = \frac{1}{1 - r^2}$$

Calculamos ahora

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1 + r \cos(t) - ir \operatorname{sen}(t)}{1 + r^2 + 2r \cos(t)} - \frac{1}{1 - r^2} \right|^2 = \\ &= \left(\frac{1 + r \cos(t)}{1 + r^2 + 2r \cos(t)} - \frac{1}{1 - r^2} \right)^2 + \left(\frac{r \operatorname{sen}(t)}{1 + r^2 + 2r \cos(t)} \right)^2 = \dots \end{aligned}$$

que luego de operaciones algebraicas (tediosas pero) elementales da

$$\dots = \frac{r^2}{(1 - r^2)^2}$$

□

Corollario 2.4. *Las homografías mandan rectas en rectas o círculos y círculos en círculos o rectas.*

2.3. Sucesiones y convergencia

Los complejos $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ tienen la topología usual del plano real, si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tiene sentido preguntarse si es continua (o diferenciable!), si $\Omega \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ podemos preguntarnos si es abierto, cerrado, conexo por arcos, compacto, acotado, no acotado, etc.

En particular, si $z_n = x_n + iy_n$ es una sucesión de números complejos, podemos preguntarnos por la existencia o no de su límite.

2.4. La exponencial: ejemplo de definición como límite

Si $x \in \mathbb{R}$, recordamos que podemos definir e^x a partir de la serie de Taylor, que de hecho es un límite: para x fijo tenemos

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

Como ejemplo importante tenemos lo siguiente:

Teorema 2.5 (Fórmula de Euler). Si $x \in \mathbb{R}$, entonces la sucesión

$$z_n := \sum_{k=0}^n \frac{(ix)^k}{k!} \in \mathbb{C}$$

es una sucesión convergente en \mathbb{C} , más aún, su límite es el número complejo $\cos(x) + i \operatorname{sen}(x)$. Si definimos

$$e^{ix} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$$

obtenemos la fórmula de Euler

$$e^{ix} := \cos(x) + i \operatorname{sen}(x)$$

Demostración. Observamos

$$(ix)^k = i^k x^k$$

$$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, \dots$$

Como $i^4 = 1$: las potencias de i se van repitiendo periódicamente con período 4. Además, i^n es o bien real (± 1) o bien imaginario puro ($\pm i$), dependiendo de la paridad de n . Por lo tanto conviene distinguir la paridad y tenemos las posibilidades

$$n = 2k \implies i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$$

$$n = 2k + 1 \implies i^{2k+1} = i^{2k} i = (-1)^k i$$

Si empezamos a operar sobre la serie suponiendo la convergencia, separamos los términos pares e impares:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n \geq 0} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{k \geq 0} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k \geq 0} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k i x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

obteniendo así la parte real e imaginaria:

$$= \left(\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right) + \left(\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) i$$

Si en vez de haber empezado con la serie, hubiéramos puesto una suma parcial $\sum_{n=0}^N$, también podríamos haber separado los casos en n par o impar y habríamos obtenido la misma fórmula con sumas parciales. Ahora nos damos cuenta de que son las sumas parciales asociadas a las series de Taylor del coseno y seno respectivamente, que sabemos que son convergentes. Deducimos que tanto la parte real como la imaginaria de z_n son convergentes y que sus límites son $\cos(x)$ y $\sin(x)$ respectivamente. Por lo tanto la serie de la exponencial original era convergente, y

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

□

2.5. Comentario histórico

De Wikipedia:

Roger Cotes descubrió en 1714 la relación entre las funciones trigonométricas y el logaritmo,

$$ix = \ln(\cos x + i \sin x)$$

y fue publicada en su obra póstuma Harmonia mensurarum (1722), 20 años antes de que lo hiciera Leonhard Euler. Euler desarrolló la fórmula utilizando la función exponencial en vez del logaritmo y lo comunicó en una carta enviada a Christian Goldbach en 1741, siendo publicada y popularizada en su obra Introductio in analysin infinitorum en 1748. Es interesante notar que ninguno de los descubridores vio la interpretación geométrica señalada anteriormente: la visión de los números complejos como puntos en el plano surgió en 1787 por parte del matemático Caspar Wessel en su único informe para la Real Academia Danesa.

Roger Cotes (Burbage, Leicestershire, 10 de julio de 1682 - Cambridge, 5 de julio de 1716) fue un matemático y físico inglés, conocido por trabajar en estrecha colaboración con Isaac Newton. Inventó las fórmulas de Newton-Cotes y presentó por primera vez lo que hoy se conoce como la fórmula de Euler.

Sobre la interpretación geométrica, veamos lo siguiente:

2.6. Forma polar y notación exponencial

Dado un punto (x, y) del plano, podemos asignarle $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ = la distancia al origen, y en caso $r \neq 0$ (o sea $(x, y) \neq (0, 0)$), está determinado el ángulo θ entre el vector y el eje de las x . De esta manera, todo número complejo se puede escribir como

$$x + iy = r \left(\cos(\theta) + i \sin(\theta) \right)$$

El radio y el ángulo de la suma de dos números complejos en términos de los radios y ángulos originales no es tan clara, pero sí hay una clarísima relación para la multiplicación. Si $z = r_1(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ y $w = r_2(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$, entonces

$$\begin{aligned} zw &= r_1 r_2 (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) \\ &= r_1 r_2 (\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + i(\cos \alpha \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \alpha \cos \beta)) \end{aligned}$$

y recordando las fórmulas trigonométricas del seno y coseno de la suma

$$= r_1 r_2 (\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta))$$

Es decir, los radios se multiplican y los ángulos se suman.

A la luz de la fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$, la forma polar se puede escribir también en notación exponencial

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = r e^{i\theta}$$

Y además vemos que la fórmula del producto es la esperada para la exponencial!

$$e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha+i\beta}$$

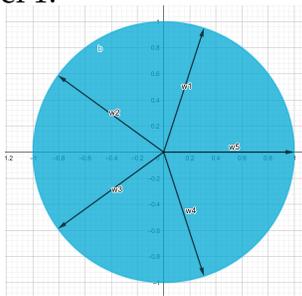
Obtenemos en particular

$$e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i \operatorname{sen}(2\pi) = 1$$

y para todo natural N , y todo $k = 1, \dots, N$

$$\left(e^{\frac{2k\pi}{N}} \right)^N = e^{2k\pi} = 1$$

Es decir, en los complejos, para cada natural N , hay N raíces de la unidad, dispuestas como los vértices de un N -ágono regular inscrito en el círculo de radio 1 con un vértice en el 1.



Ejemplo de raíces quintas de la unidad

3. Las funciones complejas y el análisis: las condiciones de Cauchy-Riemann

Ya que en los complejos se puede sumar, restar, dividir y tomar límite, si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función definida en un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y z es un punto interior en Ω , tiene sentido preguntarse si existe el siguiente límite:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

y en caso que exista, lo llamamos $f'(z) \in \mathbb{C}$.

Como hemos aprendido en funciones de varias variables, los límites en \mathbb{R}^2 son más delicados que los límites en una variable y esta condición (de derivabilidad compleja), de apariencia inocente, tiene consecuencias mucho más rígidas que la versión de funciones reales de una variable.

Observación 3.1. Supongamos que, para cierto z , existe el límite anterior

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} = f'(z) \in \mathbb{C}$$

esta condición es equivalente a que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(z + h) - f(z)}{h} - f'(z) \right| = 0$$

o bien, luego de un poco de manipulación algebraica elemental, a que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(z + h) - f(z) - f'(z)h|}{|h|} = 0$$

Observamos que la fórmula " $f'(z)h$ " es lineal en h . En particular, si f es derivable en z , entonces es diferenciable como función de dos variables a valores en \mathbb{R}^2 , y su diferencial en z está dada por la multiplicación por el número complejo $f'(z)$.

Ejemplo 3.2. $f(z) = z^2$ es derivable en el sentido complejo:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z + h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z^2 + 2zh + h^2 - z^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2zh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2z + h = 2z$$

Recordemos que si vemos a f como función de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , entonces las fórmulas son un poco más oscuras:

$$f(z) = z^2 \quad \longleftrightarrow \quad f(x + iy) = x^2 - y^2 + 2ixy$$

La diferenciabilidad como función real es clara, pero la condición de derivabilidad compleja no lo es tanto.

Sobre las condiciones de Cauchy-Riemann, mostraremos dos maneras de llegar a ellas. Comenzaremos con la tradicional:

3.1. Cauchy-Riemann y las derivadas en los ejes coordenados

Escribamos $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, donde $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ denotan respectivamente la parte real e imaginaria de $f(z)$. Si sabemos que existe el límite

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)$$

entonces deben existir los "límites coordenados"

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta x) - f(z)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - (u(x, y) + iv(x, y))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} = u_x + iv_x = f'(z) \end{aligned}$$

A su vez, también existe el límite con $\Delta z = i\Delta y$ y debe dar lo mismo:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(z + i\Delta y) - f(z)}{i\Delta y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(-i)(f(z + i\Delta y) - f(z))}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(-i)(u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y) - (u(x, y) + iv(x, y)))}{\Delta y} \\ &= -iu_y + v_y = f'(z) \end{aligned}$$

Observando que dos números complejos son iguales si y sólo si lo son tanto sus partes reales como imaginarias, concluimos las famosas condiciones necesarias de Cauchy-Riemann:

$$\boxed{u_x = v_y, \quad v_x = -u_y}$$

Ejemplo 3.3. La función $f(z) = \bar{z} = x - iy$ no es holomorfa, pues

$$u_x = 1 \neq -1 = v_y$$

Ejemplo 3.4. La función $f(z) = |z|^2$ no es holomorfa en ningún punto de \mathbb{C} salvo en $z = 0$.

Dejamos como ejercicio mostrar a partir de las condiciones de Cauchy Riemann que si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ verifica $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{R}$, entonces f holomorfa implica f constante.

Ejemplo 3.5. La función

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$$

es holomorfa en $\mathbb{C} - \{0\}$.

Demostración. La función de $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ en \mathbb{R}^2 dada por

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

claramente es diferenciable cuando $(x, y) \neq (0, 0)$. Dejamos como ejercicio chequear las condiciones de Cauchy-Riemann. Notar que en este ejemplo también se podría haber encarado el cociente incremental de la definición y operar de manera análoga al caso de la derivada real

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{z+h} - \frac{1}{z}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{z - (z+h)}{(z+h)z} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{-h}{(z+h)z} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(z+h)z} = -\frac{1}{z^2}$$

□

3.2. Cauchy-Riemann y la matriz de la multiplicación por un complejo

A su vez, a partir de la observación de diferenciabilidad 3.1, si f es derivable en el sentido complejo entonces es diferenciable en el sentido real con diferencial igual a la multiplicación por el número complejo $f'(z)$. Pero si $f = (u, v) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, la condición de diferenciabilidad es que f sea aproximable por una transformación lineal, que es necesariamente de la forma

$$Df|_z = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Pero sabemos que la transformación lineal en \mathbb{R}^2 dada por una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

proviene de la multiplicación por un número complejo fijo, si y sólo si es de la forma

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$a = d, \quad c = -b$$

Para la matriz $A = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$, las ecuaciones "a = d, c = -b" con exactamente las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

Concluimos la siguiente caracterización:

Proposición 3.6. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $z \in \Omega$ un punto interior, entonces f es derivable en el sentido complejo en z si y sólo si f es diferenciable (en el sentido real) en z y valen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en z .

Definición 3.7. Sea Ω un abierto y f definida en Ω . Decimos que f es holomorfa en Ω si f es derivable en el sentido complejo en z para todo z en Ω . Equivalentemente, f es holomorfa en Ω si f es diferenciable y vale Cauchy-Riemann en Ω .

Ejemplo 3.8. Si definimos

$$\exp(z) := e^x \cos(y) + ie^x \operatorname{sen}(y)$$

entonces es claramente diferenciable, pero además verifica Cauchy-Riemann pues

$$u_x = (e^x \cos y)_x = (e^x \operatorname{sen} y)_y = v_y$$

$$u_y = (e^x \cos y)_y = -e^x \cos y = -u_x$$

por lo tanto es holomorfa. Notamos que en el eje real, coincide con la exponencial real.

Observamos la validez de la siguiente proposición:

Proposición 3.9. 1. Si f y g son holomorfas, entonces $f + g$ también lo es y vale

$$(f + g)' = f' + g'$$

2. Si f y g son holomorfas y componibles, entonces $f \circ g$ también lo es y vale

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$$

3. Si f y g son holomorfas, entonces fg también lo es y vale

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Demostración. Sabemos que la suma, producto y composiciones de diferenciables es diferenciable y que el producto y composición de funciones complejas se escribe en términos de sumas, productos, y composiciones de funciones reales, luego la diferenciable es clara. Debemos chequear las condiciones de Cauchy-Riemann. Para el caso de la suma $f + g$ es obvio. Para el caso de la composición, sabemos que el diferencial de f es la multiplicación por $f'(z)$, que corresponde a una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

y el diferencial de g es la multiplicación por el número complejo $g'(z)$, que a su vez es corresponde a una matriz del tipo

$$\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

Pero la multiplicación de matrices de ese tipo es a su vez una matriz del mismo tipo:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ (ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix}$$

Es decir, podemos calcular las derivadas de la composición y vemos que verifican Cauchy-Riemann.

Finalmente para el producto, podemos repetir la demostración en una variable y ver la derivabilidad por definición:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h)g(z+h) - f(z)g(z)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h)g(z+h) - f(z+h)g(z) + f(z+h)g(z) - f(z)g(z)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h)g(z+h) - f(z+h)g(z)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h)g(z) - f(z)g(z)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} f(z+h) \frac{g(z+h) - g(z)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} g(z) \\
 &= f(z)g'(z) + f'(z)g(z)
 \end{aligned}$$

pues como f y g son holomorfas, existe el límite del cociente incremental, y como f es diferenciable, en particular continua, $f(z+h) \rightarrow f(z)$. \square

3.3. Aplicación abierta e inversa local

Explotando el hecho de que la multiplicación por un número complejo $a + bi$ es la transformación \mathbb{R} -lineal con matriz

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Observamos que $\det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2$.

Si f es una función holomorfa en z_0 , su diferencial $Df|_{z_0}$ es la multiplicación por $f'(z_0)$, y observando la matriz rápidamente notamos que

$$\det(Df|_{z_0}) = |f'(z_0)|^2$$

Concluimos que si $f'(z) \neq 0$ entonces f es localmente inversible, y que su inversa local es a su vez holomorfa, pues es claramente diferenciable y

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

verifica Cauchy-Riemann.

Ejemplo 3.10. La función exponencial

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

es nunca nula, y su derivada verifica $(e^z)' = e^z$, por lo tanto su derivada es nunca nula. Sin embargo no es globalmente biyectiva, pues para todo $z \in \mathbb{C}$ vale

$$e^z = e^{z+2\pi i}$$

Sin embargo, alrededor de cualquier complejo no nulo, que podemos escribir en forma polar

$$z_0 = a + bi = r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) = e^{\ln r}(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) = e^{\ln r + i\alpha}$$

descubrimos su inversa local, que llamamos "logaritmo", que consiste esencialmente en alguna elección de función argumento

$$z_0 \mapsto \ln r + i(\alpha + 2k_0\pi)$$

El problema de definir la función logaritmo complejo es exactamente el mismo problema que definir una función argumento en el plano.

3.4. Interpretaciones y aplicaciones de las ecuaciones de Cauchy-Riemann

3.4.1. Fluídos

Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función de los complejos en los complejos, al pensarla como función de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, al interpretación obvia es la de un campo vectorial. Es decir, a cada punto (x, y) de \mathbb{R}^2 , la función f le asigna $f(x, y)$ que es un vector de \mathbb{R}^2 . Como si tuviéramos un fluido bidimensional estacionario (bidimensional = depende de x y de y pero no de z , estacionario = no depende de t).

Escribiendo como siempre

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + v(x, y)i \leftrightarrow (u(x, y), v(x, y))$$

las ecuaciones de Cauchy-Riemann se pueden escribir como

$$u_x - v_y = 0$$

$$u_y + v_x = 0$$

En primera instancia no surge ninguna interpretación clara, pero si en vez de considerar el campo dado por f consideramos

$$\vec{F}(x, y) := \overline{f}(x + iy) = (u, -v)$$

entonces

$$u_x - v_y = 0 \iff \operatorname{div} \vec{F} = 0$$

$$u_y + v_x = 0 \iff \operatorname{rot} \vec{F} = 0$$

Es decir, si un fluido (diferenciable) bidimensional estacionario es incompresible (luego, por Gauss tiene divergencia cero) e irrotacional (rotor cero) entonces $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$ es tal que

$$f(x, y) = P(x, y) - Q(x, y)i$$

verifica Cauchy-Riemann, y por lo tanto es una función holomorfa.

De esta manera, las funciones holomorfas nos proveen (tomando conjugado) de ejemplos de fluidos bidimensionales estacionarios que (localmente) no rotan.

3.4.2. Funciones armónicas

Una función escalar de dos variables $u(x, y)$ se dice armónica si

$$u_{xx} + u_{yy} \equiv 0$$

De manera elemental, podemos probar lo siguiente:

Proposición 3.11. *Sea Ω un abierto de \mathbb{C} y $f = u + iv : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función de clase C^2 que es holomorfa, entonces u y v son armónicas.*

Demostración.

$$u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y$$

y por Cauchy Riemann

$$= (-v_y)_x + (v_x)_y$$

y por ser C^2 las derivadas cruzadas coinciden y hay cancelación.

Para ver que v es armónica podemos hacer la cuenta análoga, o podemos cambiar $f = u + iv$ por $-if = v - iu$.

□

3.4.3. La compañera armónica

Ante la pregunta de si toda función armónica sucede como parte real (o imaginaria) de una función holomorfa, tenemos la siguiente:

Proposición 3.12. *Sea $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 armónica, entonces existe $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $f(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y)$ es holomorfa. Si v' es otra con las mismas propiedades, entonces difiere de v a lo sumo en una constante.*

Demostración. Primera versión:

Si una tal f holomorfa existiera, por Cauchy-Riemann debería valer

$$v_x = -u_y$$

$$v_y = u_x$$

De la primera condición, podemos despejar

$$v(x, y) = \int_0^x -u_y(t, y)dt + \phi(y)$$

para alguna función de una variable ϕ . Si imponemos la segunda condición, entonces debería valer

$$v_y = \partial_y \left(- \int_0^x u_y(t, y)dt \right) + \phi'(y) = u_x(x, y)$$

Evitaremos la demostración de que podemos intercambiar la integral con la derivada parcial. Consideramos en cambio la ecuación

$$- \int_0^x \partial_y u_y(t, y)dt + \phi'(y) = u_x$$

como u es armónica, tenemos

$$\partial_y u_y(t, y) = u_{yy}(t, y) = -u_{xx}(t, y)$$

luego la ecuación equivale a

$$\int_0^x u_{xx}(t, y)dt + \phi'(y) = u_x$$

y usando la regla de Barrow nos queda equivalente a

$$u_x \Big|_0^x + \phi'(y) = u_x$$

es decir

$$u_x(x, y) - u_x(0, y) + \phi'(y) = u_x$$

o bien

$$\phi'(y) = u_x(0, y)$$

de donde despejamos ϕ (a menos de constante).

Finalmente entonces proponemos

$$v(x, y) := \int_0^x -u_y(t, y)dt + \phi(y)$$

donde

$$\phi(y) = \int_0^y u_x(0, t)dt$$

Segunda versión:

Buscamos v que verifique Cauchy-Riemann, es decir

$$v_x = -u_y$$

$$v_y = u_x$$

Si definimos el campo vectorial en \mathbb{R}^2 dado por

$$\vec{F}(x, y) = (P, Q) = (-u_y, u_x)$$

la pregunta que tenemos es si existe una función $v(x, y)$ tal que

$$\vec{\nabla}v = (v_x, v_y) \stackrel{?}{=} \vec{F}$$

Dado que el dominio es \mathbb{R}^2 , podemos usar el teorema de campos conservativos y tenemos que F es el gradiente de alguien si y sólo si tiene rotor cero. Pero el rotor (en \mathbb{R}^2) consiste en una única componente y es la que aparece en el teorema de Green:

$$\vec{F} = (P, Q) = (-u_y, u_x) \rightsquigarrow -P_y + Q_x = -(-u_y)_y + (u_x)_x = \nabla^2 u \equiv 0$$

pues la hipótesis es que u es armónica. □

Ejemplo 3.13. Si $u(x, y) = x^2 - y^2$, entonces

$$u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0$$

es armónica. La fórmula de la demostración anterior nos da

$$v(x, y) := \int_0^x -u_y(t, y) dt + \phi(y) = \int_0^x 2y dt + \phi(y) = 2xy + \phi(y)$$

donde

$$\phi(y) = \int_0^y u_x(0, t) dt = \int_0^y 0 dt = 0$$

Reconocemos $f(x + iy) = x^2 - y^2 + 2xyi = z^2$

Observación 3.14. La proposición anterior puede generalizarse para $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo. Si Ω no es simplemente conexo, es posible encontrar una compañera armónica en un $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ donde $\tilde{\Omega}$ es simplemente conexo, pero nada nos asegura que podamos tomar $\tilde{\Omega} = \Omega$ en general.

Ejemplo 3.15. Si $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, dejamos como ejercicio ver que es armónica, con dominio $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$, que no es simplemente conexo. De hecho, una compañera armónica es la función argumento, y vemos que $u(x, y) = \operatorname{Re}(\ln(x + iy))$ es la parte real del logaritmo complejo, que no es posible definirla con continuidad en $\mathbb{C} - \{0\}$, pero sí es posible definirla en un $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{C} - \{0\}$ que sea simplemente conexo.

3.4.4. Familias de curvas ortogonales

Comencemos con el ejemplo:

$$f(z) = z^2$$

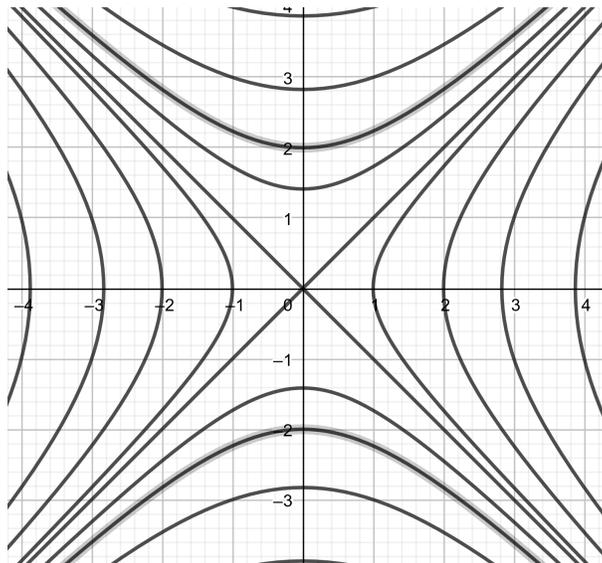
o mejor aún

$$f(x + iy) = x^2 - y^2 + 2xyi$$

Si observamos las curvas de nivel de "u":

$$x^2 - y^2 = c$$

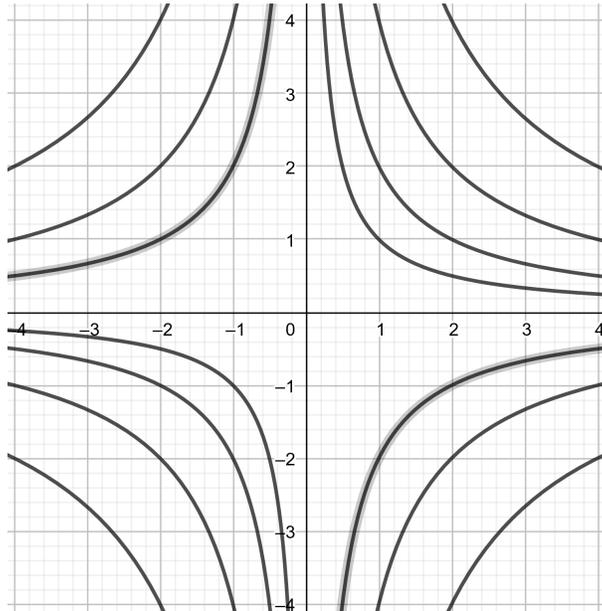
obtendremos hipérbolas



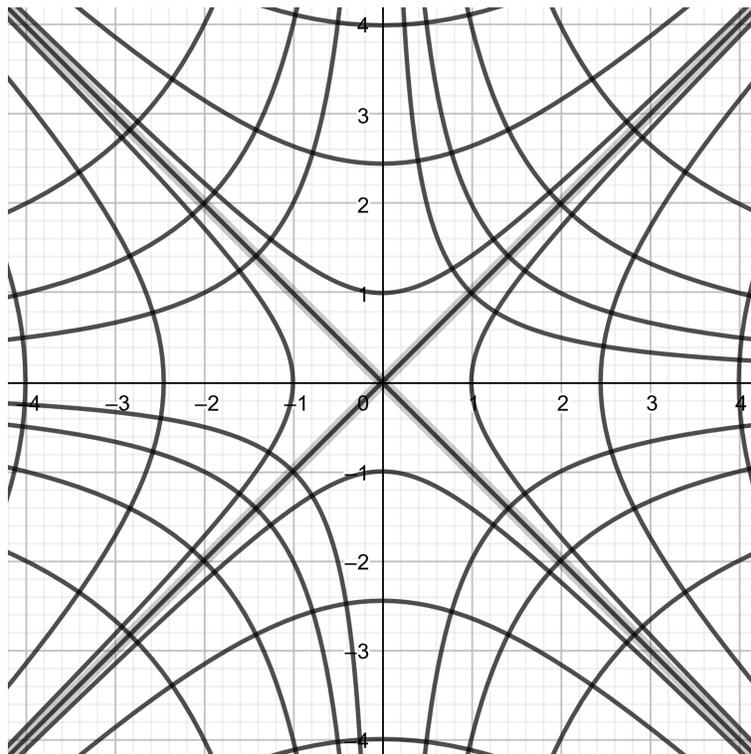
Si vemos las curvas de nivel de "v":

$$xy = c$$

también tendremos hipérbolas, pero giradas:



Y si las graficamos simultáneamente, podemos observar que las curvas se cortan *perpendicularmente*:



Este fenómeno es general:

Proposición 3.16. Sea $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$ una función holomorfa no constante, entonces las curvas de nivel de u y las curvas de nivel de v son familias de curvas mutuamente perpendiculares.

Demostración. Si $z_0 = x_0 + iy_0$ es un punto del dominio de f , la curva de nivel de u que pasa por z_0 es la de la ecuación

$$u(x, y) = u(x_0, y_0)$$

La recta tangente a la curva en ese punto es perpendicular al gradiente de u . Similares consideraciones para v . Para ver que las curvas se cruzan perpendicularmente basta ver que $\nabla u|_{z_0} \perp \nabla v|_{z_0}$. Calculamos

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle = \langle (u_x, u_y), (v_x, v_y) \rangle = u_x v_x + u_y v_y$$

y usando Cauchy-Riemann

$$= (-v_y)v_x + (v_x)v_y = 0$$

□

Observación 3.17. ∇u es perpendicular a las curvas de nivel de u . Por lo tanto, las curvas de nivel de v tienen el mismo dibujo que las líneas de flujo del campo ∇u . Y viceversa.

3.4.5. Transformaciones conformes

El hecho de que la multiplicación por un número complejo fijo $z_0 = a + bi = re^{i\alpha}$

$$x + iy \mapsto z_0(x + iy) = re^{i\alpha}(x + iy)$$

consista en la homotecia real con factor de expansión r compuesta con la rotación de ángulo α tiene la siguiente consecuencia geométrica a nivel de las funciones holomorfas:

Proposición 3.18. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, $p \in \Omega$ y supongamos que $f'(p) \neq 0$. Entonces f preserva los ángulos entre las curvas que pasan por p . Más precisamente, si $\sigma, \tau : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Omega$ son dos curvas suaves con

$$\sigma(0) = p = \tau(0)$$

y $\sigma'(0) = v \neq 0 \neq w = \tau'(0)$, entonces considerando las curvas $\tilde{\sigma}(t) = f(\sigma(t))$ y $\tilde{\tau}(t) = f(\tau(t))$ y los vectores

$$\tilde{v} = (f \circ \sigma)'(0) = (Df)|_p(v)$$

$$\tilde{w} = (f \circ \tau)'(0) = (Df)|_p(w)$$

vale la igualdad

$$\frac{1}{\|v\| \|w\|} \langle v, w \rangle = \frac{1}{\|\tilde{v}\| \|\tilde{w}\|} \langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle$$

Es decir, el ángulo entre v y w coincide con el ángulo entre \tilde{v} y \tilde{w} .

Las aplicaciones que preservan ángulos se denominan **conformes**.

Demostración. Por ser f holomorfa, $(Df)(v) = f'(p)v$. Es decir, la matriz del diferencial de f vista como endomorfismo de \mathbb{R}^2 coincide con la aplicación "multiplicar por el número complejo $f'(p)$, que es de la forma $re^{i\alpha}$. Esta aplicación es la composición de multiplicar por el número real r (que claramente preserva ángulos) seguida de la rotación por el ángulo α , que es una isometría, y en particular preserva ángulos también. \square

4. Sucesiones y series: criterios

4.1. Series de potencias, radio de convergencia

En el contexto de análisis complejo, la motivación principal en el estudio de series está dada por el rol de las series de Taylor. Comenzamos por una definición: Dada una sucesión $\{a_n\}_{n \geq 0}$ de números complejos, que llamaremos los coeficientes n -ésimos, podemos considerar la serie de potencias

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

o incluso para un dado $\lambda \in \mathbb{C}$, podemos considerar la serie de potencias centrada en z_0

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - \lambda)^n$$

Claramente ante un cambio de variables $w = z - \lambda$, el estudio de la zona de convergencia de una de ellas se corresponde con la otra, por lo que nos concentraremos en las series centradas en 0.

Antes de avanzar sobre las series de potencias, mencionamos los resultados básicos para series complejas que son muy similares a las series reales.

Definición 4.1. Dada una sucesión $\{a_n\}$ de números complejos, diremos que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

converge si $\exists \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N a_n \right)$. Diremos que **converge absolutamente** si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge (como serie real).

Observación 4.2. Si una serie compleja converge absolutamente, entonces converge.

Para demostrar este hecho, es cómodo recordar la noción de *sucesión de Cauchy*, que (tanto en el caso real como complejo) describe a las sucesiones convergentes sin necesidad de mencionar su límite.

Definición 4.3. Una sucesión s_n de números (reales o complejos) se dice de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \text{ tal que } |s_n - s_m| < \epsilon, \text{ si } n, m \geq n_0$$

Un resultado conocido es que en el caso de sucesiones de números reales, o de vectores en \mathbb{R}^n (en particular de números complejos), una sucesión es de Cauchy si y sólo si es convergente.

Demostración (de la Observación 4.2). Si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ es convergente, entonces la sucesión

$$\tilde{s}_N = \sum_{n=0}^N |a_n|$$

es de Cauchy. Para ver que la sucesión de sumas parciales (sin el módulo) sea convergente, basta ver que

$$s_N = \sum_{n=0}^N a_n$$

es de Cauchy. Pero si calculamos $|s_N - s_M|$, suponiendo $N \geq M$, tendremos

$$|s_N - s_M| = \left| \sum_{n=0}^N a_n - \sum_{n=0}^M a_n \right| = \left| \sum_{n=M+1}^N a_n \right| \leq \sum_{n=M+1}^N |a_n| = |\tilde{s}_N - \tilde{s}_M|$$

Concluimos entonces que \tilde{s}_N de Cauchy implica trivialmente que s_N es de Cauchy. \square

Al igual que con las series reales, la convergencia absoluta es una condición más fuerte que la convergencia a secas, pero en muchísimos casos es muy fácil mostrar la convergencia a partir de la convergencia absoluta.

Ejemplo 4.4. La serie geométrica: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge (absolutamente) para z tal que $|z| < 1$.

Demostración. En efecto, si una serie converge entonces su término n -ésimo tiene que tender a cero (como condición necesaria). Si $|z| > 1$, $|z|^n$ no tiende a cero, entonces la serie no puede converger. A su vez, usando la fórmula (para $z \neq 1$)

$$\sum_{n=0}^N z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$$

vemos que si $|z| < 1$ entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N z^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}$$

es convergente. Esta convergencia es absoluta pues similar fórmula vale para el módulo, si $|z| < 1$ tenemos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N |z^n| = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N |z|^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - |z|^{N+1}}{1 - |z|} = \frac{1}{1 - |z|}$$

\square

Ejemplo 4.5. Sea $x \in \mathbb{R}$, sabemos que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

es convergente (y converge a e^x). En particular, si x es positivo es una serie de números positivos y sabemos que tenemos (siempre) convergencia absoluta. Si ahora z es un número complejo y observamos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

al estudiar su convergencia absoluta vemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|}$$

Escribiendo $x = |z| \in \mathbb{R}$, esta serie es convergente, luego la serie de la exponencial compleja es absolutamente convergente, y en particular, convergente.

Volviendo a las series de potencias, tenemos el siguiente resultado de convergencia que motiva la noción de radio de convergencia:

Lema 4.6. *Dada una serie*

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

si $z_0 \in \mathbb{C}$ es tal que la serie converge al ser evaluada en z_0 , entonces $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolutamente para todo z con $|z| < |z_0|$.

Demostración. Sea z tal que $|z| < |z_0|$, donde sabemos que $\sum_n a_n z_0^n$ converge. En particular el término general de la serie $a_n z_0^n$ tiende a cero, y en particular existe una cota M global:

$$|a_n z_0^n| \leq M \quad \forall n$$

Por otra parte,

$$\sum_{n \geq 0} |a_n z^n| = \sum_{n \geq 0} |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq M \sum_{n \geq 0} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$$

y esta última serie converge pues $|z/z_0| < 1$. □

Notar que si para z_0 la serie no converge (o converge condicionalmente) entonces la serie no puede converger para ningún z de módulo mayor a z_0 , pues si para algún z_1 la serie converge, el lema anterior implicaría que la serie convergería absolutamente para z_0 .

Como consecuencia, las regiones de convergencia de las series de potencia son siempre un disco de cierto radio (que podría ser infinito, o incluso cero), y en el interior del disco siempre hay convergencia absoluta. Por otra parte, los ejemplos muestran que en el borde no es posible hacer ninguna afirmación en general, pues podría haber (o no) puntos donde converge absolutamente, puntos donde converge condicionalmente (es decir, converge pero no absolutamente), o puntos donde no converge.

Definición 4.7. El radio de convergencia de una serie se define como el supremo de los $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tales que $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$ es convergente.

4.2. Sobre el criterio de la raíz y el criterio del cociente

Teorema 4.8 (Criterio de Cauchy de la raíz). Consideremos una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y supongamos que

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$$

si $\ell < 1 \implies$ la serie converge absolutamente,

si $\ell > 1 \implies$ la serie converge diverge.

Observación 4.9. En caso de tener la serie geométrica $\sum_{n \geq 0} r^n$, la raíz n -ésima nos da justamente (el módulo de) la razón de la geométrica, es decir $|r|$. Pero el criterio lo podemos usar para un caso en que sospechemos que, si bien no es una geométrica, su término general se parezca asintóticamente a una geométrica.

Ejemplo 4.10. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n + 1}$ converge para $|z| < 2$.

En efecto, aplicamos el criterio y vemos que

$$\sqrt[n]{\left| \frac{z^n}{2^n + 1} \right|} = \frac{|z|}{\sqrt[n]{2^n + 1}} \rightarrow \frac{|z|}{2} = \ell$$

El criterio nos dice que si $\ell < 1$ tenemos convergencia, si $\ell > 1$ la serie diverge, y eso es exactamente ver si $|z| < 2$, o $|z| > 2$ respectivamente.

Demostración del Criterio de la raíz. Primero, si $\ell > 1$, es claro que no vale $|a_n| \rightarrow 0$ (de hecho, debe tender a infinito), así que es claro que en ese caso diverge.

Supongamos $\ell < 1$, de forma que $1 - \ell > 0$. Tomamos $\epsilon > 0$ de forma tal que $\ell + \epsilon < 1$ (por ejemplo $\epsilon = \frac{1-\ell}{2}$). Como $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ y $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que

$$\left| \sqrt[n]{|a_n|} - \ell \right| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

O bien

$$\ell - \epsilon < \sqrt[n]{|a_n|} < \ell + \epsilon = r < 1$$

En particular, elevando a la n una de las desigualdades obtenemos que $\forall n \geq n_0$ vale

$$|a_n| < (\ell + \epsilon)^n = r^n$$

En consecuencia,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| + \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| < \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| + \sum_{n=n_0}^{\infty} r^n < \infty$$

y la serie converge absolutamente. □

Ejemplo 4.11. Si $a_n = 1 \forall n$, su raíz n -ésima es 1, y claramente $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge. Otro ejemplo menos trivial es $b_n = \frac{1}{n}$, también vale que su raíz n -ésima tiende a uno (lo veremos luego: Ejemplo 4.21), y es conocido que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (criterio de la integral). A su vez, si $c_n = \frac{1}{n^2}$, tenemos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (por ejemplo por el criterio de la integral) y la raíz n -ésima también tiende a uno. Por lo tanto, cuando la raíz n -ésima tiende a 1, esa única información no es suficiente para determinar la convergencia o no de la serie.

Un problema técnico que puede tener este criterio es que quizás la sucesión de raíces n -ésimas podría no existir.

Ejemplo 4.12. Consideremos la serie $\sum_{n \geq 0} a_n$ con $a_n = 0$ si n es impar, y $a_{2k} = r^{2k}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k}$$

Si definimos $b_k := a_{2k} = r^{2k}$, entonces

$$\sum_{n \geq 0} a_n = \sum_{k \geq 0} a_{2k} = \sum_{n \geq 0} b_n$$

y además

$$|b|^{1/k} = |r|^2$$

Concluimos que esta serie converge (absolutamente) para $|r^2| < 1$. Sin embargo, si tomamos

$$|a_n|^{1/n} = \begin{cases} (r^{2k})^{1/2k} = r & \text{si } n = 2k \\ (0)^{1/n} = 0 & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases}$$

Aquí el criterio de la raíz funciona para b_n pero "falla" para a_n porque la raíz n -ésima de a_n oscila entre 0 y r , en particular no existe su límite.

Con el ejemplo anterior vemos que el criterio de la raíz podría fallar (en el sentido de que no existe el límite) pero por motivos mas bien artificiales. Este problema técnico se puede subsanar fácilmente considerando lo que se llama "límite superior", y se denota $\overline{\lim}$. La ventaja es que el límite superior de una sucesión (no negativa real) acotada siempre existe, y el criterio dado anteriormente sigue siendo válido cambiando límite por límite superior. En la práctica, la mayoría de los ejemplos pueden manipularse un poco a mano para luego calcular el límite en el sentido usual, por lo que muchas veces no resulta necesario trabajar directamente con el límite superior. De todas formas, para satisfacer la curiosidad, recordamos la definición de límite superior

Definición 4.13. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada de números reales. Se asocian dos sucesiones a ella:

$$i_n := \inf\{x_k : k \geq n\}$$

$$s_n := \sup\{x_k : k \geq n\}$$

Notamos que tanto i_n como s_n son acotadas, pero también i_n es una sucesión monótona creciente, mientras que s_n es monótona decreciente. En consecuencia ambas tienen límite, se definen los límites superiores e inferiores como

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} i_n$$

Observación 4.14. Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada de números reales, entonces siempre vale $i_n \leq s_n$ y por lo tanto siempre vale la desigualdad

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Además, la sucesión tiene límite (en el sentido usual, si y sólo si vale la igualdad).

Ejemplo 4.15. La sucesión $x_n = (-1)^n$ no tiene límite pero es acotada, luego, sí tiene límite superior e inferior:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1$$

Teorema 4.16 (Criterio de Cauchy de la raíz, versión general). *Consideremos una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y sea*

$$\ell := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

si $\ell < 1 \implies$ la serie converge absolutamente,
 si $\ell > 1 \implies$ la serie converge diverge.

Si $\ell = 1$ el criterio no decide.

4.2.1. Cálculo de radio de convergencia con el criterio de la raíz

El criterio de la raíz es muy cómodo para calcular radios de convergencia de series de potencias. En efecto, si tenemos una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

entonces el criterio de la raíz nos dice que podemos calcular

$$\sqrt[n]{|a_n z^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} |z|$$

y dependiendo de si este límite (o límite superior) da menor o mayor que 1 sabremos si converge o diverge. Pero claramente

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} |z| \right) = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right) |z|$$

por lo que concluimos que el radio de convergencia es

$$R = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$$

Donde convenimos en llamar radio de convergencia infinito si el límite de la raíz n -ésima es cero.

4.2.2. El criterio del cociente

Un criterio pariente al anterior es el criterio del cociente:

Teorema 4.17 (Criterio de D'Alembert del cociente). *Consideremos una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y supongamos que*

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell$$

si $\ell < 1 \implies$ *la serie converge absolutamente,*

si $\ell > 1 \implies$ *la serie converge diverge.*

Este criterio, a diferencia del de la raíz, no tiene forma de corregirse técnicamente cuando el límite del cociente no existe.

Sin embargo, enunciamos y demostraremos el siguiente resultado de comparación:

Proposición 4.18. *Si el límite del cociente existe, entonces el límite de la raíz también, y coinciden.*

Demostración. Llamemos

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

Sea $\epsilon > 0$, sabemos que existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ vale

$$L - \epsilon < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < L + \epsilon$$

Por comodidad supondremos que $L > 0$ y ϵ es tal que $L - \epsilon > 0$. Dejamos como ejercicio hacer la demostración (más fácil!) para el caso $L = 0$.

Supongamos ahora $n > n_0$, escribamos $n = n_0 + k$ y calculamos ahora

$$|a_{n_0+k}| = \frac{|a_{n_0+k}|}{|a_{n_0+k-1}|} |a_{n_0+k-1}| = \frac{|a_{n_0+k}|}{|a_{n_0+k-1}|} \frac{|a_{n_0+k-1}|}{|a_{n_0+k-2}|} |a_{n_0+k-2}| = \dots$$

$$= \frac{|a_{n_0+k}|}{|a_{n_0+k-1}|} \frac{|a_{n_0+k-1}|}{|a_{n_0+k-2}|} \dots \frac{|a_{n_0+2}|}{|a_{n_0+1}|} \frac{|a_{n_0+1}|}{|a_{n_0}|} |a_{n_0}|$$

Concluimos

$$(L - \epsilon)^k |a_{n_0}| \leq |a_{n_0+k}| \leq (L + \epsilon)^k |a_{n_0}|$$

o bien

$$(L - \epsilon)^{n_0+k} c_1 \leq |a_{n_0+k}| \leq (L + \epsilon)^{n_0+k} c_2$$

donde c_1 y c_2 son las constantes positivas

$$c_1 = \frac{|a_{n_0}|}{(L - \epsilon)^{n_0}}, \quad c_2 = \frac{|a_{n_0}|}{(L + \epsilon)^{n_0}}$$

En otras palabras, volviendo a llamar $n = n_0 + k$ tenemos que, para todo $n \geq n_0$, existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que

$$c_1(L - \epsilon)^n \leq |a_n| \leq c_2(L + \epsilon)^n$$

Tomando raíces n -ésimas

$$\sqrt[n]{c_1}(L - \epsilon) \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{c_2}(L + \epsilon)$$

Como para cualquier constante positiva c sabemos que

$$\sqrt[n]{c} = e^{\frac{1}{n} \ln c} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^0 = 1$$

y por lo tanto

$$L - \epsilon \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq L + \epsilon$$

Como ϵ es arbitrario, concluimos que

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

□

Finalizamos con algunos ejemplos de radio de convergencia:

Ejemplo 4.19. Como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge para todo z , su radio de convergencia es infinito.

Demostración. Si usamos el criterio del cociente, con $a_n z^n$,

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

luego el radio de convergencia es infinito. Notar que en este caso, es mucho más cómodo el criterio del cociente que el de la raíz. □

Ejemplo 4.20. Dejamos como ejercicio ver que $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$ no converge para ningún z salvo $z = 0$. El radio de convergencia en este caso es 0.

Ejemplo 4.21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Demostración. Usamos la proposición anterior con $a_n = n$, luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

Como este límite existe, concluimos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

□

Como corolario tenemos la siguiente propiedad

Proposición 4.22. Si tenemos una serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con radio de convergencia R , entonces la serie "derivada" $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ tiene el mismo radio de convergencia.

Demostración. Por comodidad consideremos

$$zg(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$$

Vemos que $g(z)$ converge si y sólo si $zg(z)$ converge. Veamos que $zg(z)$ tiene el mismo radio de convergencia que f . Si utilizamos el criterio de la raíz n -ésima,

$$\sqrt[n]{|n a_n|} = \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|}$$

y como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, da lo mismo el cálculo de radio para $f(z)$ que para $zg(z)$. □

Sobre radio de convergencia y singularidades

Veamos primero que la serie de Taylor alrededor del 0 de $\frac{1}{1+x^2}$ tiene radio de convergencia 1. En efecto, como la igualdad

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

tiene sentido para $|t| < 1$ y la serie del lado derecho de la igualdad converge exactamente para $|t| < 1$. Si $t = -z^2$, tenemos que

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - \dots$$

tiene sentido para $| -z^2 | < 1$ y la serie a la derecha converge exactamente para $| -z^2 | < 1$, o equivalentemente $|z| < 1$.

Si consideramos la función de variable *real* $\phi(x) = \frac{1}{1+x^2}$, como el denominador no se anula nunca en los reales, esta función es infinitamente derivable como función de \mathbb{R} en \mathbb{R} , desde este punto de vista no hay razones para sospechar que su serie de Taylor vaya a tener problemas. Si n embargo, cuando pensamos en la función de variable compleja

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

vemos que el denominador se anula en $z = \pm 1$, por lo tanto comprendemos que su serie de Taylor alrededor del cero no puede tener radio de convergencia mayor que 1, pues si no, podríamos evaluarla perfectamente tanto i como en $-i$.

4.3. Convergencia en el borde

El radio de convergencia distingue rápidamente dos regiones, el interior del disco donde converge absolutamente y el exterior del disco donde no converge. Para estudiar la convergencia en el borde no hay un método general, pero hay un criterio de convergencia (no necesariamente absoluta) que es muy útil en los ejemplos. Recordamos primero un caso típico de criterio de convergencia (no necesariamente absoluta) para series reales.

4.3.1. Criterio Leibniz

Teorema 4.23 (Criterio de Leibniz). *Si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de números positivos que tiende a cero, entonces su suma alternada converge:*

$$a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad a_n \searrow 0 \quad \implies \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ converge}$$

La notación $a_n \searrow 0$ significa

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

El ejemplo paradigmático es la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

que converge (gracias al criterio) aún cuando la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, por ejemplo a partir del criterio de comparación con la integral

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sim \int_1^N \frac{1}{x} dx = \ln(N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty$$

Demostraremos una generalización del criterio de Leibniz al caso complejo.

4.3.2. Criterio Abel/Dirichlet

Teorema 4.24 (Criterio de Abel para el círculo, Criterio de Dirichlet en general).

$$\left. \begin{array}{l} a_n \in \mathbb{R} \forall n, \quad (n \gg 0) \quad a_n \searrow 0 \\ z_n \in \mathbb{C} \forall n, \quad \exists M : \left| \sum_{n=0}^N z_n \right| \leq M, \forall N \end{array} \right\} \implies \sum_n a_n z_n \text{ converge}$$

Ejemplo 4.25. Si $z_n = (-1)^n$, entonces

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots \pm 1$$

es igual a cero o 1, según la paridad de N , en particular

$$\left| \sum_{n=0}^N (-1)^n \right| \leq 1, \forall N$$

Por lo tanto podemos ver al Criterio de Leibniz como un caso particular del de Dirichlet.

Ejemplo 4.26 (Test de Abel). Si $z = e^{i\theta} \neq 1$, entonces

$$\left| \sum_{n=0}^N z^n \right| = \left| \frac{1 - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}$$

que permanece acotado cuando N varía. Por lo tanto, este criterio puede ser utilizado para análisis de convergencia de una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{in\theta} a_n$$

generalizando las sumas alternadas del Criterio de Leibniz.

Para demostrar el criterio de Dirichlet, es muy cómodo contar con una fórmula análoga a la integración por partes, que se entiende muy bien pensando a una sumatoria como la versión discreta de la integral.

4.3.3. Disgresión: La derivada discreta y \sum como integral discreta

Dada una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de números, si la pensamos como una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (o de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$) donde $f(n) = a_n$, podemos definir su *derivada discreta* "ddf" como un cociente incremental, aunque sin la opción de poder tomar límite, ya que en los enteros, el valor más cercano a n es $n + 1$:

$$ddf(n) := \frac{f(n+1) - f(n)}{1} = a_{n+1} - a_n$$

O incluso se podría definir la derivada discreta por izquierda como $a_n - a_{n-1}$, que claramente no tiene porqué coincidir con la derivada discreta "a derecha".

De manera elemental, el principio de las sumas telescópicas lo podemos ver como la versión discreta del teorema fundamental, en vez de

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

tenemos:

Observación 4.27. "Teorema Fundamental" del cálculo discreto. Si $m_0 \leq N$, entonces

$$\sum_{k=m_0}^N (a_{k+1} - a_k) = a_{N+1} - a_{m_0}$$

Como aplicación tenemos una manera de encarar fórmulas de sumatorias:

Ejemplo 4.28. La famosa fórmula de suma de Gauss

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Para demostrar esta fórmula existen diversos argumentos, veamos el punto de vista de derivada e integral discreta. Busquemos una primitiva discreta de $f(n) = n$.

Si tomamos su versión continua $\frac{n^2}{2}$ vemos que no funciona pues

$$dd(n^2/2) = \frac{(n+1)^2}{2} - \frac{n^2}{2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{2} = \frac{2n+1}{2} = n + \frac{1}{2}$$

Sin embargo, estamos cerca, obtenemos n pero también obtenemos $\frac{1}{2}$. Fácilmente vemos que la derivada discreta de $\frac{n}{2}$ es $\frac{1}{2}$ pues

$$\frac{n+1}{2} - \frac{n}{2} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, si definimos

$$f(n) := \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

tendremos que su derivada discreta es

$$f(n+1) - f(n) = n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = n$$

y por lo tanto

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n (f(k+1) - f(k)) = f(n+1) - f(1) = \frac{(n+1)n}{2} - \frac{1(1-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ejemplo 4.29. Si sumamos los primeros números impares vemos el siguiente fenómeno:

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2$$

Será que siempre da un cuadrado perfecto?

A la luz de la derivada discreta, al considerar $f(n) = n^2$, vemos que su derivada discreta es

$$(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

Observamos que $2k + 1$, con $k = 0, 1, 2, \dots$ es la forma genérica de un número impar. Al sumar (integrar discretamente) los números impares obtenemos

$$\sum_{k=0}^n (2k + 1) = \sum_{k=0}^n ((k + 1)^2 - k^2) = (n + 1)^2 - 0^2 = (n + 1)^2$$

Fórmula de sumas por partes

Una consecuencia del "teorema fundamental discreto" es:

Corollario 4.30 (Partes). Supongamos $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ son dos sucesiones, entonces, para cada $m < n$ tenemos

$$\sum_{k=m}^n f_k(g_{k+1} - g_k) = (f_{n+1}g_{n+1} - f_m g_m) - \sum_{k=m}^n g_{k+1}(f_{k+1} - f_k).$$

Demostración. Al igual que la fórmula de integración por partes, calculamos la derivada (discreta) del producto:

$$\begin{aligned} f_{k+1}g_{k+1} - f_k g_k &= f_{k+1}g_{k+1} - f_{k+1}g_k + f_{k+1}g_k - f_k g_k \\ &= f_{k+1}(g_{k+1} - g_k) + (f_{k+1} - f_k)g_k \end{aligned}$$

Si sumamos,

$$\sum_{k=m}^n (f_{k+1}g_{k+1} - f_k g_k) = \sum_{k=m}^n f_{k+1}(g_{k+1} - g_k) + \sum_{k=m}^n (f_{k+1} - f_k)g_k$$

Del lado izquierdo usamos el "teorema fundamental" y luego pasamos de término una de las sumatorias. □

4.3.4. Demostración del Criterio de Dirichlet.

Consideremos

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k z_k$$

Vamos a utilizar la fórmula de sumas por partes para transformar el problema. Para eso, necesitamos ver uno de los productos como una derivada. Definimos entonces

$$B_n = \sum_{k=1}^{n-1} z_k$$

Observamos que

$$B_{n+1} - B_n = (z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1} + z_n) - (z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1}) = z_n$$

Es decir, B_k es la primitiva discreta de z_k . Usando la fórmula de "suma por partes"

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k z_k = \sum_{k=1}^n a_k (B_{k+1} - B_k) \\ &= a_{n+1} B_{n+1} - a_1 B_1 - \sum_{k=1}^n B_k (a_k - a_{k+1}) \end{aligned}$$

El primer término tiende a cero (B_n acotado y a_n tiende a cero), el segundo es constante, y la sumatoria converge absolutamente. En efecto, como a_n es decreciente, $(a_k - a_{k+1}) \geq 0$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |B_k (a_k - a_{k+1})| &= \sum_{k=1}^n |B_k| (a_k - a_{k+1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^n M (a_k - a_{k+1}) = M (a_1 - a_{n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M a_1 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.31. El caso de la convergencia no absoluta de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ se generaliza a todo el círculo unitario:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

converge para todo z en el círculo unitario SALVO $z = 1$.

En efecto: para utilizar el criterio observamos que si $z \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

y ésta expresión está acotada si $|z| = 1$.

5. Sucesiones de funciones

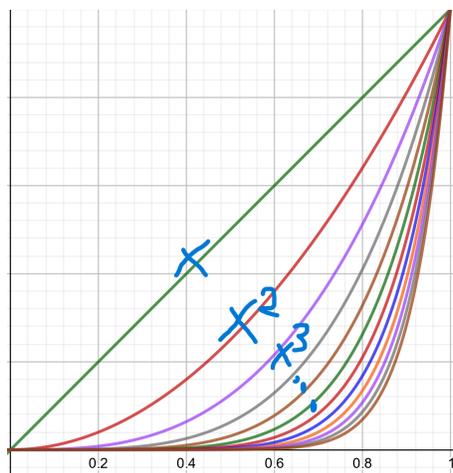
5.1. Convergencia puntual y convergencia uniforme

El objetivo es el de obtener ejemplos de funciones holomorfas por aproximación. Como sumas y productos de holomorfas es holomorfa, está claro que los polinomios son holomorfos. Nos preguntamos cuándo una serie (en su zona de convergencia) define una función holomorfa. Para esto necesitaremos resultados técnicos de convergencia, luego mostraremos que toda función dada por una serie es holomorfa en el interior del disco dado por su radio de convergencia. Comenzamos con una definición elemental de convergencia en espacios de funciones.

Definición 5.1. Sea X un conjunto y $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ una familia de funciones. Diremos que $f_n \rightarrow f$ **puntualmente** si, para todo $x \in X$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$.

Ejemplo 5.2. Si $X = [0, 1]$ y $f_n(x) = x^n$, entonces f_n converge puntualmente a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$



Observamos que para cada n , $f_n(x) = x^n$ es continua (de hecho, infinitamente derivable), pero la función límite no es continua, pega un salto en $x = 1$. La convergencia puntual no preserva la propiedad de "ser continua" con el pasaje al límite. La convergencia uniforme es una noción más restrictiva de convergencia pero que no tiene este inconveniente.

Definición 5.3. Sean $\{f_n : X \rightarrow \mathbb{C}\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, decimos que la sucesión f_n **converge uniformemente** a f y denotamos $f_n \xrightarrow{u} f$ si, para todo $\epsilon > 0$, existe n_0 con

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in X$$

Como definición emparentada tenemos:

Definición 5.4. Dadas $\{f_n : X \rightarrow \mathbb{C}\}_{n \in \mathbb{N}}$, decimos que la sucesión es **uniformemente de Cauchy** si, para todo $\epsilon > 0$, existe n_0 con

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \quad \forall n, m \geq 0, \forall x \in X$$

O equivalentemente, si para todo $\epsilon > 0$, existe n_0 con

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \quad \forall n, m \geq 0,$$

Observación 5.5. Si $\{f_n\}$ es una sucesión uniformemente de Cauchy, entonces para cada x , $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy de números y por lo tanto existe $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Por esta razón, si una sucesión es uniformemente de Cauchy, siempre existe una "función límite" asociada.

Teorema 5.6. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^d$ (por ejemplo $X = [a, b]$, o $X = \Omega \subseteq \mathbb{C}$), si $f_n \xrightarrow{u} f$ y todas las f_n son continuas, entonces f es necesariamente continua.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, consideramos $\epsilon' = \epsilon/3$. Tomamos n_0 tal que para todo x valga

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| < \epsilon/3$$

Fijemos $x_1 \in X$. Como f_{n_0} es continua en x_1 , existe $\delta > 0$ tal que vale la implicación

$$x_2 \in X, |x_1 - x_2| < \delta \implies |f_{n_0}(x_1) - f_{n_0}(x_2)| < \epsilon/3$$

Ahora queremos comparar $f(x_1)$ con $f(x_2)$, y para eso nos servimos de f_{n_0} que está cerca de f "en todos lados"; tenemos

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \\ &= |f(x_1) - f_{n_0}(x_1) + f_{n_0}(x_1) - f_{n_0}(x_2) + f_{n_0}(x_2) - f(x_2)| \\ &\leq \underbrace{|f(x_1) - f_{n_0}(x_1)|}_{< \epsilon/3 \quad \forall x_1} + \underbrace{|f_{n_0}(x_1) - f_{n_0}(x_2)|}_{< \epsilon/3} + \underbrace{|f_{n_0}(x_2) - f(x_2)|}_{< \epsilon/3 \quad \forall x_2} < \epsilon \end{aligned}$$

□

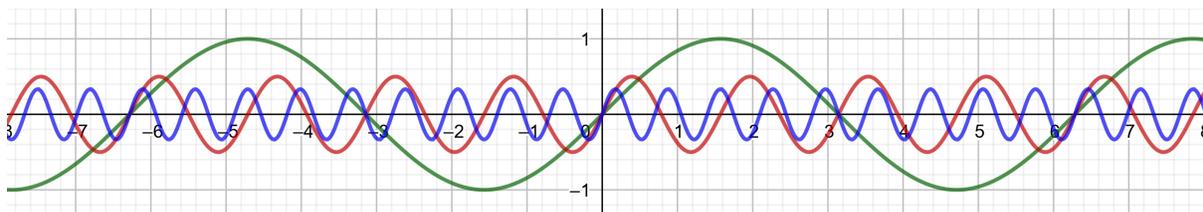
Con la convergencia uniforme la continuidad se preserva, pero la derivabilidad es otro tema. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.7. Consideremos la sucesión de funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} dadas por

$$f_n(x) = \frac{\text{sen}(n^2 x)}{n}$$

Claramente $|f_n(x)| \leq 1/n$ independientemente de x , luego f_n converge uniformemente a la función nula, que es trivialmente derivable y con derivada cero.

Vemos el gráfico de $f_1 = \text{sen}(x)$, $f_2 = \frac{1}{2} \text{sen}(4x)$, $f_3 = \frac{1}{3} \text{sen}(9x)$:



Sin embargo, por más que cada f_n es derivable, la sucesión de las derivadas dista de ser una sucesión de funciones que tenga límite:

$$f'_n(x) = n \cos(n^2x)$$

por ejemplo para $x = 0$ diverge puntualmente. En este caso tenemos que para todo x sabemos que $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ (donde $f(x) = 0$) y claramente existe $f'(x)$ (y es igual a cero). Sin embargo, por mas que existe f'_n para todo n , $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.

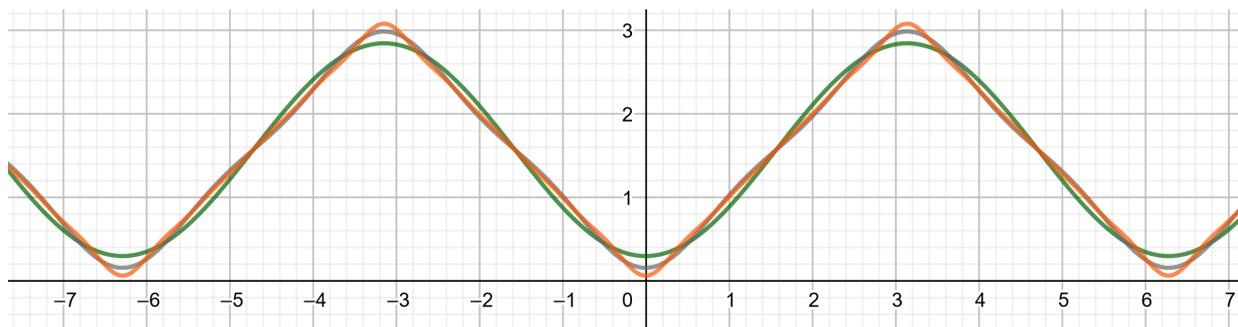
Un ejemplo menos trivial (proveniente de la teoría de series de Fourier) es el siguiente:

Ejemplo 5.8. Consideremos la siguiente sucesión de funciones

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos(x) \\ f_2(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} \right) \\ f_3(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \frac{\cos(5x)}{25} \right) \\ f_4(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \frac{\cos(5x)}{25} + \frac{\cos(7x)}{49} \right) \\ &\vdots \\ f_n(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} \end{aligned}$$

Claramente f_n es 2π -periódica, y se puede ver que $f_n(x)$ converge uniformemente a $|x|$ en $[-\pi, \pi]$ (y converge uniformemente en todo \mathbb{R} a la función $|x|$ esxtendida 2π -periódicamente a partir de sus valores en $[-\pi, \pi]$).

Aquí vemos el gráfico de $f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_5(x)$:



Vemos que cada f_n es derivable, tiene límite uniforme continuo pero no derivable.

Sin embargo, si tenemos una sucesión de funciones f_n en donde todas las f_n son derivables, en caso de que la sucesión de funciones derivadas f'_n sea una "buena sucesión", tendremos el control de la derivada del límite, como veremos a continuación.

5.2. Convergencia uniforme de las derivadas: caso real

Una motivación del análisis para definir integral compleja

Enunciamos y demostraremos esta versión de buen comportamiento de la convergencia uniforme y la derivada. Una demostración relativamente sencilla de este teorema se realiza utilizando integración (y su relación con la derivada). En principio no tenemos a disposición esta técnica para funciones de variable compleja, por lo que podemos considerar una buena motivación matemática para definir integrales en los complejos.

Teorema 5.9. Sean $f, g, f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) tales que las f_n son C^1 y

$$f_n \xrightarrow{u} f, \quad f'_n \xrightarrow{u} g$$

Entonces f es C^1 y $f' = g$. En otras palabras,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)'$$

Observación 5.10. Si $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ entonces podemos escribir

$$f_n(x) = \phi_n(x) + i\psi_n(x)$$

y

$$f'_n(x) = \phi'_n(x) + i\psi'_n(x)$$

En ese caso, la convergencia uniforme de las f_n equivale a la convergencia simultánea tanto de las ϕ_n como de las ψ_n , y utilizando el teorema tanto para la parte real como la imaginaria de las f_n se puede concluir exactamente lo mismo que antes para funciones (de variable real) a valores complejos.

Notar que tanto f como g son continuas, porque límite uniforme de continuas es continua. Fijamos $x_0 \in (a, b)$ y definimos la función

$$\Phi(h) := \int_0^h g(x_0 + t) dt$$

Vamos a probar que $\phi(h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Necesitaremos el siguiente lema:

Lema 5.11. Si $\phi_n \xrightarrow{u} \phi$ en (a, b) entonces, para cualquier a', b' con $a < a' < b' < b$ vale

$$\int_{a'}^{b'} \phi_n(s) ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{a'}^{b'} \phi(s) ds$$

Demostración del Lema. Sea $\epsilon > 0$ y consideramos $\epsilon' := \frac{\epsilon}{b'-a'}$. Como $\phi_n \xrightarrow{u} \phi$, existe n_0 tal que (para todo $s \in [a', b']$) vale $|\phi_n(s) - \phi(s)| < \epsilon'$, si $n \geq n_0$. Luego

$$\begin{aligned} \left| \int_{a'}^{b'} \phi_n(s) ds - \int_{a'}^{b'} \phi(s) ds \right| &= \left| \int_{a'}^{b'} (\phi_n(s) - \phi(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{a'}^{b'} |\phi_n(s) - \phi(s)| ds < \int_{a'}^{b'} \epsilon' ds = (b' - a')\epsilon' = \epsilon \end{aligned}$$

□

Volvemos a la demostración del Teorema 5.9, retomando con la función Φ :

$$\Phi(h) = \int_0^h g(x_0 + t) dt = \int_0^h \lim_n f'_n(x_0 + t) dt$$

y por el lema

$$= \lim_n \int_0^h f'_n(x_0 + t) dt = \lim_n \left(f_n(x_0 + h) - f_n(x_0) \right) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

en donde hemos usado el teorema fundamental del cálculo y que si f_n converge uniformemente a f entonces vale la convergencia puntual. Concluimos $f(x_0 + h) - f(x_0) = \int_0^h g(x_0 + t) dt$ y por lo tanto

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h g(x_0 + t) dt$$

Pero como g es continua, $\frac{1}{h} \int_0^h g(x_0 + t) dt \rightarrow g(x_0)$ cuando $h \rightarrow 0$, es decir, f es derivable y $f' = g$. En efecto, para ver esta última aseveración, la continuidad de g dice que, dado $\epsilon > 0$, existe δ tal que $|y - x_0| < \delta \implies |g(y) - g(x_0)| < \epsilon$. Luego, si $0 < t < h < \delta$ entonces

$$g(x_0) - \epsilon < g(x_0 + t) < g(x_0) + \epsilon$$

y por lo tanto (supongamos $h > 0$)

$$\int_0^h (g(x_0) - \epsilon) dt < \int_0^h g(x_0 + t) dt < \int_0^h (g(x_0) + \epsilon) dt$$

o sea

$$(g(x_0) - \epsilon)h < \int_0^h g(x_0 + t) dt < (g(x_0) + \epsilon)h$$

o bien

$$g(x_0) - \epsilon < \frac{\int_0^h g(x_0 + t) dt}{h} < g(x_0) + \epsilon$$

y listo. Dejamos como ejercicio la respectiva deducción para el caso $h < 0$.

Observación 5.12. Si quisieramos tener un resultado análogo en el caso de funciones complejas, necesitaríamos tener definida una integral que verifique una regla tipo Barrow para $\int f'(z)dz$, y que sea estable por límite uniforme, es decir, si $f_n \xrightarrow{u} f$ queremos que $\int f_n(z)dz \rightarrow \int f(z)dz$. Con esa herramienta desarrollada podríamos adaptar la demostración anterior.

5.3. Ejemplo importante: series de potencias

Antes de desarrollar las integrales complejas, vamos a ver el ejemplo de las series de potencias, como límite de sumas parciales. Supongamos dada una serie $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$, de radio de convergencia $R > 0$.

Proposición 5.13. Si $f_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ y $0 < r < R$, donde R es el radio de convergencia de la serie $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, entonces $f_n \xrightarrow{u} f$ en $\overline{B}_r = \{z : |z| \leq r\}$. En particular f es continua en $B_R = \{z : |z| < R\}$.

Observación 5.14. Cada f_n es derivable porque es un polinomio:

$$f'_n(z) = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}$$

y como el radio de convergencia de la serie derivada coincide con el de la serie original (Proposición 4.22), las f'_n también tiene un límite uniforme y continuo en la misma región.

En el caso real, concluimos que las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ son derivables en $(x_0 - r, x_0 + r)$ para todo $r < R$ (donde R es el radio de convergencia), y la derivada se puede calcular derivando la serie término a término. Además, como la derivada es a su vez otra serie (y del mismo radio de convergencia), vuelve a ser derivable, etc. etc. Concluimos que las series son infinitamente derivables dentro del radio de convergencia. Este resultado, en cuanto tengamos la herramienta de la integral compleja, lo veremos *mutatis-mutandi* para las series complejas.

Demostración de la Proposición 5.13. Como $r < R$, sabemos que la serie converge absolutamente en r .

$$|f_n(z) - f(z)| = \left| \sum_{k=0}^n a_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| |z^k| < \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k$$

Es decir, podemos acotar por la "cola" de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k$, que sabemos que es convergente y por lo tanto

$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Claramente esta convergencia a cero es uniforme en z porque la acotación encontrada es independiente de z . □

6. Integrales complejas sobre curvas

El contexto es el siguiente: $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, y \mathcal{C} una curva parametrizada por una curva continua C^1 a trozos $\sigma : [a, b] \rightarrow \Omega$, llamamos $\mathcal{C} = \sigma([a, b])$, queremos definir

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = ??$$

donde z "recorre" los elementos de la curva \mathcal{C} . Escribimos $z = z(t) = \sigma(t)$. A partir de una partición del intervalo $[a, b]$

$$\Pi = a = t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_n = b$$

podemos considerar una suma de Riemann asociada

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta z_k =: S_{\Pi}$$

donde $\xi_k = \sigma(\tilde{t}_k)$ y \tilde{t}_k es alguna elección de punto intermedio $t_k \leq \tilde{t}_k \leq t_{k+1}$, y

$$\Delta z_k = z_{k+1} - z_k = \sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k).$$

Si $\sigma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$,

$$S_{\Pi} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) (\Delta x_k + i \Delta y_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \left(\frac{\Delta x_k}{\Delta t_k} + i \frac{\Delta y_k}{\Delta t_k} \right) \Delta t_k$$

Luego DEFINIMOS

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} f(z) dz := \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt}$$

$$= \int_a^b f(\sigma(t)) \sigma'(t) dt = \int_a^b f(x(t) + iy(t)) (x'(t) + iy'(t)) dt$$

Si escribimos $f(z) = u(z) + iv(z)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f(z) dz &= \int_a^b (u + iv)(x' + iy') dt \\ &= \int_a^b (ux' - vy') dt + i \int_a^b (uy' + vx') dt \end{aligned}$$

Ejemplo 6.1. Sea $f(z) = z^2$, y \mathcal{C} el segmento que une 1 con $1 + 3i$, que lo parametrizamos con $\sigma(t) = 2 + ti, t \in [0, 3]$. Entonces $\sigma'(t) = i$ y

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} z^2 dz &= \int_0^3 (\sigma(t))^2 \sigma'(t) dt = \int_0^3 (2 + it)^2 i dt = \int_0^3 (4 + 4it - t^2) i dt \\ &= \int_0^3 -4t dt + \int_0^3 (4 - t^2) i dt \\ &= -4 \frac{t^2}{2} \Big|_0^3 + i \left(4t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^3 \\ &= -4 \cdot \frac{9}{2} + (12 - 9)i = -18 + 3i \end{aligned}$$

6.1. Interpretación geométrica real de la integral compleja

Si a una $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

la interpretamos como una función a valores en \mathbb{R}^2 :

$$f \rightsquigarrow \tilde{F}(x, y) := (u(x, y), v(x, y))$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f(z) dz &= \int_a^b (ux' - vy') dt + i \int_a^b (uy' + vx') dt \\ &= \int_a^b \langle \tilde{F}, (x', -y') \rangle dt + i \int_a^b \langle \tilde{F}, (y', x') \rangle dt \end{aligned}$$

que no tiene interpretación geométrica directa en términos de \tilde{F} y la curva $(x(t), y(t))$, sin embargo, si definimos (al igual que en 3.4.1) el campo conjugado

$$\bar{f} \leftrightarrow \vec{F}(x, y) := (u(x, y), -v(x, y))$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f(z) dz &= \int_a^b (ux' - vy') dt + i \int_a^b (uy' + vx') dt \\ &= \int_a^b \langle \vec{F}, (x', y') \rangle dt + i \int_a^b \langle \vec{F}, (y', -x') \rangle dt \end{aligned}$$

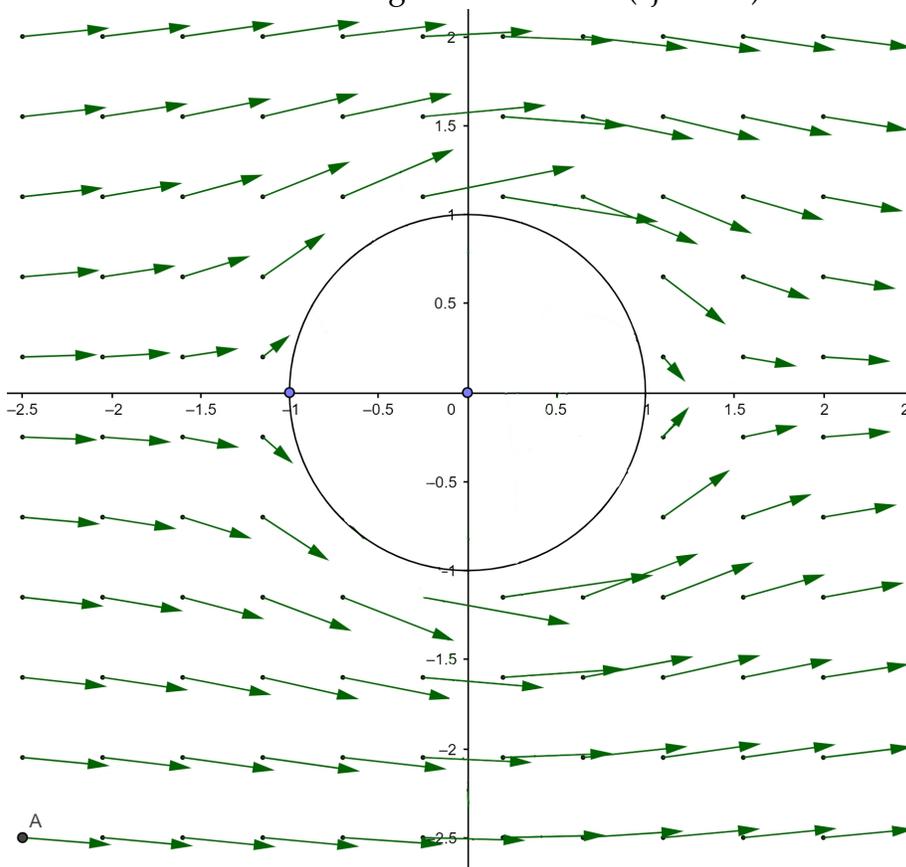
y obtenemos así un producto escalar contra el *vector tangente* a la curva: (x', y') , y un producto escalar contra el *vector normal* $(y', -x') = (-i) \cdot (x', y')$ = el rotado 90 grados de (x', y') . Luego

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} + i \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \hat{n} d\ell$$

Es decir, la integral compleja "empaqueta" en un único número complejo, tanto la circulación de $\vec{F} = \bar{f}$ (en su parte real) como el flujo saliente de \vec{F} (en su parte imaginaria).

Observamos que la integral está definida en la "curva geométrica orientada", es decir, no cambia por reparametrización orientada, y cambia de signo cuando se cambia la parametrización de la curva.

Ejemplo 6.2. Sea $f(z) = -\frac{1}{z^2} + 1$, al que le asociamos el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = \bar{f}(z)$, que en el círculo unidad es tangente al círculo!! (ejercicio).



Calculamos la integral en el círculo unidad: por simetría, la circulación de F debería dar cero, y por tangencia el flujo también debería dar cero. Efectivamente, parametrizamos $\sigma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

$$\sigma(t) = e^{it} = \cos(t) + i \operatorname{sen}(t)$$

$$\sigma'(t) = -\operatorname{sen}(t) + i \cos(t) = i(\cos t + i \operatorname{sen} t) = ie^{it},$$

$$f(\sigma(t)) = \frac{-1}{\sigma(t)^2} + 1, = -e^{-2it} + 1 \quad dz = \sigma'(t)dt = ie^{it} dt$$

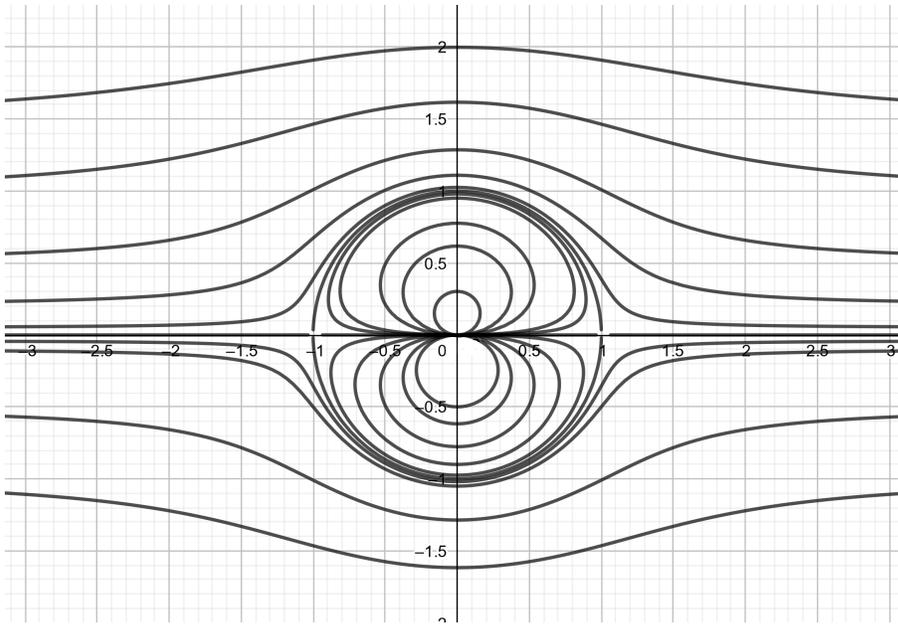
$$f(z)dz = (-e^{-2it} + 1)ie^{it}dt = i(-e^{-it} + e^{it})dt = i(-2i \operatorname{sen} t)dt$$

Como $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t dt = 0$, esta integral da 0.

Observación 6.3. Notar que $f(z) = \left(\frac{1}{z} + z\right)'$. Por un lado, veremos luego (Corolario 6.7) que para una función que es una derivada siempre $\oint_C g' = 0$. A su vez (ver Observación 3.17) las líneas de flujo del campo \vec{F} pueden ser dibujadas usando las curvas de nivel de la parte imaginaria de $1/z + z$, es decir, de

$$\text{Im}\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2} + z\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2} + y = c$$

que son



6.2. El ejemplo de integral

Debido a sus implicaciones, el siguiente ejemplo elemental es, sin lugar a dudas, el cálculo de integral más relevante de todo el análisis complejo:

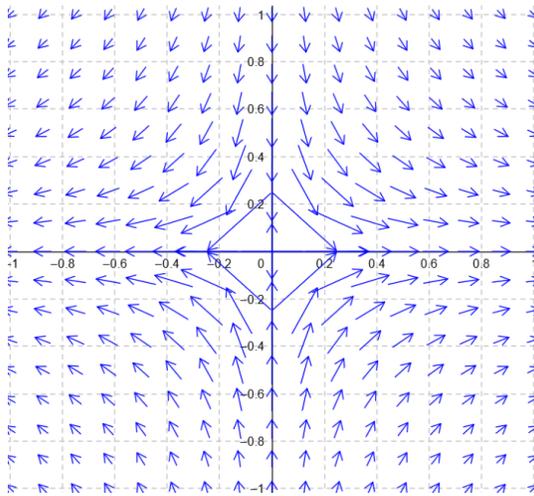
Ejemplo 6.4. Si $C = S_+^1$, el círculo unitario recorrido de forma antihoraria, entonces

$$\boxed{\int_C \frac{1}{z} dz = 2i\pi}$$

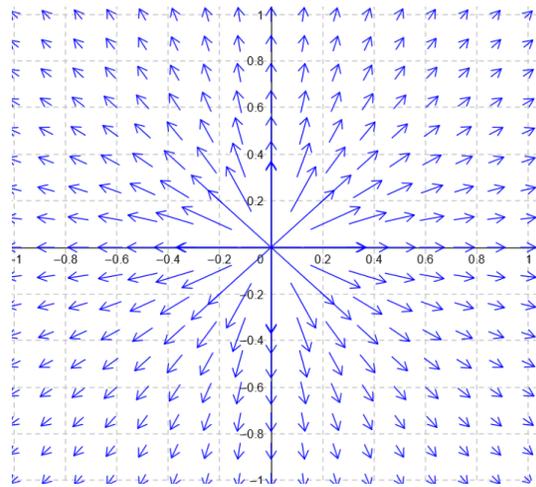
Pues

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} (e^{it})' dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$$

Aquí vemos graficado respectivamente los campos $f(z) = \frac{1}{z}$ y $\vec{F} = \bar{f}(z)$:



$$f(z) = \frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$



$$\vec{F} = \bar{f} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

En el campo conjugado vemos claramente que tiene un flujo hacia el exterior, que es lo que ve la parte imaginaria del resultado de la integral, y vemos también que si recorremos el círculo unitario, la velocidad de recorrido es perpendicular al campo, por lo que la circulación es cero. Esto es compatible con el hecho de que el resultado de la integral dió imaginario puro.

6.3. Primer resultado: cálculo de $\int_C f'(z) dz$

Proposición 6.5. si $\sigma : [a, b] \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{C}$ es C^1 a trozos y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es C^1 holomorfa, entonces

$$\int_C f'(z) dz = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))$$

Demostración. Escribamos $f(z) = u + iv$, entonces

$$f'(z) = u_x + iv_x$$

luego

$$\int_C f'(z) dz = \int_C (u_x + iv_x) dz = \int_C u_x dx - v_x dy + i \int_C u_x dy + v_x dx$$

Pero por Cauchy-Riemann,

$$u_x = v_y \quad \text{y} \quad u_y = -v_x$$

entonces

$$\int_C f'(z) dz = \int_C (u_x + iv_x) dz = \int_C u_x dx + u_y dy + i \int_C v_y dy + v_x dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_C \langle \nabla u, d\vec{\ell} \rangle + i \int_C \langle \nabla v, d\vec{\ell} \rangle \\
&= u(\sigma(b)) - u(\sigma(a)) + i(v(\sigma(b)) - v(\sigma(a))) \\
&= f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 6.6. Podemos fácilmente chequear que la cuenta explícita realizada en el Ejemplo 6.1, donde la curva es el segmento que une 2 con $2 + 3i$ y la función es $f(z) = z^2$, coincide con

$$\int_C z^2 dz = -18 + 3i = \frac{(2 + 3i)^3}{3} - \frac{2^3}{3}$$

Corollario 6.7. $\oint_C f'(z) dz = 0$ para toda curva cerrada C contenida en el dominio de f .

Corollario 6.8. Gracias al ejemplo 6.4 podemos afirmar que no puede existir una “primitiva” de $\frac{1}{z}$ definida en $\mathbb{C} - \{0\}$.

6.4. ¿Cuándo existe la primitiva de una holomorfa?

Por el cálculo de $\oint_{S^1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$ vemos que $\frac{1}{z} \neq f'(z)$ para ninguna $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. A su vez, nuestra intuición de funciones reales nos dice que el logaritmo debería jugar algún rol. Como en la definición de la función logaritmo compleja aparece el problema de la función argumento, podemos intuir que el problema es con el dominio, y quizás para dominios simplemente conexos el problema de encontrar primitivas tiene más chances de poder resolverse. Efectivamente, eso es lo que probaremos.

Comencemos con $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $f = u + iv$ holomorfa en Ω . Buscamos $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f = \phi'$. Si escribimos $\phi(z) = U(z) + iV(z)$, tenemos que resolver

$$u = U_x, \quad v = V_x$$

y además deberá verificar $U_x = V_y$ y $U_y = -V_x$.

Si buscamos una solución al problema

$$u = U_x, \quad v = -U_y$$

vemos que el problema es equivalente a

$$¿\exists U : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \vec{F} = (u, -v) = \nabla(U)?$$

Esto siempre es posible si el dominio de \vec{F} es simplemente conexo y \vec{F} verifique el test de derivadas cruzadas. O sea, hay que chequear $u_y = -v_x$. Pero esto vale por (una parte de)

Cauchy-Riemann! Ahora sabemos que que tenemos un (único a menos de escalar U) tal que $U_x = u$ y $-U_y = v$, busquemos V tal que

$$V_x = -U_y, \quad V_y = U_x$$

o bien, que

$$\vec{G} := (-U_y, U_x) = \nabla V$$

De nuevo esto es posible en un dominio simplemente conexo si chequeamos el test de derivadas cruzadas para \vec{G} , que en este caso nos da

$$(-U_y)_y \stackrel{?}{=} (U_x)_x$$

pero ya sabíamos que $-U_y = v$ y que $U_x = u$, por lo tanto esta igualdad equivale a

$$v_y \stackrel{?}{=} u_x$$

y esto es cierto por (la otra parte de) C-R. Concluimos el siguiente:

Teorema 6.9. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Entonces existe $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f = \phi'$.*

Corollario 6.10. *Toda holomorfa C^1 es localmente la derivada de alguien.*

Corollario 6.11. *En un dominio simplemente conexo, la integral de una f holomorfa en una curva abierta sólo depende del punto inicial y final de la curva, si la curva es cerrada la integral da cero.*

Corollario 6.12. *La integral de una f sobre una curva cerrada (en un dominio general) sólo depende de la clase de homotopía de la curva.*

6.5. Integral y convergencia uniforme

Comenzamos con un lema sobre acotación de integrales complejas:

Lema 6.13. *\mathcal{C} una curva orientada C^1 a trozos, Ω un abierto con $\mathcal{C} \subset \Omega \subseteq \mathbb{C}$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Consideramos $|f| : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ como un campo escalar real, entonces la integral compleja de f sobre la curva está acotada por la integral de línea del campo escalar $|f|$:*

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| \leq \int_{\mathcal{C}} |f| d\ell$$

Demostración. Fijamos una parametrización $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de \mathcal{C} y recordamos que la integral compleja de f sobre \mathcal{C} se define como

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_a^b f(\sigma(t)) \sigma'(t) dt,$$

Por definición (de integral de Riemann), esto es un límite de sumas sobre particiones. Si tomamos una partición

$$\Pi = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$$

tenemos la suma de Riemann asociada, junto con las desigualdades

$$|S_\Pi| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\sigma(\xi_i))\sigma'(\xi_i)(t_{i+1} - t_i) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\sigma(\xi_i))| |\sigma'(\xi_i)|(t_{i+1} - t_i)$$

donde $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$ es alguna elección de punto intermedio. El término de la derecha lo reconocemos como otra suma de Riemann de una integral! Tomando límite sobre particiones cada vez más finas deducimos

$$\left| \int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(\sigma(t))| |\sigma'(t)|dt$$

lo que, por definición (de integral compleja y de integral de campo escalar real) significa

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq \int_C |f|dl$$

□

Corollario 6.14. Con las mismas notaciones anteriores, si $M = \sup\{|f(z)| : z \in C\}$, entonces

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq \text{long}(C)M$$

Demostración. Simplemente

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq \int_C |f(z)|dl \leq \int_C Mdl = M \int_C 1dl = M \text{long}(C)$$

□

Una consecuencia inmediata es la siguiente:

Proposición 6.15. Sean $\{f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}\}$ una sucesión de funciones continuas tales que $f_n \xrightarrow{u} f$ y C una curva contenida en Ω , entonces

$$\int_C f_n(z)dz \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_C f(z)dz$$

O en otras palabras,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n(z)dz = \int_C \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)dz$$

Demostración. Consideremos

$$M_n^{\mathcal{C}} := \sup\{|f_n(z) - f(z)| : z \in \mathcal{C}\} \leq M_n := \sup\{|f_n(z) - f(z)| : z \in \Omega\}$$

Como $f_n \xrightarrow{u} f$ en Ω vemos que $M_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ y por lo tanto $M_n^{\mathcal{C}} \rightarrow 0$ también. Ahora acotamos las diferencias

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f_n(z) dz - \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| \leq M_n \text{long}(\mathcal{C}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

Ejemplo 6.16. si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es una serie con radio de convergencia positivo R y \mathcal{C} es una curva contenida en el disco de radio R entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f(z) dz &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\mathcal{C}} z^n dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \Big|_{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

6.6. Aplicación: Las series son holomorfas

Con la herramienta de la integral compleja, podemos imitar la demostración del caso real al caso complejo.

Teorema 6.17. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, $f, \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funciones donde $f_n \rightarrow f$ uniformemente, las f_n son de clase C^1 holomorfas y $f'_n \rightarrow g$ uniformemente. Entonces f es holomorfa y vale $f' = g$.

Demostración. Queremos acotar

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z)$$

Consideramos \mathcal{C} = la curva segmento que une z con w :



que está parametrizado por

$$\sigma : [0, 1] \rightarrow \Omega$$

$$\sigma(t) := z + t(w - z)$$

y que cae en Ω si z es interior y w es suficientemente cercano a z .

Para cada n tenemos

$$f_n(w) - f_n(z) = \int_C f'_n(u) du$$

por lo tanto, cuando tomamos límite en n , como $f_n \rightarrow f$ y $f'_n \rightarrow g$ (uniformemente)

$$\begin{aligned} f(w) - f(z) &= \int_C g(u) du \\ &= \int_0^1 g(\sigma(t)) \sigma'(t) dt = \int_0^1 g(z + t(w - z))(w - z) dt \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \int_0^1 g(z + t(w - z)) dt$$

Si estimamos la diferencia

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z) \right| &= \left| \frac{\int_C g(s) ds}{w - z} - g(z) \right| \\ &= \left| \int_0^1 g((w - z)t + z) dt - g(z) \right| \\ &= \left| \int_0^1 (g((w - z)t + z) - g(z)) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |g((w - z)t + z) - g(z)| dt \end{aligned}$$

Pero g es continua en z (las f_n son C^1 y por lo tanto g es límite uniforme de f'_n que son continuas, luego g es continua). Dado $\epsilon > 0$ existe δ tal que si $|u - z| < \delta$ entonces $|g(u) - g(z)| < \epsilon$. Si tomamos w tal que $|w - z| < \delta$, como $t \in [0, 1]$ tenemos

$$\left| ((w - z)t + z) - z \right| = |w - z|t \leq |w - z| < \delta$$

luego

$$\int_0^1 |g((w - z)t + z) - g(z)| dt < \int_0^1 \epsilon dt = \epsilon$$

Esto muestra que

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = g(z)$$

es decir, f es holomorfa y $f' = g$. □

Corollario 6.18. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es C^1 y holomorfa en el interior del radio de convergencia.

Demostración. Las series $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ tienen el mismo radio de convergencia, digamos R , por lo que definen funciones continuas en el disco (abierto) de radio R que hemos llamado f y g . En esta demostración todos los discos considerados serán abiertos. Si tomamos $0 < r < R$ entonces las funciones $f_N = \sum_{n=0}^N a_n z^n$ (son C^1 pues son polinomios) y $f'_N = \sum_{n=0}^N n a_n z^{n-1}$ convergen uniformemente a f y a g respectivamente en el disco de radio r . Por el teorema anterior podemos concluir que f es holomorfa en el disco de radio r y su derivada es g . Como esto es válido para cualquier $r < R$, concluimos lo mismo para el disco de radio R . \square

7. Fórmula integral de Cauchy y consecuencias

7.1. Fórmula integral de Cauchy

Recordamos (Ejemplo 6.4) que si \mathcal{C} es el círculo unitario recorrido antihorario,

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

Corollario 7.1. Si \mathcal{C} es un círculo de radio r con centro z , orientado anti-horario, entonces

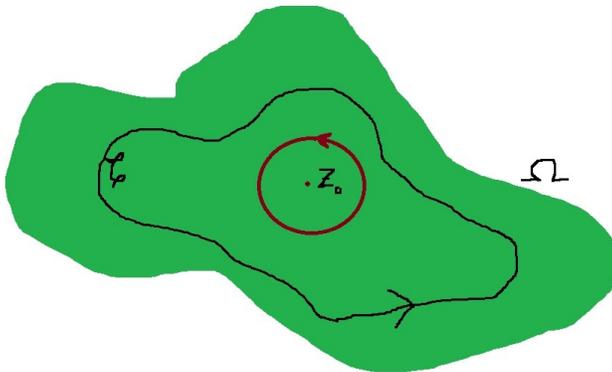
$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dw}{w - z} = 2\pi i$$

Como consecuencia, podemos demostrar:

Teorema 7.2 (Formula integral de Cauchy). Si f es holomorfa alrededor de z y \mathcal{C} es una curva que encierra a z_0 en sentido antihorario (por ejemplo un círculo centrado en z_0) entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w - z_0} dw = f(z_0)$$

Demostración. Como $\varphi(w) := \frac{f(w)}{w - z_0}$ es holomorfa en $w \in \Omega$ salvo $w = z_0$, la integral no cambia si modificamos $\mathcal{C} \subset \Omega \setminus \{z_0\}$ cambiándola por otra curva que sea homotópica a ella (dentro de $\Omega \setminus \{z_0\}$).



Supondremos entonces que $\mathcal{C} = C_r =$ el círculo de radio r y centro z_0 , con r suficientemente pequeño para asegurarnos que $C_r \subset \Omega$. Incluso, sabemos que el resultado de la integral sobre C_r no depende del radio r .

A su vez, como f es continua en z_0 , dado $\epsilon > 0$ existe un radio $r' < r$ tal que $|f(w) - f(z_0)| < \epsilon$ si w dista de z_0 en r' . Achicando eventualmente r , supondremos $r' = r$. Acotaremos la siguiente diferencia:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w - z_0} dw - f(z_0) \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w - z_0} dw - \frac{1}{2\pi i} (2\pi i) f(z_0) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w - z_0} dw - \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C_r} \frac{1}{w - z_0} dw \right) f(z_0) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w - z_0} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z_0)}{w - z_0} dw \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_r} \frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0} dw \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_r} \frac{|f(w) - f(z_0)|}{|w - z_0|} dl \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{C_r} \frac{|f(w) - f(z_0)|}{r} dl \\
&< \frac{1}{2\pi} \int_{C_r} \frac{\epsilon}{r} dl = \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon}{r} \text{long}(C_r) = \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon}{r} 2\pi r = \epsilon
\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w - z_0} dw - f(z_0) \right| = 0$$

□

Ejemplo 7.3. Sea \mathcal{C} una curva cerrada simple que no toca $-3 - i$. Llamemos D a la región encerrada por \mathcal{C} . Entonces

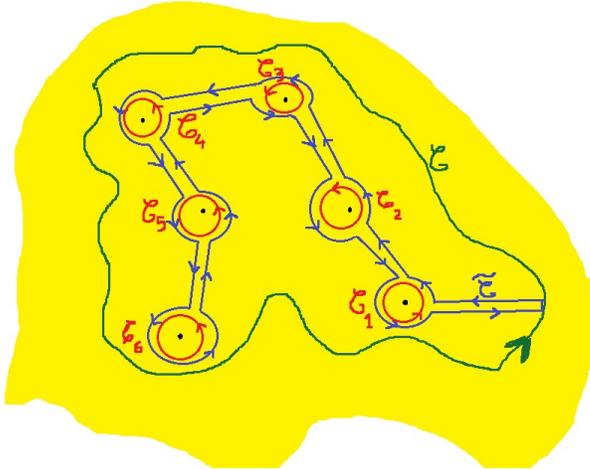
$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\cos(\cos(z))}{z + 3 + i} dz = \begin{cases} 0 & \text{si } -3 - i \notin D \\ \cos(\cos(-3 - i)) & \text{si } -3 - i \in D \end{cases}$$

En efecto, si $-3 - i \notin D$ entonces el integrando es holomorfo en un dominio simplemente conexo que contiene a la curva y por lo tanto la integral es cero. Si en cambio $-3 - i \in D$, usamos la fórmula integral de Cauchy para $z_0 = -3 - i$.

Ejemplo 7.4. Si queremos calcular $\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{p(z)} dz$ con $p(z)$ un polinomio con varias raíces y \mathcal{C} una curva que encierre a todas ellas, por ejemplo algo de la forma

$$\oint_{\mathcal{C}} \Phi(z) dz = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\cos(z)}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)(z - z_5)(z - z_6)} dz$$

podríamos, o bien hacer fracciones simples con el denominador, o bien, si la curva fuera como el siguiente gráfico:



la invarianza por deformación (de la curva) de la integral de línea compleja nos permite afirmar que

$$\oint_C \Phi(z) dz = \sum_{i=1}^6 \oint_{C_i} \Phi(z) dz$$

Y en este dibujo, en el interior de cada curva C_i hay un único denominador a tener en cuenta. Para esta integral en particular obtendríamos

$$\oint_C \Phi(z) dz = \sum_{i=1}^6 \frac{\cos(z_i)}{p_i(z_i)}$$

donde

$$p_i(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_{i-1})(z - z_{i+1}) \cdots (z - z_6) = \frac{\prod_{j=1}^6 (z - z_j)}{z - z_i}$$

es el producto de las diferencias (salvo la i -ésima).

Observación 7.5. Con las notaciones previas,

$$p_i(z) = \frac{p(z)}{z - z_i}$$

vemos que, a pesar de lo que puede aparentar la fórmula, sabemos que p_i es un polinomio, y tiene sentido evaluar p_i en z_i . De hecho, afirmamos que vale

$$\boxed{p_i(z_i) = p'(z_i)}$$

pues

$$p_i(z_i) = \lim_{z \rightarrow z_i} p_i(z) = \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{p(z)}{z - z_i}$$

y usando la regla de l'Hôpital

$$= \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{p'(z)}{(z - z_i)'} = \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{p'(z)}{1} = p'(z_i).$$

Más allá de calcular integrales de la forma $\frac{f(z)}{z - z_0}$ con f holomorfa, una consecuencia es que los valores de una f holomorfa en un dominio D se pueden reconstruir a partir de los valores de f en la curva borde. La siguiente propiedad que puede ser demostrada utilizando los resultados sobre funciones armónicas, pero con la fórmula integral de Cauchy resulta una consecuencia inmediata:

Corollario 7.6. Sean $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfas y $\bar{D} \subset \Omega$ un dominio con borde $\mathcal{C} = \partial D =$ una curva cerrada simple C^1 a trozos. Si f y g coinciden en \mathcal{C} entonces coinciden en el interior.

7.2. Derivadas superiores

Si f' es holomorfa entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f'(w)}{w - z_0} dw = f'(z_0)$$

pero la derivada (con respecto a w) del cociente da

$$\frac{d}{dw} \left(\frac{f(w)}{w - z_0} \right) = \frac{f'(w)}{w - z_0} - \frac{f(w)}{(w - z_0)^2}$$

luego

$$0 = \oint \left(\frac{f(w)}{w - z_0} \right)' dw = \oint \frac{f'(w)}{w - z_0} dw - \oint \frac{f(w)}{(w - z_0)^2} dw$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f'(w)}{w - z_0} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(w)}{(w - z_0)^2} dw$$

Usando la fórmula de Cauchy para $f'(z_0)$ deducimos

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(w)}{(w - z_0)^2} dw$$

Por un argumento recursivo podemos obtener la fórmula

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

Más adelante (Teorema 7.12 y subsección 7.5.2), veremos no sólo que la hipótesis de holomorfía de f' -y todas las derivadas superiores- es superflua, sino que tendremos una manera compacta de demostrar todas estas fórmulas en simultáneo.

Ejemplo 7.7. Si \mathcal{C} es una curva cerrada simple orientada positivamente que encierra al 1, entonces

$$\oint \frac{e^{iz^2}}{(z - 1)^2} dz = 2\pi i (e^{iz^2})'|_{z=1} = 2\pi i (i2ze^{iz^2})|_{z=1} = 2\pi i \cdot 2ie^i = -4\pi e^i = -4\pi(\cos(1) + \text{sen}(1))$$

7.3. Teorema de Liouville

En funciones de variable real no es raro tener funciones C^∞ acotadas, como

$$e^{-x^2}, \quad \text{sen}(x), \quad \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{\text{sen}(x)}{x}, \quad \frac{\cos(x^3 e^{3x^2})}{27 + \text{sen}^2\left(\frac{x}{1+x^8}\right)}, \quad e^{-\frac{1}{x^2}}, \dots$$

pero ninguna de ellas resulta acotada (algunas siquiera bien definida) en \mathbb{C} . El siguiente teorema nos sorprende mostrando la imposibilidad de conseguir una función acotada no trivial definida en todo \mathbb{C} :

Teorema 7.8 (Liouville). *Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y acotada. Es decir, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces f es constante.*

Demostración. Demostraremos $f'(z) = 0$ para todo z . Por la fórmula integral de Cauchy para f' tenemos

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(w)}{(w - z_0)^2} dw$$

donde la integral la realizamos en una curva que le de una vuelta a z_0 , por ejemplo \mathcal{C} = un círculo de radio R con centro en z_0 . En ese caso, si

$$w(t) = z_0 + Re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

claramente $|w(t) - z_0| = R$, y ahora acotamos

$$\begin{aligned} |f'(z_0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w - z_0)^2} dw \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{|f(w)|}{|w - z_0|^2} dl \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{M}{R^2} dl \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} \text{long}(\mathcal{C}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} 2\pi R = \frac{M}{R} \end{aligned}$$

Pero R es arbitrario! por lo tanto, si $|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}$ para todo $R \in \mathbb{R}_{>0}$, la única posibilidad es $f'(z_0) = 0$. A su vez z_0 es arbitrario, concluimos $f' \equiv 0$ y por lo tanto f constante. \square

7.3.1. Disgresión: Teorema fundamental del álgebra

A partir del teorema de Liouville se puede dar una demostración del llamado *Teorema fundamental del Álgebra*, que dice que todo polinomio no constante tiene al menos una raíz compleja.

Teorema 7.9 (Teorema Fundamental del Álgebra). *Sea*

$$p(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_N z^N$$

con $N > 0$, todos los $a_i \in \mathbb{C}$, $a_N \neq 0$. Entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $p(\lambda) = 0$.

Demostración. Como

$$\frac{p(z)}{z^N} = a_N + \left(\frac{a_0}{z^N} + \frac{a_1}{z^{N-1}} + \frac{a_2}{z^{N-2}} + \cdots + \frac{a_{N-1}}{z} \right)$$

es claro que para un R suficientemente grande, si $|z| > R$ tendremos

$$\left| \frac{p(z)}{z^N} \right| \geq \frac{|a_N|}{2}$$

En todo caso, existirá una constante C tal que si $|z| > R$,

$$\left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq \frac{C}{|z|^N} \leq \frac{C}{R^N} = M_1$$

A su vez, si asumimos que $p(z)$ no se anula en ningún lado, $\frac{1}{p(z)}$ es una función holomorfa en \mathbb{C} , en particular continua. Como $\bar{B}_R = \{z : |z| \leq R\}$ es un compacto, $\left| \frac{1}{p(z)} \right|$ alcanza un máximo en \bar{B}_R , digamos

$$\left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq M_2, \quad \forall z : |z| \leq R$$

Tomando ahora $M = \max\{M_1, M_2\}$ es claro que $\left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq M, \forall z \in \mathbb{C}$.

El teorema de Liouville implica que la función holomorfa $\frac{1}{p(z)}$ debería ser constante, lo cual es absurdo. Por lo tanto $\frac{1}{p(z)}$ no puede ser una función holomorfa en todo \mathbb{C} , no puede ser que $p(z)$ no se anule nunca, $p(z)$ debe dar cero para algún $z \in \mathbb{C}$. \square

7.4. Principio del Módulo Máximo

Teorema 7.10. *Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa no constante. Si $D \subset \Omega$ es un dominio con $\mathbb{C} = \partial D$ una curva cerrada C^1 a trozos, entonces el máximo de $|f|$ en D se alcanza en ∂D , y no en el interior.*

Daremos tres demostraciones:

7.4.1. Usando funciones armónicas

Si $f(z_0) = 0$ entonces tiene módulo mínimo, supongamos $f(z_0) \neq 0$ entonces localmente alrededor de z_0 podemos calcular el logaritmo de $f(z)$, y tenemos

$$\ln f = \ln(|f|) + i \arg(f(z))$$

para alguna elección local de función argumento.

$$\ln(|f|^2) = 2 \ln(|f|) = 2 \operatorname{Re}(\ln(f))$$

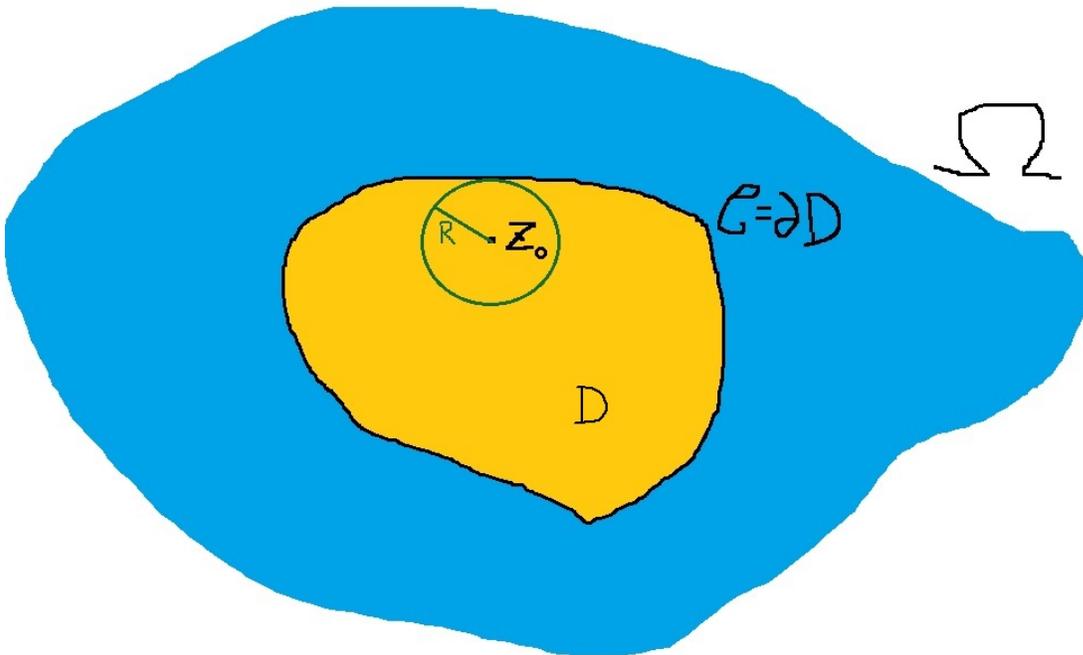
es armónica en un entorno de z .

Usamos el resultado de las funciones armónicas: si $u(x, y)$ es armónica, entonces -salvo que sea constante- su valor en (x_0, y_0) no puede alcanzar un máximo (ni mínimo) en el interior del dominio, pues $u(x_0, y_0)$ coincide con el promedio de u en cada bola centrada en (x_0, y_0) .

7.4.2. Usando la fórmula integral de Cauchy

Tomamos $\mathcal{C} = \partial D$ y $z_0 \in D$ un punto interior de D . Queremos ver que $|f|$ restringido a D se alcanza en el borde de D , y que si llega a alcanzarse también en el interior entonces f es necesariamente constante.

Tomemos entonces un z_0 donde se alcanza el máximo de $|f|$ y supongamos que es interior, este z_0 se encuentra a una cierta distancia R del borde.



Consideramos ahora C_R el círculo centrado en z_0 y radio R . Por la fórmula integral de Cauchy tenemos

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Si acotamos

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \left| \frac{f(z)}{z - z_0} \right| dl = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \frac{|f(z)|}{R} dl$$

Como asumimos $|f(z_0)|$ máximo, claramente $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todo $z \in C_R$. Pero además, si existiera $z_1 \in C_R$ con desigualdad estricta: $|f(z_1)| < |f(z_0)|$, entonces por continuidad habría un entorno en donde valga la desigualdad estricta y tendríamos una desigualdad estricta para la integral, dando la siguiente dicotomía:

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \frac{|f(z)|}{R} dl \begin{cases} < \frac{1}{2\pi} \frac{|f(z_0)|}{R} \text{long}(C_R) & \text{si } |f| \text{ no es constante en } C_R \\ = \frac{1}{2\pi} \frac{|f(z_0)|}{R} \text{long}(C_R) & \text{si } |f(z)| = |f(z_0)|, \forall z \in C_R \end{cases}$$

Como $\text{long}(C_R) = 2\pi R$, se cancela el factor $2\pi R$ y tenemos la dicotomía

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \frac{|f(z)|}{R} dl \begin{cases} < |f(z_0)| & \text{si } |f| \text{ no es constante en } C_R \\ = |f(z_0)| & \text{si } |f(z)| = |f(z_0)|, \forall z \in C_R \end{cases}$$

Como la primera opción conduce a un absurdo, concluimos $|f(z)| = |f(z_0)|$ para todo $z \in C_R$.

Notar que el mismo argumento lo podríamos haber hecho con en la curva C_r con $0 < r \leq R$, por lo que podemos afirmar que $|f(z)|$ es constantemente $|f(z_0)|$ para todo z en el disco de radio R centrado en z_0 .

Concluimos entonces que, en los puntos interiores donde se alcanza el máximo del módulo, la función $|f|$ es localmente constante. Eso implica que $|f|$ es constante en todo el interior del dominio D . En efecto, si no fuera así, tomamos un punto frontera del conjunto en donde $|f|$ es constante. Si ese punto está en el borde de D no hay nada que decir, pero si ese punto está en el interior de D llegamos a un absurdo porque es un punto interior de D donde $|f|$ es máximo y por el argumento anterior hay todo un disco donde ese módulo es constante, contradiciendo que era un punto frontera con esa propiedad.

Ahora recordamos que un ejercicio de las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares nos dice que si una función f holomorfa tiene módulo constante entonces es constante y terminamos. Si no queremos usar Cauchy Riemann en polares, podemos considerar localmente $\ln(f(z)) = \ln(|f|) + i \arg(f(z)) = u(z) + iv(z)$, entonces u es constante, luego su compañera armónica v también es constante, y si $\ln(f)$ es constante entonces $f(z) = e^{\ln(f(z))}$ es constante.

7.4.3. "Demostración física" usando la ecuación del calor

Recordando la ecuación del calor

$$u_t = k\Delta u$$

Si u es armónica, físicamente representa una situación estacionaria de un proceso de difusión de calor en un sólido:

$$\Delta u \equiv 0 \iff u_t = k\Delta u, \quad u_t \equiv 0$$

Si hubiera un punto de máxima temperatura, ésta se difundiría y no podría ser una situación estacionaria.

Ejemplo 7.11. Supongamos f, g holomorfas en un abierto que contiene al disco unitario, que g no se anula en el disco y que $\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \leq 5, \forall z : |z| = 1$. Entonces, si existe un z_0 con $|z_0| < 1$ y $f(z_0) = 5g(z_0)$, entonces $f(z) = 5g(z)$ para todo z en el disco.

Demostración. Como g no se anula en el disco, $\Phi(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$ es holomorfa ahí, y por el principio del módulo máximo, $|\Phi|$ alcanza el máximo en el borde, y no hay puntos interiores en donde se alcance el máximo de $|\Phi|$ salvo que Φ sea constante.

Pero la hipótesis $f(z_0) = 5g(z_0)$ dice que $\Phi(z_0) = 5$ es un punto interior en donde se alcanza un valor de módulo igual al máximo en el borde, por lo tanto Φ es constante en el disco, necesariamente constantemente igual a 5 , o sea $f(z) = 5g(z)$ para todo z en el disco.

□

7.5. Analiticidad: las holomorfas son localmente series

Una de las aplicaciones más importantes de la fórmula integral de Cauchy es la caracterización de holomorfa como localmente analítica, lo que a su vez tiene muchas más aplicaciones.

Teorema 7.12. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, $z_0 \in \Omega$, si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces alrededor de z_0 f se representa como una serie:

$$f(z) = \sum_n a_n (z - z_0)^n$$

Más aún, si $\overline{B}_R(z_0) \subset \Omega$, entonces el radio de convergencia de la serie es por lo menos R .

Demostración. Sea \mathcal{C} un círculo alrededor del centro tal que el disco está contenido en el dominio de f y donde f es holomorfa ahí. Digamos, el círculo tiene radio R . Entonces, para todo z en el interior de ese disco vale

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Usaremos el siguiente Lema, cuya demostración dejamos como ejercicio:

Lema 7.13. $g_n \rightarrow g$ uniformemente, f acotada, entonces $g_n f \rightarrow g f$ uniformemente.

Tomamos z tal que $|z - z_0| < R$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{w - z} &= \frac{1}{(w - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(w - z_0)} \frac{1}{\left(1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}\right)} \\ &= \frac{1}{(w - z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} \end{aligned}$$

y esto es válido si $\left|\frac{z - z_0}{w - z_0}\right| < 1$, es decir, $|z - z_0| < R$ porque el w está en la curva "círculo de radio R y centro z_0 ". Además sabemos que

$$g_N(w) := \sum_{n=0}^N \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{w - z}$$

uniformemente, si $|z - z_0| < R$, luego

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} dw \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(w) \sum_{n=0}^N \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} dw \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^N \oint_C f(w) \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} dw \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \right) (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \right) (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \end{aligned}$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

□

7.5.1. Consecuencias de la demostración de analiticidad

Radio de convergencia y distancia a la primera singularidad

Si desarrollamos Taylor a una función holomorfa f alrededor de z_0 y z_1 es un punto singular de f , con una singularidad no-evitable, entonces el radio de convergencia de la serie de f alrededor de z_0 no puede ser mayor que $|z_0 - z_1|$. Concluimos que el radio de convergencia de la Serie de Taylor de f alrededor de z_0 es necesariamente la distancia hasta la singularidad mas cercana. En particular, f es entera (i.e. su dominio de holomorfa es \mathbb{C}) si y sólo si está dada por una serie con radio de convergencia infinito.

7.5.2. Demostración directa de las fórmulas para derivadas superiores

De la fórmula

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \right) (z - z_0)^n$$

obtenemos que en un disco alrededor z_0 , f es de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

Pero sabemos que las series son derivables, y que la derivada de la serie es la serie derivada. Por lo tanto, a partir de

$$f(z)^{(k)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right)^{(k)} = k! a_k + (cte)(z - z_0) + (cte)(z - z_0)^2 + \dots$$

Al evaluar en z_0 concluimos $f(z_0)^{(k)} = k! a_k$. O dicho de otro modo, si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

entonces necesariamente $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ y la serie no es otra que su *Serie de Taylor*. Como subproducto tenemos

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

o bien

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw}$$

Recolectamos algunos corolarios directos del teorema de analiticidad:

- Ya que sabíamos que las series son holomorfas dentro de su radio de convergencia, ahora el teorema nos dice que f es holomorfa (y C^2) si y sólo si es localmente analítica.
- f holomorfa (luego localmente analítica) entonces es Hol^∞
- Si $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es C^2 y armónica entonces es C^∞ .
- f holomorfa y se anula en un abierto entonces es idénticamente nula, pues su desarrollo de Taylor es idénticamente nulo. Idem si f se anula en un segmento
- $f|_{\mathbb{R}}$ determina f en los complejos. Por ejemplo, sabemos ahora que hay a lo sumo una única extensión holomorfa de las funciones reales e^x , $\cos(x)$, $\sen(x)$, e^{x^2} , etc.

7.6. Liouville generalizado

Teorema 7.14 (de Liouville generalizado). Si f es entera y verifica una desigualdad de la forma $|f(z)| \leq C + D|z|^k$, entonces f es un polinomio, de grado a lo sumo k .

Demostración. Al igual que en la demostración del teorema de Liouville, si $z_0 \in \mathbb{C}$, tomamos C_R = el círculo de radio R centrado en z_0 , y acotamos

$$\begin{aligned}
 |f^{(k+1)}(z_0)| &= \left| \frac{(k+1)!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+2}} dw \right| \\
 &\leq \frac{(k+1)!}{2\pi} \oint_C \frac{|f(w)|}{R^{k+2}} dl \\
 &\leq \frac{(k+1)!}{2\pi} \oint_C \frac{C + D|w|^k}{R^{k+2}} dl \\
 &\leq \frac{(k+1)!}{2\pi} \oint_C \frac{\tilde{C}(z_0) + \tilde{D}(z_0)R^k}{R^{k+2}} dl = \frac{(k+1)!}{2\pi} \frac{\tilde{C}(z_0) + \tilde{D}(z_0)R^k}{R^{k+2}} 2\pi R \\
 &= \frac{cte_1(z_0)}{R^{k+1}} + \frac{cte_2(z_0)}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $f^{(k+1)} \equiv 0$ y en consecuencia f resulta un polinomio de grado a lo sumo k . \square

7.7. Tipos de ceros y principio de identidad

Mostraremos que salvo el caso $f \equiv 0$, los ceros de las funciones holomorfas son aislados.

Teorema 7.15. f holomorfa y $f(z_0) = 0$, si f no es idénticamente nula entonces existe $m \in \mathbb{N}$ y g holomorfa con $g(z_0) \neq 0$ y

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

Demostración. f es desarrollable Taylor alrededor de z_0 :

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Notamos que, a diferencia del caso C^∞ real, si $f \not\equiv 0$, entonces su desarrollo de Taylor no es idénticamente cero. Tomamos $m =$ el primer k tal que $a_k \neq 0$, luego, alrededor del cero vale

$$f(z) = (z - z_0)^m \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k-m} \right)$$

Tomamos $g =$ la serie habiendo sacado z^m de factor común. □

Ese m se llama el **orden** del cero.

Ejemplo 7.16. La función

$$\text{sen}(z) = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

se anula en $z = 0$. Como su desarrollo de Taylor empieza en el término lineal, podemos escribir

$$\text{sen}(z) = zg(z)$$

con g holomorfa y $g(0) \neq 0$. De hecho,

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k}$$

Vemos que g coincide con la función partida

$$g(z) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(z)}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

En otras palabras, la función " $\frac{\text{sen}(z)}{z}$ " es holomorfa en todos lados, aún en el cero si la extendemos por continuidad.

Corollario 7.17. f holomorfa no constante entonces sus ceros son aislados.

Demostración. Sea z_0 tal que $f(z_0) = 0$. Si f no es idénticamente nula, entonces escribimos $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ con g holomorfa alrededor de z_0 y $g(z_0) \neq 0$. La función $(z - z_0)^m$ sólo se nula en z_0 , y $g(z_0) \neq 0$, luego, por continuidad, g no se anula en un entorno de z_0 . Concluimos que existe un entorno de z_0 donde

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z)$$

se anula solamente en $z = z_0$. □

Corollario 7.18 (Principio de identidad). Si dos funciones holomorfas coinciden en un punto de acumulación entonces son iguales. Equivalentemente, si $z_n \rightarrow z$ y $z_n \neq z_m$ para todo $n \neq m$ y f holomorfa con $f(z_n) = 0 \forall n$ entonces $f \equiv 0$.

7.8. Cantidad de ceros

Teorema 7.19. Sea f holomorfa en Ω y C una curva cerrada simple que es borde de $D \subset \Omega$. Supongamos que f no se anula en C , entonces, la cantidad de ceros de f contenidos en D , contados con multiplicidad, coincide con

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

Demostración. Haremos la demostración para el caso de que f tenga un cero con cierta multiplicidad en el 0 y que la curva sólo encierra al 0.

Como en el Teorema 7.15, f holomorfa luego analítica alrededor del cero y podemos escribir $f(z) = z^n g(z)$ con g analítica y $g(0) \neq 0$. De hecho, g no tiene ceros "extra" porque si no f tendría ceros también. Tenemos

$$f' = nz^{n-1}g + z^n g'$$

Luego

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \oint_C \frac{nz^{n-1}g + z^n g'}{z^n g} dz = \oint_C n \left(\frac{1}{z} + \frac{g'}{g} \right) dz$$

como $g(0)$ no tiene ceros en esa región, el término g'/g es holomorfo y por lo tanto su integral da cero: la integral queda

$$= \oint_C n \frac{1}{z} dz = 2\pi i n$$

□

8. Desarrollo en series de Laurent, singularidades, residuos

Vimos antes que, gracias a la fórmula integral de Cauchy junto con la expansión en serie de la geométrica, toda función holomorfa en un disco se puede desarrollar en serie de Taylor. Veremos ahora lo que sucede cuando el dominio de la función holomorfa contiene no necesariamente un disco, pero sí un anillo. En este caso será desarrollable en *serie de Laurent*, donde se incluyen potencias tanto positivas como negativas.

8.1. Series de Laurent

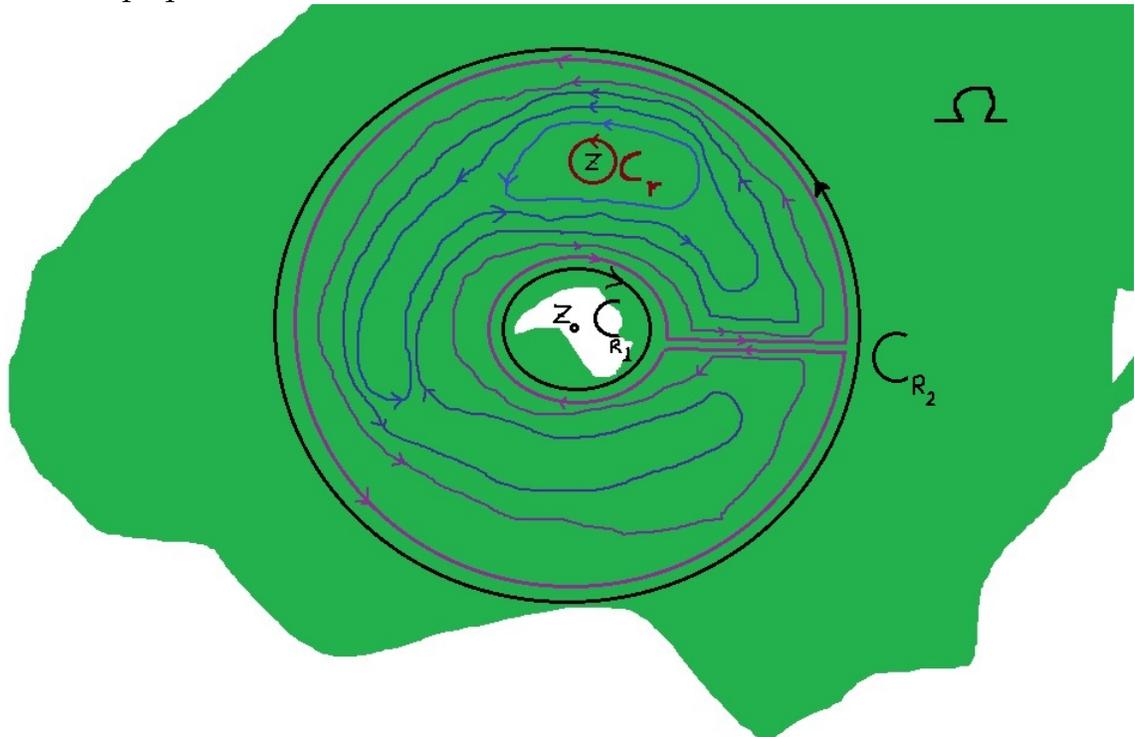
Proposición 8.1. $f(z)$ holomorfa en un abierto Ω que contiene al anillo

$$D_{R_1, R_2} = \{0 < R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2\}.$$

entonces, para $R_1 < |z - z_0| < R_2$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_2}} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Demostración. Tomamos z un punto interior del anillo, por la fórmula integral de Cauchy usual podemos calcular $f(z)$ usando cualquier curva C que encierre a z que sea una deformación de un pequeño círculo C_r alrededor de z :



Vemos del dibujo que C_r^+ se deforma en $C_{R_2}^+ \cup C_{R_1}^-$. Notar que C_{R_2} está orientada positivamente mientras que C_{R_1} está orientada negativamente, luego

$$\oint_{C_r} \frac{f(w)}{w-z} dw = \oint_{C_{R_2}} \frac{f(w)}{w-z} dw - \oint_{C_{R_1}} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Dividiendo por $2\pi i$ y usando la fórmula de Cauchy para C_r concluimos la fórmula. \square

Como corolario, utilizando la misma técnica que cuando demostramos el desarrollo en serie de Taylor, podemos mostrar el siguiente resultado:

Teorema 8.2 (Desarrollo en series de Laurent). $f(z)$ holomorfa en un abierto Ω que contiene al anillo

$$D_{R_1, R_2} = \{0 < R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2\}$$

entonces, para $R_1 < |z - z_0| < R_2$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$\text{donde } a_n = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_2}} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dz & \text{si } n \geq 0, \\ \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dz & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Demostración. Comenzamos con la fórmula

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_2}} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

que la re-escribimos como

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_2}} \frac{f(w)}{(w - z_0) - (z - z_0)} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(w)}{(w - z_0) - (z - z_0)} dw$$

Notamos que en la primera integral,

$$|z - z_0| < |w - z_0| = R_2$$

mientras que en la segunda,

$$R_1 = |w - z_0| < |z - z_0|$$

Por lo tanto es conveniente hacer un manejo algebraico levemente diferente en cada integral:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_2}} \frac{f(w)}{(w-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(w)}{(z-z_0)\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}-1\right)} dw \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_2}} \frac{f(w)}{(w-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} dw + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(w)}{(z-z_0)\left(1-\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)} dw
\end{aligned}$$

Ahora usamos la fórmula

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

válida para $|t| < 1$ para la primera integral con $t = \frac{z-z_0}{w-z_0}$ y para la segunda integral con $t = \frac{w-z_0}{z-z_0}$, y obtenemos

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_2}} \frac{f(w)}{(w-z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n dw + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(w)}{(z-z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n dw \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} dw
\end{aligned}$$

Usando convergencia uniforme

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_2}} \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(w)(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} dw$$

y como los factores de potencias de $(z-z_0)$ no dependen de la variable de integración:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_2}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right) (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} f(w)(w-z_0)^n dw \right) \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}$$

La primera sumatoria es de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ con a_n como en el enunciado. La segunda sumatoria está indexada por $n = 0, 1, 2, \dots$ pero claramente vemos que las potencias de $(z-z_0)$ que aparecen son todas negativas, así que haciendo un cambio de variable

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \tilde{n} := -(n+1), \quad \tilde{n} = -1, -2, -3, -4, \dots$$

tenemos $n = -\tilde{n} - 1$ y

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} f(w)(w-z_0)^n dw \right) \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} = \sum_{\tilde{n}=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{\tilde{n}+1}} dw \right) (z-z_0)^{\tilde{n}}$$

Por lo tanto podemos unificar ambas sumatorias en una sola, de la forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

donde a_n tiene "la misma" fórmula para n positivo y negativo, con la diferencia de que en los $n \geq 0$ se usa la integral sobre C_{R_2} mientras que para los $n < 0$ se usa C_{R_1} . □

8.2. Un ejemplo fácil de cálculo de serie de Laurent

Consideremos la función $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$$

Claramente tiene singularidades en 0 y en 1. Podemos desarrollar en series de Laurent alrededor de varios puntos y en distintos anillos:

Alrededor de $z_0 = 0$

- Caso $|z| < 1$. Usando el conocido desarrollo de la serie geométrica, tenemos

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{z} - 1 - z^2 - z^3 - z^4 - \dots$$

Este desarrollo es válido en $0 < |z| < 1$

(dibujo)

- Si $|z| > 1$, el desarrollo anterior de la serie geométrica no es convergente, es conveniente en este caso arreglar las potencias de otra manera. Cuando $|z| > 1$, claramente $|\frac{1}{z}| < 1$ por lo que es conveniente usar la geométrica con potencias para $\frac{1}{z}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \frac{1}{(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots \end{aligned}$$

Este desarrollo es válido en $|z| > 1$.

Alrededor de $z_0 = 1$

Ahora, en la fórmula

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$$

el segundo sumando ya es una potencia de $z-1$, debemos calcular el desarrollo en serie de Laurent del primer sumando alrededor del 1, para esto escribimos

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-1)+1} + \frac{1}{z-1}$$

Podemos hacer un estudio similar al caso anterior, o bien llamando $w := (z-1)$ tenemos

- Si $0 < |w| < 1$, o equivalentemente $0 < |z - 1| < 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{w+1} + \frac{1}{w} \\ &= \frac{1}{w} + 1 - w^2 + w^3 - w^4 - \dots \\ &= \frac{1}{(z-1)} + 1 - (z-1)^2 + (z-1)^3 - (z-1)^4 - \dots \end{aligned}$$

(dibujo)

- Si $|w| > 1$, o equivalentemente $1 < |z - 1|$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{w+1} + \frac{1}{w} = \frac{1}{w} \frac{1}{(1 + \frac{1}{w})} + \frac{1}{w} \\ &= \frac{1}{w} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{w^n} \right) + \frac{1}{w} \\ &= \frac{2}{w} - \frac{1}{w^2} + \frac{1}{w^3} - \frac{1}{w^4} + \dots = \frac{2}{(z-1)} - \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} - \frac{1}{(z-1)^4} + \dots \end{aligned}$$

Pero $z_0 = 1$ y $z_0 = -1$ no son los únicos puntos alrededor de los cuales se puede considerar el desarrollo de Laurent. Haremos el caso $z_0 = \frac{1}{2}$.

Alrededor de $z_0 = \frac{1}{2}$

- Caso $|z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$. Claramente f es holomorfa en $z_0 = \frac{1}{2}$, luego para $|z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ tendremos un *desarrollo de Taylor*. En efecto

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{(z - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}} + \frac{1}{(z - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}(1 + 2(z - \frac{1}{2}))} - \frac{1}{\frac{1}{2}(1 - 2(z - \frac{1}{2}))} \\ &= \frac{2}{1 + u} - \frac{2}{1 - u} \end{aligned}$$

donde $u = 2(z - \frac{1}{2})$, y usando la geométrica

$$\begin{aligned} \frac{2}{1+u} - \frac{2}{1-u} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-u)^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} u^n = -4 \sum_{n=0}^{\infty} u^{2n+1} \\ &= -4 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n+1} (z - \frac{1}{2})^{2n+1} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} 4^{n+1} (z - \frac{1}{2})^{2n+1} \end{aligned}$$

- Sin embargo, el desarrollo anterior no es válido para $|z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$. Ahora podemos considerar la región

(dibujo)

En esa zona habrá un desarrollo en serie de Laurent, que podemos calcular también a partir de manipulaciones algebraicas:

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}} + \frac{1}{(z - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}}$$

Lo único que ahora $|z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$ por lo que no es conveniente sacar factor común $\frac{1}{2}$, sino $(z - \frac{1}{2})$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}} + \frac{1}{(z - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}} &= \frac{1}{(z - \frac{1}{2})} \left(\frac{1}{1 + \frac{\frac{1}{2}}{z - \frac{1}{2}}} + \frac{1}{1 - \frac{\frac{1}{2}}{z - \frac{1}{2}}} \right) \\ &= \frac{1}{(z - \frac{1}{2})} \left(\frac{1}{1 + u} + \frac{1}{1 - u} \right) \end{aligned}$$

donde $u = \frac{\frac{1}{2}}{z - \frac{1}{2}}$. Luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z - \frac{1}{2})} \left(\frac{1}{1 + u} + \frac{1}{1 - u} \right) &= \frac{1}{(z - \frac{1}{2})} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n + \sum_{n=0}^{\infty} u^n \right) \\ &= \frac{1}{(z - \frac{1}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} 2u^{2n} = \frac{1}{(z - \frac{1}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} 2 \left(\frac{\frac{1}{2}}{z - \frac{1}{2}} \right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{2}{4^n}}{(z - \frac{1}{2})^{2n+1}} \end{aligned}$$

Concluimos que para $|z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$ es válido el desarrollo

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{2}{4^n}}{(z - \frac{1}{2})^{2n+1}}$$

8.3. Singularidades aisladas

El objetivo de esta sección es obtener una descripción de los tipos de singularidades aisladas de las funciones holomorfas. Hay varios enunciados equivalentes, uno de ellos es el siguiente:

Teorema 8.3. *Sea f holomorfa en un abierto Ω que contiene un disco punteado $D \setminus \{z_0\}$ donde $D =$ un disco (de cierto radio positivo) centrado en z_0 . Entonces hay tres posibilidades para el tipo de singularidad de f en z_0 :*

1. (singularidad evitable) f se puede definir en z_0 de manera que f sea continua en z_0 y automáticamente será holomorfa en z_0 ,

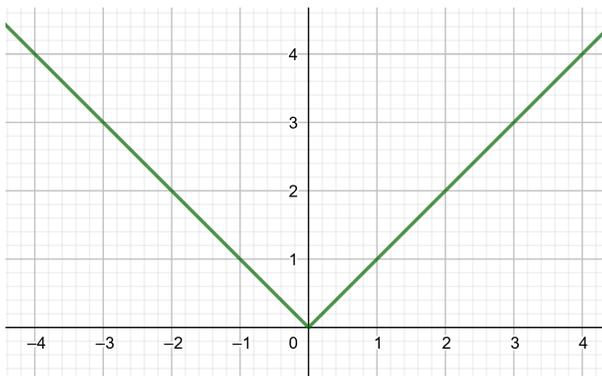
2. (polo de orden m) $\exists m \in \mathbb{N}$ y $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con $g(z_0) \neq 0$ tal que $\forall z \in D \setminus \{z_0\}$ vale

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

3. (singularidad esencial) no existe ninguna potencia $m \in \mathbb{N}$ tal que $(z - z_0)^m f(z)$ tenga límite cuando $z \rightarrow z_0$.

Observamos la diferencia con el caso real a través de un ejemplo.

Ejemplo 8.4. Consideramos la función módulo de un número real: $f(x) = |x|$.



Claramente $f(x) = |x|$ es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y también es claro que $\exists \lim_{x \rightarrow 0} |x|$. Esto dice que $f(x) = |x|$, además de ser derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, también es *continua* en \mathbb{R} incluyendo el 0. ¡Pero de ninguna manera eso implica que f sea derivable en 0! Contrariamente al caso real, en el caso complejo esta situación nunca se da. Si una función f es holomorfa en un disco salvo eventualmente un punto z_0 y $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ (es decir, f se puede extender por continuidad en z_0) entonces también será derivable ahí.

Volviendo a las singularidades aisladas en los complejos, antes de demostrar el Teorema 8.3, observamos una f holomorfa en un disco salvo su centro z_0 , tiene un desarrollo en series de Laurent alrededor de z_0 . Para $z \in D \setminus \{z_0\}$ vale

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

A partir de esta descripción en serie de Laurent vemos que hay una tricotomía: la serie de Laurent bien podría ser una serie de Taylor, o bien puede empezar en alguna potencia negativa, o bien puede tener infinitas potencias negativas. Esta tricotomía corresponde a la primera parte de la siguiente proposición, la segunda parte es una caracterización alternativa:

Teorema 8.5. Hay tres posibilidades:

1. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ con $n_0 \geq 0$, en ese caso, extendiendo f de manera continua resulta holomorfa.
2. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ con $n_0 < 0$,
3. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ con infinitos $a_n \neq 0$ y $n < 0$.

que corresponden a las siguientes tres situaciones:

1. (Singularidad evitable) $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.
En ese caso, extendiendo a f de manera continua en z_0 , resulta holomorfa en z_0 .
2. (Polo de orden m) $\nexists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ pero $\exists 0 < m \in \mathbb{N}$ tal que $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$ y es $\neq 0$.
En ese caso, $\exists g$ holomorfa en D con $g(z_0) \neq 0$ y $f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} g(z)$, $\forall z \in D \setminus \{z_0\}$.
3. (Singularidad esencial) $\forall m \in \mathbb{N}$, $\nexists \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$.
En otras palabras, la singularidad de f en z_0 "no se arregla" con ninguna potencia de $(z - z_0)$.

Antes de la demostración, notemos la siguiente observación sobre el comportamiento de la parte negativa en singularidades aisladas:

Observación 8.6. Sean $R \in \mathbb{R}_{>0}$, $D = \{z : |z - z_0| \leq R\}$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $D \setminus \{z_0\} \subset \Omega$. Si consideramos su desarrollo en serie de Laurent en centrado en z_0 :

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ tiene radio de convergencia al menos R (pues es convergente para $|z - z_0| = R$) y la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$$

tiene radio de convergencia infinito, pues es convergente en $\frac{1}{z - z_0}$ para z tan cercano a z_0 como querramos, es decir, convergente en w para w de módulo arbitrariamente grande.

En particular $s(w) := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$ es una función entera.

Demostración del Teorema 8.5. Lo único no trivial es ver que si

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

con infinitos $a_n \neq 0$ con n negativos, entonces para cualquier $m \in \mathbb{N}$,

$$\nexists \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$$

Escribimos, alrededor de z_0 , $f = f_+ + f_-$ donde

$$f_+(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

$$f_-(z) = \sum_{n < 0} a_n (z - z_0)^n$$

Como f_+ es analítica, es claro que existe $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f_+(z)$ para cualquier m , por lo que basta probar que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \nexists \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f_-(z)$$

Como vimos en la observación anterior, al poder evaluar

$$f_-(z) = \sum_{n < 0} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n > 0} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n}$$

en cualquier z arbitrariamente cercano a z_0 , esto significa que la serie de potencias

$$s(w) = \sum_{n > 0} a_{-n} w^n$$

tiene radio de convergencia infinito y por lo tanto una función *entera*. Pero además tiene infinitos coeficientes no nulos así que *no es* un polinomio.

Si existiera m_0 con

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{m_0} f_-(z) = 0$$

en particular, esa expresión sería acotada en un disco de un cierto radio r , es decir, existiría $C > 0$ tal

$$|z - z_0|^{m_0} \left| \sum_{n > 1} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n} \right| < C$$

Llamando como antes $w := \frac{1}{z - z_0}$, tendríamos

$$\frac{1}{|w|^{m_0}} \left| \sum_{n > 1} a_{-n} w^n \right| < C$$

para todo w en el exterior de un disco de radio $1/r$, o sea

$$\left| \sum_{n>1} a_{-n} w^n \right| < C|w|^{m_0}$$

Como en el interior y borde del disco de radio $1/r$ esa misma expresión es acotada por continuidad y compacidad (digamos $\leq A$), se sigue que

$$\left| \sum_{n>1} a_{-n} w^n \right| < A + C|w|^{m_0}, \forall w \in \mathbb{C}$$

Pero el Teorema 7.14 (de Liouville generalizado) implica que $s(w)$ debería ser un polinomio de grado a lo sumo m_0 , y estamos en el caso en que justamente hay infinitos a_{-n} no nulos, por lo tanto llegamos a un absurdo. \square

Observación 8.7. Los polos de f (de orden m) se corresponden con los ceros de $\frac{1}{f}$ (de orden m), y si f tiene una singularidad esencial aislada en z_0 entonces $\frac{1}{f}$ también.

Demostración. Si f tiene una singularidad aislada en z_0 , al juntar las posibilidades de singularidad evitable y polo, tenemos la dicotomía:

- o bien (Singularidad evitable o polo) $\exists m \in \mathbb{Z}$ tal que $(z - z_0)^m f(z)$ tiene límite no nulo cuando $z \rightarrow z_0$,
- o bien f tiene una singularidad esencial en z_0 .

Claramente la primera opción es estable por cambiar $f \leftrightarrow \frac{1}{f}$, por lo tanto la segunda opción también. \square

Ejemplo 8.8. La función

$$f(z) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{z} \right)$$

es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, tiene ceros en $z = \frac{1}{n}$ con $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ y tiene una singularidad esencial en $z = 0$. A su vez, la función

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{z} \right)}$$

tiene singularidades que son polos (de orden 1) en $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ y tiene una singularidad esencial en $z = 0$. Notar que, a diferencia de los ceros, las singularidades podrían ser *no aisladas*, como es el caso de $z = 0$ en este ejemplo.

Definición 8.9. f en Ω se dice **meromorfa** si es holomorfa salvo puntos aislados en los cuales tiene a lo sumo polos.

Ejemplo 8.10. Sean $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfas y supongamos que g no es la función idénticamente nula. Entonces $\frac{f}{g}$ es meromorfa en Ω , pues las únicas singularidades que podrían aparecer serían por los ceros de g son siempre aislados éstas singularidades dan a lo sumo polos.

8.4. Residuos: Integración de funciones con singularidades aisladas

Definición 8.11. Sea z_0 una singularidad aislada de f , se define

$$\text{Res}(f, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$$

donde una curva cerrada simple orientada positivamente que encierra a z_0 (y a ninguna otra singularidad).

Observación 8.12. Si z_0 es una singularidad aislada de f y $C_R = \{z : |z - z_0| = R\}$ (orientada positivamente) entonces

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} f(z) dz$$

Teorema 8.13. si $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ alrededor de z_0 , entonces

$$\boxed{\text{Res}(f, z_0) := a_{-1}}$$

Demostración. Es claro que si

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty, n \neq -1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + a_{-1} \frac{1}{z - z_0} \\ &= \left(\sum_{n=-\infty, n \neq -1}^{\infty} \frac{a_n(z - z_0)^{n+1}}{n+1} \right)' + a_{-1} \frac{1}{z - z_0} \end{aligned}$$

Como para cualquier holomorfa g y curva cerrada C vale $\oint_C g'(z) dz = 0$ concluimos

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C a_{-1} \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} a_{-1} 2\pi i = a_{-1}$$

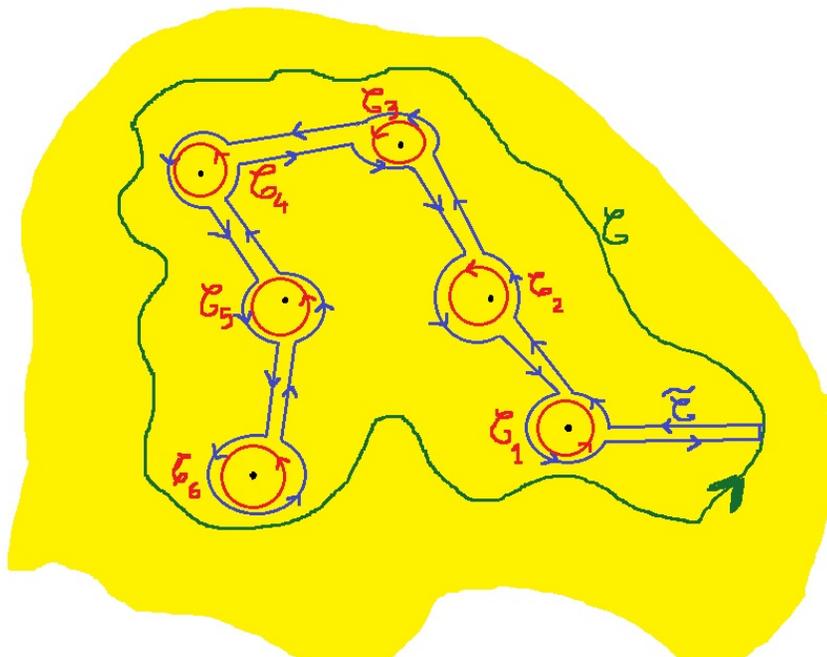
□

Un corolario inmediato, pero de increíble utilidad es el siguiente:

Teorema 8.14. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, $C \subset \Omega$ una curva cerrada simple orientada positiva, de forma tal que f es holomorfa en todo el interior de la curva salvo eventualmente una cantidad de puntos, si denotamos $\text{Sing}(f, C) = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ al conjunto de singularidades de f encerradas por la curva C , entonces

$$\oint_C f = 2\pi i \sum_{z \in \text{Sing}(f, C)} \text{Res}(f, z) = 2\pi i \sum_{i=1}^k \text{Res}(f, z_k)$$

Demostración. La demostración se visualiza a través de la deformación de la curva \mathcal{C} y la unión disjunta de pequeños círculos alrededor de cada singularidad:



por lo que

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = \oint_{\tilde{\mathcal{C}}} f(z) dz = \sum_{i=1}^k \oint_{\mathcal{C}_i} f(z) dz = \sum_{i=1}^k 2\pi i \text{Res}(f, z_k)$$

□

Ejemplo 8.15. Consideremos $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^3 - 1}$. Esta función es holomorfa salvo en las tres raíces cúbicas de la unidad:

$$\text{Sing}(f) = \{1, \omega, \bar{\omega}\}$$

donde $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Si queremos calcular por ejemplo el residuo de f en ω , vemos que

$$f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^3 - 1} = \frac{e^{z^2}}{(z - \omega)(z - \bar{\omega})(z - 1)}$$

y deberíamos calcular el desarrollo en serie de Laurent de f alrededor de ω . Pero observamos que f es de la forma

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - \omega)p(z)} = \frac{1}{(z - \omega)} \frac{g(z)}{p(z)}$$

donde $\frac{g(z)}{p(z)}$ es holomorfa en $z_0 = \omega$ pues $p(z)$ no se anula en ω , y además $g(z)$ tampoco se anula. Si desarrolláramos Taylor la función $\frac{g(z)}{p(z)}$ alrededor de $z_0 = \omega$ obtendríamos una

expresión de la forma

$$\frac{g(z)}{p(z)} = \frac{g(\omega)}{p(\omega)} + c_1(z - \omega) + c_2(z - \omega)^2 + \dots$$

y por lo tanto

$$f(z) = \frac{1}{(z - \omega)} = \frac{1}{(z - \omega)} \frac{g(\omega)}{p(\omega)} + c_1 + c_2(z - \omega) + \dots$$

y concluimos

$$\text{Res}(f, z_0 = \omega) = \frac{g(\omega)}{p(\omega)}$$

Por otra parte,

$$\frac{g(\omega)}{p(\omega)} = \lim_{z \rightarrow \omega} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow \omega} (z - z_0) \frac{e^{z^2}}{z^3 - 1} = e^{\omega^2} \lim_{z \rightarrow \omega} \frac{(z - \omega)}{z^3 - 1}$$

y usando la regla de l'Hôpital

$$= e^{\omega^2} \lim_{z \rightarrow \omega} \frac{1}{(z^3 - 1)'} = e^{\omega^2} \lim_{z \rightarrow \omega} \frac{1}{3z^2} = e^{\omega^2} \frac{1}{3\omega^2}$$

Concluimos entonces

$$\text{Res}(f, z_0 = \omega) = e^{\omega^2} \frac{1}{3\omega^2} = e^{\bar{\omega}} \frac{1}{3\bar{\omega}} = e^{\bar{\omega}} \frac{1}{3} \omega = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} e^{i(\sqrt{3}/2 + 2\pi/3)}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_0 = \bar{\omega}) &= \frac{g(\omega)}{p'(\omega)} = \frac{e^{\bar{\omega}^2}}{3\bar{\omega}^2} = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} e^{-i(\sqrt{3}/2 + 2\pi/3)} \\ \text{Res}(f, z_0 = 1) &= \frac{e}{3} \end{aligned}$$

Ahora sabemos que, si integramos f en una curva cerrada simple orientada positivamente, sólo necesitamos saber cuáles de las singularidades quedaron encerradas por la curva, el resultado de la integral será $2\pi i$ veces la suma de los respectivos residuos. Por ejemplo, si solamente encierra al 1, la integral dará $2\pi i \frac{e}{3}$.

8.5. Fórmula útil de Residuo

Repitiendo el argumento de cálculo de residuo del ejemplo anterior podemos demostrar la siguiente fórmula, elemental pero bastante útil:

Proposición 8.16. Consideremos una función de la forma $\frac{g(z)}{p(z)}$ con g y p holomorfas alrededor de z_0 . Si $g(z_0) \neq 0$ y p tiene un cero simple en z_0 entonces

$$\boxed{\text{Res}\left(\frac{g(z)}{p(z)}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{p'(z_0)}}$$

Demostración. Como p tiene un cero simple en z_0 , el residuo de g/p en z_0 se puede calcular como

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{p(z)} = g(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)}{p(z)}$$

y por la regla de L'Hôpital

$$= g(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)'}{p'(z)} = g(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{p'(z)} = g(z_0) \frac{1}{p'(z_0)}$$

□

8.6. Derivada logarítmica, cantidad de ceros y de polos

La derivada logarítmica de f se define, donde $f(z) \neq 0$, como

$$\boxed{\frac{f'(z)}{f(z)}}$$

Proposición 8.17. ■ Si f tiene un cero de orden m en z_0 , su derivada logarítmica tiene un polo simple, y

$$\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = m$$

Obs: en esto se basó el calculo de cantidad de ceros

■ Si f tiene un polo de orden m en z_0 , su derivada logarítmica tiene un polo simple, y

$$\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = -m$$

Corollario 8.18. f definida en $\Omega \supset D$ y holomorfa en Ω salvo cantidad finita de puntos donde las singularidades son a lo sumo polos, entonces $C = \partial D$ entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(w)}{f(w)} dw = \#\{\text{ceros}\} - \#\{\text{polos}\}$$

contados con multiplicidad.

Observación 8.19. ■ Si f tiene un polo simple en z_0 y g es holomorfa en z_0 entonces

$$\text{Res}(fg, z_0) = g(z_0)\text{Res}(f, z_0)$$

■ Si f tiene un polo de orde 2 en z_0 y g es holomorfa en z_0 entonces

$$\text{Res}(fg, z_0) = g(z_0)\text{Res}(f, z_0) + g'(z_0)\text{Res}((z - z_0)f, z_0)$$

8.7. El teorema de Rouché

Teorema 8.20. $C = \partial D$, f y g holomorfas en un dominio que contiene a \bar{D} . Si $|f - g| < |g|$ en C , entonces la cantidad de ceros de f y de g adentro de C es la misma.

Demostración. notar que ni f ni g pueden ser cero en C . Consideraremos al función $\frac{f(z)}{g(z)}$.

Queremos ver que

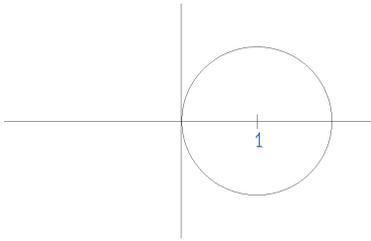
$$\#Z(f) = \#Z(g)$$

en D , o bien, que $\#Z(f) - \#Z(g) = 0$. Recordamos que la cantidad de ceros de f y de g , en la región D encerrada por C se puede calcular como

$$\oint_C \frac{f'}{f} = \#Z(f), \quad \oint_C \frac{g'}{g} = \#Z(g),$$

Pero $|f - g| < |g|$ en C implica que g no se puede anular en C , más aún

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1$$



Es decir, la función f/g restringida al área encerrada por la curva tiene imagen contenida en ese círculo, y ahí está bien definida una rama (por ejemplo la principal) del Logaritmo! Por lo tanto, en un abierto que contiene a C , la función

$$z \mapsto \Phi(z) := \ln \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right)$$

es analítica, y su derivada es

$$\Phi'(z) = \frac{1}{\left(\frac{f}{g}\right)} \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g}{f} \frac{f'g - gf'}{g^2} = \frac{f'g - gf'}{fg} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$$

Concluimos que

$$\oint_C \frac{f'}{f} - \oint_C \frac{g'}{g} = \oint_C \Phi' = 0$$

pues la integral de la derivada de una holomorfa, en cualquier curva cerrada, es cero. \square

8.8. Residuo en el infinito

Se dice que f es holomorfa alrededor del infinito si existe un $R > 0$ tal que f es holomorfa en $\{z : |z| > R\}$. Si ése es el caso, entonces la función f^* dada por

$$f^*(z) := f \left(\frac{1}{z} \right)$$

resulta holomorfa alrededor del 0. Se dice que f tiene un cero en ∞ si f^* tiene un cero en cero. De manera análoga se define polo, y se calculan sus órdenes:

Definición 8.21. Son equivalentes

- f tiene un cero de orden $k \geq 0$ en ∞
- f^* tiene un cero de orden $k \geq 0$ en 0
- $\exists \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(1/z)}{z^k} \neq 0$
- $\exists \lim_{z \rightarrow \infty} z^k f(z) \neq 0$

Uno podría estar tentado de definir el residuo en el infinito de f por el residuo en el cero de $f^*(z) = f(\frac{1}{z})$, sin embargo, si lo que queremos es obtener el resultado de una integral, observamos que en realidad deberíamos transformar la expresión $f(z)dz$ y no sólo $f(z)$, y si realizamos esa operación observamos

$$f(z)dz \rightsquigarrow f\left(\frac{1}{z}\right)d\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2}dz$$

Etso motiva la *definición* de residuo en el infinito no como el residuo de $f(1/z)$ en 0 sino

Definición 8.22.

$$\text{Res}(f, \infty) := \text{Res}\left(\frac{-f(1/z)}{z^2}, 0\right)$$

El siguiente resultado relaciona el comportamiento en el infinito con el comportamiento en el resto de las singularidades:

Teorema 8.23. C una curva cerrada simple, $C = \partial D$. Supongamos que f esta definida en un dominio que contiene a C y que contiene a $\mathbb{C} \setminus D$ (la parte de afuera de C), supongamos que f no tiene ninguna singularidad (salvo eventualmente en ∞) en $\mathbb{C} \setminus D$, entonces

$$\oint_C f(w)dw = \oint_{|z|=1/R} \frac{f(1/z)}{z^2}dz$$

Demostración. Podemos suponer $C =$ círculo de radio R con R suficientemente grande, es decir C esta parametrizada por $\sigma(t) = Re^{it}$, y

$$\oint_{C_R} f(w)dw = \int_0^{2\pi} f(Re^{it})iRe^{it}dt$$

Por otra parte, tomando la curva $|z| = 1/R$, que se parametriza con $\gamma(t) = \frac{1}{R}e^{it}$, la integral del lado derecho del enunciado se calcula como

$$\oint_{|z|=1/R} \frac{f(1/z)}{z^2}dz = \int_0^{2\pi} \frac{f\left(\frac{1}{e^{it}/R}\right)}{\frac{1}{R^2}e^{2it}} \frac{1}{R}ie^{it}dt$$

$$= \int_0^{2\pi} Rf(Re^{-it})ie^{-it}dt$$

Si hacemos le cambio de variable $\tilde{t} = 2\pi - t \implies d\tilde{t} = -dt$ y queda

$$= \int_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=2\pi} Rf(Re^{i\tilde{t}})ie^{i\tilde{t}}(-d\tilde{t})$$

Pero $\tilde{t} = 0 \Leftrightarrow t = 2\pi$ y $\tilde{t} = 2\pi \Leftrightarrow t = 0$, entonces

$$- \int_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=2\pi} Rf(Re^{i\tilde{t}})ie^{i\tilde{t}}d\tilde{t} = - \int_{2\pi}^0 Rf(Re^{i\tilde{t}})ie^{i\tilde{t}}d\tilde{t} = + \int_0^{2\pi} Rf(Re^{i\tilde{t}})ie^{i\tilde{t}}d\tilde{t}$$

□

Corollario 8.24. Si f tiene una cantidad finita de singularidades, entonces la suma de todos los residuos, incluido el residuo en el infinito, da cero.

Demostración. Tomando un radio suficientemente grande, como la cantidad de singularidades es finita, en algún momento quedarán todas encerradas. La suma de todos los residuos se puede calcular entonces con la integral con ese radio grande vía

$$\sum_{z \in \text{Sing}(f), z \in \mathbb{C}} \text{Res}(f, z) = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} f(w)dw$$

pero en virtud del Teorema 8.23 eso se puede calcular con

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{1/R}} \frac{f(1/z)}{z^2} dz = -\text{Res}(f, \infty)$$

□

Ejemplo 8.25. Si $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ es válido en el infinito (por ejemplo $f(z) = \frac{1}{z}$), entonces

$$\text{Res}(f, \infty) := -a_{-1}$$

(En particular, $\text{Res}(f, \infty) + \text{Res}(f, 0) = 0$)

En efecto,

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n \implies f^*(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^{-n} \implies -\frac{f^*(z)}{z^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} -a_n z^{-n-2}$$

y el término con potencia z^{-1} corresponde a

$$-n - 2 = -1 \iff n = -1$$

Ejemplo 8.26. Consideremos $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2 + 1}$. Sus puntos singulares (en \mathbb{C}) son $\{0, i, -i\}$. En 0 tiene una singularidad esencial, mientras que en $\pm i$ tiene polos de orden 1. Los residuos en $\pm i$ son fáciles de calcular, derivando el polinomio del denominador (ver Proposición 8.16):

$$\text{Res}(f, i) = \frac{e^{\frac{1}{i}}}{2i}, \quad \text{Res}(f, -i) = \frac{e^{\frac{1}{-i}}}{2(-i)}$$

sin embargo, para calcular el residuo en el cero, la cuenta es más complicada. Podemos calcular el desarrollo en serie de Laurent y ver el término a_{-1} :

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2 + 1} = \frac{1}{1 + z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$$

Calculamos el desarrollo en serie (de Taylor) de $\frac{1}{1+z^2}$ alrededor del cero, que es

$$\frac{1}{1 + z^2} = \frac{1}{1 - (-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

y habría que hacer el producto de Cauchy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n?) z^n$$

y ver el término a_{-1} . Esto se puede hacer, pero resulta mucho más sencillo calcular el residuo en el infinito:

$$\text{Res}(f, \infty) = \text{Res}\left(-\frac{f(\frac{1}{z})}{z^2}, 0\right) = \text{Res}\left(-\frac{e^z}{z^2(\frac{1}{z^2} + 1)}, 0\right) = \text{Res}\left(-\frac{e^z}{1 + z^2}, 0\right) = 0$$

pues $\frac{e^z}{1 + z^2}$ es holomorfa en 0. Concluimos

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i) + \text{Res}(f, \infty) \\ &= \text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i) + 0 \end{aligned}$$

y podemos despejar

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 0) &= -\text{Res}(f, i) - \text{Res}(f, -i) \\ &= -\frac{e^{\frac{1}{i}}}{2i} - \frac{e^{\frac{1}{-i}}}{-2i} = \frac{e^i - e^{-i}}{2i} = \text{sen}(1) \end{aligned}$$

8.9. Cálculo de integrales reales usando residuos

8.9.1. Ejemplos del tipo $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = ?$

En general, para una función de dos variables evaluada en \sin y \cos , si $z = e^{it}$ entonces

$$R(\cos(t), \sin(t)) = R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right), \quad dz = ie^{it} dt = iz dt$$

por lo que

$$\boxed{\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t)) dt = \oint_{C_1} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}}$$

donde C_1 es el círculo unitario orientado positivamente. Si la formula resultante fuera holomorfa con ciertas singularidades, esta integral puede ser calculada por los residuos encerrados en el círculo unitario. Por ejemplo, si R es una función racional en \cos y \sin , entonces

$$R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{1}{iz}$$

resulta ser racional en z !

Ejemplo 8.27. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos(t)} dt = ?$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos(t)} dt &= \int_{C_1} \left(\frac{1}{5 + 4 \frac{(z+z^{-1})}{2}} \right) \frac{1}{iz} dz \\ &= \int_{C_1} \left(\frac{z}{5z + 2(z^2 + 1)} \right) \frac{1}{iz} dz = -i \int_{C_1} \frac{1}{5z + 2(z^2 + 1)} dz \\ &= 2\pi \sum_{z_0 \in D} \text{Res} \left(\frac{1}{5z + 2z^2 + 2}, z_0 \right) \end{aligned}$$

donde D es el interior del disco unitario. Para encontrar las singularidades vemos donde se anula el denominador:

$$5z + 2z^2 + 2 = 0 \implies z = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times 2}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4} \in \left\{ -2, -\frac{1}{2} \right\}$$

Como $\frac{1}{5z + 2z^2 + 2} = \frac{A}{z + 2} + \frac{B}{z + \frac{1}{2}}$ y $z_0 = -2$ queda *afuera* del círculo de radio 1, mientras que $z_0 = \frac{1}{2}$ queda *adentro*, concluimos

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos^2(t)} dt = 2\pi \text{Res} \left(\frac{1}{5z + 2z^2 + 2}, z_0 = -\frac{1}{2} \right) = 2\pi B$$

Ejercicio: $B = 1/3$, $A = -B$ resuelve el problema de fracciones simples, luego

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos(t)} dt = \frac{2}{3}\pi$$

O bien, sin usar fracciones simples, sabiendo que se trata de un polo simple,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{5z + 2z^2 + 2}, z_0 = \frac{1}{2}\right) &= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{P(z)}, z_0 = \frac{1}{2}\right) = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{z + \frac{1}{2}}{P(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(z + \frac{1}{2})'}{P'(z)} = \frac{1}{P'(z)} = \frac{1}{5 - 4\frac{1}{2}} = \frac{1}{5 - 2} = \frac{1}{3} \\ \implies \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos(t)} dt &= 2\pi \operatorname{Res}\left(\frac{1}{5z + 2z^2 + 2}, z_0 = -\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

8.9.2. Integrales el tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

Supongamos que el grado de Q es mayor o igual al de $P+2$ y que $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y supongamos que Q no tiene raíces reales, de forma que la integral en \mathbb{R} converge (absolutamente).

Proposición 8.28. Denotando $\mathbb{H}_+ = \{z = a + bi \in \mathbb{C} : b > 0\}$ al semiplano complejo superior, la integral impropia de P/Q se calcula con los residuos de las raíces de Q que están en \mathbb{H}_+ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{z \in \mathbb{H}_+ : Q(z)=0} \operatorname{Res}(P/Q, z_i)$$

Demostración. La condición de que el grado de Q es mayor o igual al de $P+2$ hace que para $|z| = R$ con R grande valga

$$\frac{|p(z)|}{|q(z)|} \leq cte \frac{1}{R^2}$$

(pues $\frac{|z^2 P(z)|}{|Q(z)|}$ es acotado para $|z|$ grande) entonces, si \mathcal{C} es la curva "semicircunferencia de radio R en el semiplano superior", parametrizada por

$$\sigma(t) = Re^{it}, \quad t \in [0, \pi]$$

la integral sobre esa curva se puede acotar

$$\left| \int_{\mathcal{C}} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} iRe^{it} dt \right| \leq cte \int_0^\pi \frac{1}{R^2} R dt = \frac{cte'}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Por otra parte, si calculamos

$$\int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \int_C \frac{P(z)}{Q(z)} dz$$

es una integral en una curva cerrada, y da la suma de los residuos encerrados, que tiende a la suma de todos los residuos en el semiplano superior, pues en algún momento, para R grande, quedan todos encerrados, porque Q tiene finitos ceros, y esos son los únicos posibles lugares de residuos.

O sea que a partir de un momento (para algún R_0 y los $R \geq R_0$), esa integral da constantemente la suma de residuos. Pero el primer sumando tiende a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, que es lo que queremos calcular, y la otra tiende a cero.

□

Ejemplo 8.29. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \pi.$

En efecto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \sum_{z_i \in \mathbb{H}_+} \text{Res}\left(\frac{1}{z^2 + 1}, z_i\right)$$

Pero las raíces de $z^2 + 1$ son $\pm i$, hay una sola singularidad en el semiplano superior, tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{1}{z^2 + 1}, i\right) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi$$

Si este ejemplo también lo hubiéramos podido calcular usando la arcotangente como primitiva, el método lo podemos usar en otros casos donde la primitiva no es tan clara:

Ejemplo 8.30. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx = ?$

Factorizamos el denominador:

$$x^4 + 1 = (x^2 + i)(x^2 - i)$$

Llamemos

$$\alpha := \frac{1 + i}{\sqrt{2}}$$

podemos ver que $\alpha^2 = i$, luego

$$x^2 - i = (x - \alpha)(x + \alpha)$$

A su vez,

$$\bar{\alpha}^2 = \bar{\alpha}^2 = i^2 = -i$$

por lo tanto

$$x^2 + i = (x - \bar{\alpha})(x + \bar{\alpha})$$

En resumen, las raíces de $x^4 + 1$ son

$$\{\alpha, \bar{\alpha}, -\alpha, -\bar{\alpha}\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i) \right\}$$

Claramente los polos en el semiplano superior corresponden a

$$z_0 \in \{\alpha, -\bar{\alpha}\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 + i) \right\}$$

Calculamos ahora los residuos, usando la fórmula de la proposición 8.16 para una función del tipo $\frac{f(z)}{p(z)}$ donde f y p son holomorfas, $f(z_0) \neq 0$ y $p(z_0)$ tiene un polo simple:

$$\text{Res}\left(\frac{f(z)}{p(z)}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{p'(z_0)}$$

obtenemos

$$\text{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, \alpha\right) + \text{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, -\bar{\alpha}\right) = \frac{1}{4\alpha^3} + \frac{1}{4(-\bar{\alpha})^3}$$

y usando $a^4 = -1$ para $a = \alpha, -\bar{\alpha}$,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}(-\alpha + \bar{\alpha}) = \frac{1}{4} \frac{-2i}{\sqrt{2}} = \frac{-i}{2\sqrt{2}} \\ \implies \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx &= 2\pi i \frac{-i}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Ejemplo 8.31. Si $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $a \neq \pm b$ entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx = ?$

Este es un ejemplo de factorización más fácil ya que tiene raíces $\pm ia$ y $\pm ib$, las que están en el semiplano superior son ia, ib (asumimos $a, b > 0$).

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx &= 2\pi i \left(\text{Res}(f, ai) + \text{Res}(f, bi) \right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{2ai(-a^2 + b^2)} + \frac{1}{(-b^2 + a^2)2bi} \right) = \frac{\pi}{a^2 - b^2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = \frac{\pi}{(a+b)ab} \end{aligned}$$

8.9.3. Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)P(t)}{Q(t)} dt$

Si proponemos $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ e integramos en el semicírculo de radio R en el semiplano superior, lo podemos parametrizar en dos partes. El segmento $[-R, R]$ poniendo directamente $z = t$ con $t \in [-R, R]$ y el semicírculo superior con

$$z(t) = Re^{it}, \quad t \in [0, \pi]$$

Pero esto nos conduciría a una fórmula con suma de integrales del tipo:

$$2\pi i \sum \text{Res} = \int_{-R}^R \frac{\cos(t)P(t)}{Q(t)} dt + \int_0^\pi \frac{\frac{1}{2}(e^{iR(\cos t + i \text{sen } t)} + e^{-iR(\cos t + i \text{sen } t)})P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} iRe^{it} dt$$

Vemos en la segunda integral que en la exponencial, tenemos (viendo la parte real del exponente) tanto $e^{-R \text{sen}(t)}$ como $e^{+R \text{sen}(t)}$. Por lo tanto, si bien la primera integral (en $[-R, R]$) es la que queremos, no está claro que la integral en el semicírculo tienda a cero con R grande.

Una alternativa es considerar la función

$$f(z) = \frac{e^{iz}P(z)}{Q(z)}$$

En ese caso, la integral en la semicircunferencia superior dará

$$\int_0^\pi \frac{e^{iR(\cos t + i \text{sen } t)}P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} iRe^{it} dt$$

Entonces el módulo del integrando lo podemos acotar por

$$\left| \frac{e^{iR(\cos t + i \text{sen } t)}P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} iRe^{it} \right| = \frac{e^{-R \text{sen } t} |P(Re^{it})|}{|Q(Re^{it})|} R$$

y recordamos que $t \in [0, \pi]$ y por lo tanto $\text{sen}(t) \geq 0$. Con la cota grosera $e^{-R \text{sen}(t)} \leq 1$ obtenemos que el integrando va como $\sim R^{gr(P) - gr(Q) + 1}$ y si, por ejemplo, el grado de Q es por lo menos 2 más que el grado de P tendremos algo menor o igual a $\frac{cte}{R}$, que claramente tiende a cero cuando $R \rightarrow \infty$. Por otra parte, la integral en $[-R, R]$ queda

$$\int_{-R}^R \frac{e^{it}P(t)}{Q(t)} dt = \int_{-R}^R \frac{\cos(t)P(t)}{Q(t)} dt + i \int_{-R}^R \frac{\text{sen}(t)P(t)}{Q(t)} dt$$

Concluimos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)P(t)}{Q(t)} dt = \text{Re} \left(2\pi i \sum_{\text{Im}(z_0) > 0} \text{Res}(e^{iz}P(z)/Q(z), z_0) \right)$$

y por el mismo precio

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(t)P(t)}{Q(t)} dt = \text{Im} \left(2\pi i \sum_{\text{Im}(z_0) > 0} \text{Res}(e^{iz}P(z)/Q(z), z_0) \right)$$

Ejemplo 8.32. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^2 + 1} dt = ?$

Primero vemos las singularidades de $\frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$, que son $\pm i$. La única en el semiplano superior es $z_0 = i$, luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^2 + 1} = \operatorname{Re} \left(2\pi i \operatorname{Res} \left(e^{iz} / (z^2 + 1), z_0 = i \right) \right)$$

Como

$$\operatorname{Res} \left(e^{iz} / (z^2 + 1), z_0 = i \right) = \frac{e^{ii}}{2i} = \frac{e^{-1}}{2i}$$

tenemos

$$2\pi i \operatorname{Res} \left(e^{iz} / (z^2 + 1), z_0 = i \right) = 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^2 + 1} = \frac{\pi}{e}$$

Notar que en este caso $2\pi i$ -veces el residuo dió un número real, su parte imaginaria es cero, lo que es compatible con

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t^2 + 1} dt = \operatorname{Im}(\pi/e) = 0$$

cosa que ya podíamos saber desde el principio pues se trata de la integral de una función impar.

9. Series de Fourier

9.1. Serie de Fourier y serie de Laurent

Supongamos definida una función f en S^1 ¿se puede extender (de manera holomorfa) a alguna región de \mathbb{C} ? En tal caso podemos calcular el desarrollo de Laurent en un anillo que contenga a S^1 :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

Si restringimos $f(z)$ al círculo obtenemos una descripción de f en términos de exponenciales imaginarias:

$$\phi(x) := f(e^{ix}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Escribiendo $e^{inx} = \cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx)$ obtenemos una escritura más tradicional de una función 2π -periódica en términos de las funciones trigonométricas.

Escritura real con senos y cosenos.

Claramente una expresión del tipo

$$f(x) = c + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$$

(en caso de ser convergente) define una función 2π -periódica. Surgen muchas preguntas, entre las que mencionamos

- ¿Qué tipo de funciones periódicas pueden escribirse de esa forma?
- Suponiendo que una función 2π -periódica pueda expresarse de esa forma, ¿cómo se encuentran c , los a_n y los b_n ?
- ¿qué tipo de regularidad tiene una expresión así? es continua? es derivable?

Si tenemos una función del tipo

$$\phi(x) = f(e^{ix}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (\cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx))$$

entonces, usando que $\cos(-nx) = \cos(nx)$ y $\operatorname{sen}(-nx) = -\operatorname{sen}(nx)$, podemos reacomodar la sumatoria con exponenciales en términos de las funciones trigonométricas:

$$c + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$$

donde $c = c_0$,

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad (n \in \mathbb{N})$$

9.2. Relaciones de ortogonalidad

Teorema 9.1. *Son válidas las siguientes relaciones de ortogonalidad*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx = 0, \forall n, m \in \mathbb{N}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx, \forall n \neq m$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = \pi = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx, \forall n \in \mathbb{N}$$

Observación 9.2. Si consideramos $C([- \pi, \pi], \mathbb{C}) = \{f : [- \pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \text{ continua}\}$ con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

entonces el teorema anterior dice que

$$\cos(nx) \perp \cos(mx), \forall n \neq m \in \mathbb{N} \in \mathbb{N}_0$$

$$\cos(nx) \perp \sin(mx), \forall n, m \in \mathbb{N}_0$$

$$\|\cos(nx)\|^2 = \pi = \|\sin(nx)\|^2, \forall n \in \mathbb{N}$$

Si normalizamos, obtenemos que el conjunto $\{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) : n \in \mathbb{N}_0, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) : n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema ortonormal.

Antes de demostrar estas fórmulas, veamos la versión exponencial:

Teorema 9.3. *Para todo $n \neq m \in \mathbb{Z}$ $\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{imx}} dx = 0$ mientras que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{inx}} dx = 2\pi$.*

Demostración.

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{imx}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx$$

Si $n = m$ entonces queda $\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi$. Si $n \neq m$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \frac{e^{i(n-m)x}}{n-m} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

pues la función a evaluar es 2π -periódica. □

Observación 9.4. El teorema de relaciones de ortogonalidad para las funciones trigonométricas se puede demostrar de manera directa usando fórmulas trigonométricas, o bien se pueden deducir de las relaciones de ortogonalidad entre las exponenciales, y la forma de despejar \sin y \cos en términos de las exponenciales.

Observación 9.5. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función 2π -periódica, entonces para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$ podemos desplazar el intervalo de integración y obtener una igualdad

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi+x_0}^{\pi+x_0} f(x) dx$$

En particular, podemos integrar en $[0, 2\pi]$ en lugar de $[-\pi, \pi]$, que suele ser otra posible convención para las fórmulas de coeficientes de Fourier.

Aplicación: cálculo de coeficientes de Fourier

Supongamos que una f periódica se puede escribir como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

entonces, usando las relaciones de ortogonalidad obtenemos

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(mx) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx$$

y todos los términos son nulos salvo en la primera sumatoria cuando $n = m$, obteniendo

$$= a_m \int_0^{2\pi} \cos^2(mx) dx = \begin{cases} a_m \pi & m \neq 0 \\ a_0 2\pi & m = 0 \end{cases}$$

Lo que permite despejar como condición necesaria

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(mx) dx \quad \forall m \neq 0$$

Análogamente,

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(mx) dx$$

Si utilizamos la notación exponencial,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

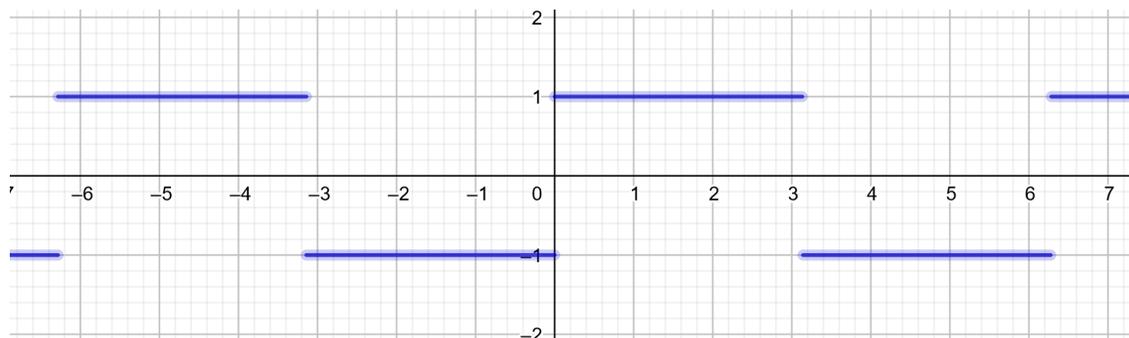
entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = c_m \int_0^{2\pi} dx = 2\pi c_m \\ \implies c_m &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx \end{aligned} \quad (1)$$

La onda cuadrada

Ejemplo 9.6. Consideremos la función 2π -periódica determinada por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-\pi, 0] \\ 1 & x \in [0, \pi/2) \end{cases}$$



Como f es impar, $f(x) \cos(mx)$ es impar y por lo tanto luego

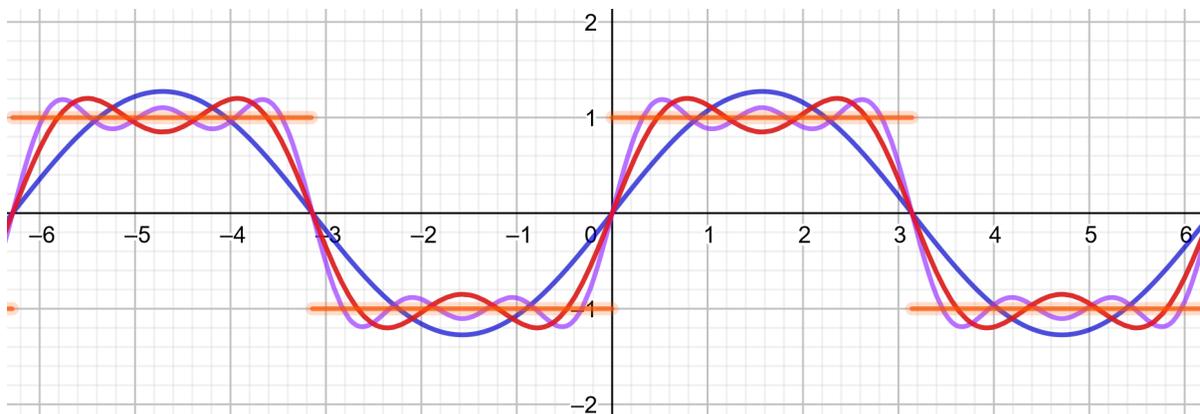
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = 0 \implies b_m = 0 \quad \forall m$$

A su vez, los coeficientes de $\sin(mx)$ se calculan por

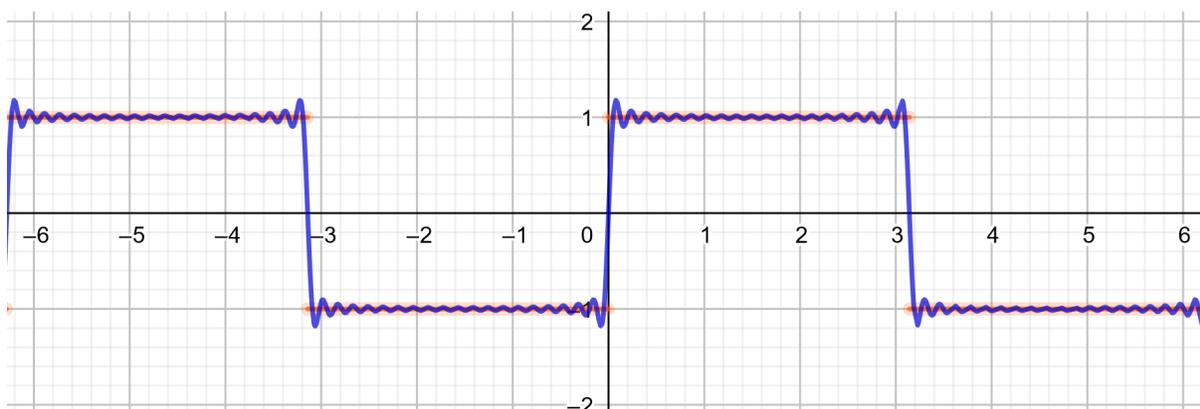
$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(mx) dx = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\cos(mx)}{m} \right) \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{-\cos(m\pi)}{m} + \frac{1}{m} \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{-(-1)^n}{m} + \frac{1}{m} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 2k \text{ es par} \\ \frac{4}{\pi(2k+1)} & \text{si } m = 2k + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Graficamos las sumas parciales correspondientes a uno, dos y tres sumandos:

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} = \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7} + \dots \right)$$



y 20 términos:



Observamos -además del fenómeno de Gibbs- que las series de Fourier permiten aproximar funciones no necesariamente continuas!

9.3. Regularidad

9.3.1. Series y convergencia uniforme: aplicación a continuidad

Proposición 9.7. Si consideramos una serie de la forma

$$c + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$$

donde $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$, entonces la serie define una función **continua**.

Demostración. Consideramos la sucesión de funciones $g_N, h_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por

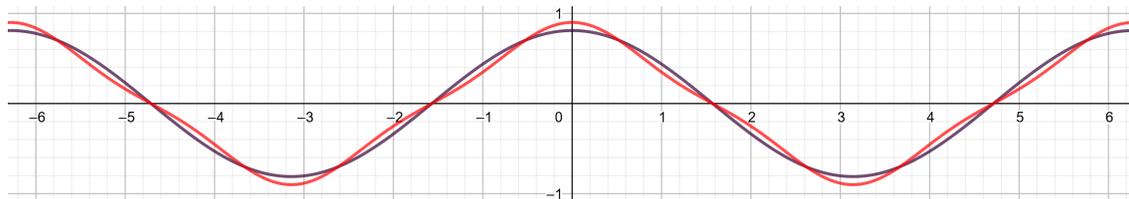
$$g_N(x) := \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx), \quad h_N := \sum_{n=1}^N b_n \operatorname{sen}(nx)$$

Dejamos como ejercicio mostrar que la hipótesis de convergencia absoluta de los coeficientes implican que las funciones $g_N(x)$ y $h_N(x)$ convergen *uniformemente* a las funciones dadas por la suma hasta infinito. Como límite uniforme de continuas es continuo, concluimos. \square

Ejemplo 9.8. Consideramos la serie trigonométrica

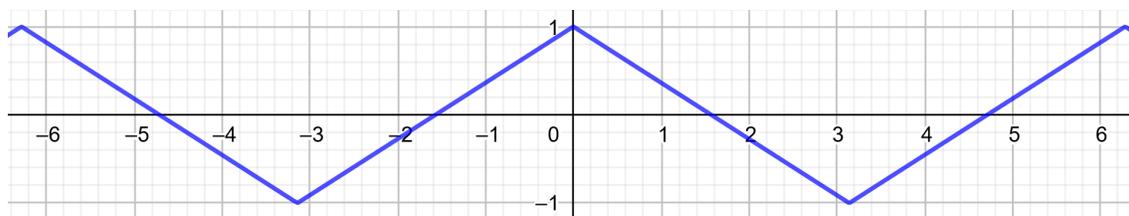
$$f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} = \frac{8}{\pi^2} \left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \frac{\cos(7x)}{7^2} + \dots \right)$$

Como aquí los coeficientes tienen un comportamiento asintótico $a_n \sim \frac{1}{n^2}$ sabemos que esta función será continua. Graficamos la suma del primer y segundo armónico:



Dejamos como ejercicio verificar que corresponde al desarrollo de Fourier de la función lineal a trozos

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x/\pi & x \in [0, \pi] \\ 1 + 2x/\pi & x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$



De paso -asumiendo la validez de la representación de esta función por su serie de Fourier- obtenemos la fórmula

$$\frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 1$$

o bien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

Observación 9.9. Como en este ejemplo $a_n \sim \frac{1}{n^2} \implies na_n \sim \frac{1}{n}$ y vemos que la serie "derivada término a término" tendrá más dificultades en la convergencia, lo que es compatible con el hecho de que f no sea C^1 . De hecho, derivando término a término obtendremos -a menos de factor multiplicativo- la onda cuadrada del ejemplo previo.

9.3.2. Series y convergencia uniforme: aplicación a derivadas

Dejamos como ejercicio el siguiente resultado análogo a la Proposición 9.7 con demostración análoga, invocando una versión adecuada del Teorema 5.9:

Proposición 9.10. Si consideramos una expresión

$$f(x) = c + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$$

donde $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$, y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| < \infty$$

entonces f es C^1 y f' tiene el desarrollo de Fourier

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos(nx) - \sum_{n=1}^{\infty} na_n \sin(nx)$$

Demostración. El ejercicio consiste en mostrar que las hipótesis pedidas son suficientes para mostrar convergencia uniforme tanto de sucesión de las sumas parciales como la de la sucesión de la derivada (de las sumas parciales). \square

9.3.3. Series y primitivas

Observamos que las hipótesis de la Proposición 9.10 son bastante fuertes, de hecho, el enunciado no se aplica al ejemplo de la onda serrucho cuya derivada es la onda cuadrada, pues la onda cuadrada no es continua (o bien, la onda serrucho si bien es continua y derivable a trozos, no es C^1). Pero en vez de considerar la derivada y su relación con la serie de Fourier, podemos adoptar el punto de vista de la primitiva, de esta manera obtendremos un resultado que incluirá al ejemplo precedente. Primero dejamos como ejercicio mostrar lo siguiente:

Lema 9.11. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, continua a trozos y 2π -periódica. Entonces su primitiva

$$F(x) := \int_0^x f(t) dt$$

es 2π -periódica si y sólo si $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$.

Ahora sí, la relación entre los coeficientes de una función periódica con primitiva periódica y los de su primitiva:

Proposición 9.12. Sea f acotada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continua a trozos y 2π -periódica tal que

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$$

(es decir, su primitiva es periódica). Si

$$F(x) := \int_0^x f(t) dt$$

entonces, para todos los $n \neq 0$ los coeficientes de Fourier de f y F se relacionan por

$$c_n(F) = \frac{1}{in} c_n(f), \quad \forall n \neq 0$$

En otras palabras, la serie de la integral es la integral de la serie:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \implies F(x) \sim C + \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \frac{c_n}{in} e^{inx}$$

Demostración. Tomemos $n \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} c_n(F) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^x f(t) dt \right) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_D f(t) e^{-inx} dt dx \end{aligned}$$

es una integral doble en la región $D = \{(t, x) : 0 \leq t \leq x \leq 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2$. Si usamos Fubini e integramos en el otro orden, tendremos

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_t^{2\pi} f(t) e^{-inx} dx \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left(\int_t^{2\pi} e^{-inx} dx \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{e^{-inx} \Big|_{x=t}^{x=2\pi}}{-in} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{1 - e^{int}}{-in} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{-in} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \frac{1}{-in} \int_0^{2\pi} f(t) e^{int} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(0 + 2\pi \frac{c_n(f)}{in} \right) \\ &= \frac{c_n(f)}{in} \end{aligned}$$

□

9.4. Aplicación de representación en series de Fourier al resorte forzado

La ley de Newton " $F = ma$ " para un resorte ideal alrededor del punto de equilibrio conduce a una ecuación del tipo:

$$-kx(t) = mx(t)''$$

o bien

$$x'' = -\omega^2 x(t)$$

donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, que tiene solución $x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0)$

Si agregamos un término de fricción por velocidad: $F = -kx - \gamma v$ obtenemos

$$-kx(t) - \gamma x'(t) = mx''$$

o bien, una ecuación del tipo

$$ax'' + bx' + cx = 0$$

(con a, b, c constantes) cuyas soluciones son bien conocidas. Si ahora pasamos a considerar un resorte forzado, tendremos $F = F_{resorte} + f(t)$, o bien una ecuación del tipo

$$ax'' + bx' + cx = f(t)$$

Claramente el comportamiento dependerá de $f(t)$, aunque sabemos que la estructura de las soluciones es de la forma

$$x_{general} = x_{hom} + x_{part}$$

donde x_{hom} es una solución del homogéneo (problema archi-conocido) y x_{part} es una solución particular, que puede ser complicada si la f es complicada, pero sabemos encontrar fácilmente soluciones particulares para f "fácil", como $f(t) = e^{\lambda t}$, $f(t) = \cos(\omega t)$ ó $\sin(\omega t)$.

Ejemplo 9.13. Si $f(t) = e^{i\alpha t}$, proponemos $x_p(t) = A_0 e^{i\alpha t}$, entonces debe valer

$$a(A_0 e^{i\alpha t})'' + b(A_0 e^{i\alpha t})' + c(A_0 e^{i\alpha t}) = e^{i\alpha t}$$

o equivalentemente

$$A_0(-a\alpha^2 + ib\alpha + c) = 1$$

Si $-a\alpha^2 + ib\alpha + c \neq 0$, es decir, si $i\alpha$ no es raíz del polinomio característico de la ecuación

$$\chi(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$$

entonces $x_{part}(t) := \frac{1}{\chi(i\alpha)} e^{i\alpha t}$ es una solución particular.

Si $-a\alpha^2 + ib\alpha + c = 0$ se propone $x_{part} := A_0 t e^{i\alpha t}$ y obtenemos

$$x'_{part} = i\alpha x_{part} + A_0 e^{i\alpha t}$$

$$x''_{part} = -\alpha^2 x_{part} + 2i\alpha A_0 e^{i\alpha t}$$

$$\begin{aligned} \implies ax''_{part} + bx'_{part} + cx_{part} &= a\left(-\alpha^2 x_{part} + 2i\alpha A_0 e^{i\alpha t}\right) + b\left(i\alpha x_{part} + A_0 e^{i\alpha t}\right) + cx_{part} \\ &= \chi(i\alpha)x_{part} + (2ai\alpha + b)A_0 e^{i\alpha t} = (2ai\alpha + b)A_0 e^{i\alpha t} \end{aligned}$$

Notar que

$$2ai\alpha + b = \chi'(i\alpha)$$

Si llegara a ser $\chi'(i\alpha) = 0$ entonces $i\alpha$ sería una raíz *doble* de χ . En caso de que χ no tenga raíces dobles eso no pasa nunca y podemos considerar la solución particular

$$x_{part} := \frac{te^{i\alpha t}}{\chi'(i\alpha)}$$

(Notar el fenómeno de resonancia por el factor t .) En caso de que χ tenga a $i\alpha$ como raíz doble dejamos como ejercicio ver que podemos encontrar una solución particular de la forma $cte t^2 e^{i\alpha t}$.

En cualquier caso, para $f(t)$ una exponencial, resulta sencillo encontrar soluciones particulares de una ecuación de la forma

$$ax'' + bx' + cx = f(t)$$

Como la ecuación es lineal en x , el desarrollo de Fourier junto con el principio de superposición permite entonces obtener soluciones particulares para "cualquier" $f(t)$ periódica: si queremos resolver

$$ax'' + bx' + cx = \sum_n A_n e^{in\omega t}$$

suponiendo por comodidad que ninguna de las raíces de $\chi(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ sea de la forma $i\omega$, proponemos como solución particular

$$x_{part}(t) := \sum_n \frac{A_n}{\chi(in\omega)} e^{in\omega t}$$

Si hubiera una sola raíz simple de χ de la forma $in_0\omega$, entonces podemos proponer

$$x_{part}(t) := \frac{A_{n_0}}{\chi'(in_0\omega)} te^{in_0\omega t} + \sum_{n \neq n_0} \frac{A_n}{\chi(in\omega)} e^{in\omega t}$$

Si hubiera dos raíces distintas $in_1\omega$ y $in_2\omega$ entonces

$$x_{part}(t) := \frac{A_{n_1}}{\chi'(in_1\omega)} te^{in_1\omega t} + \frac{A_{n_2}}{\chi'(in_2\omega)} te^{in_2\omega t} + \sum_{n \neq n_1, n_2} \frac{A_n}{\chi(in\omega)} e^{in\omega t}$$

y finalmente si tuviéramos $in_0\omega$ como raíz doble, la solución particular se la puede elegir de la forma

$$x_{part}(t) := \frac{A_{n_0}}{2a} t^2 e^{in_0\omega t} + \sum_{n \neq n_0} \frac{A_n}{\chi(in\omega)} e^{in\omega t}$$

9.5. Álgebra lineal y análisis

Recordamos que en un espacio vectorial complejo, se define producto la noción de interno de la siguiente manera:

Definición 9.14. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{C} , diremos que $\langle -, - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ es un producto interno si satisface

- Sesqui-linealidad: $\forall v, v', w, w' \in V$ y $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$\langle v + v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$$

$$\langle v, w + w' \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$$

$$\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle, \text{ pero } \langle v, \lambda w \rangle = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle$$

- Conjugado-simétrico: $\forall v, w \in V$

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$$

- Definido positivo: notar que la propiedad de simetría anterior nos asegura $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$ $\forall v \in V$. Pedimos $\langle v, v \rangle \geq 0$ y

$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$$

Se define la norma de un vector como $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Ejemplo 9.15. $V = \mathbb{C}^n$ con

$$\langle (z_1, \dots, z_n), (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n) \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i$$

es un espacio vectorial con producto interno.

Ejemplo 9.16. El espacio de todas las funciones continuas en $[0, 2\pi]$ a valores complejos

$$V = C[0, 2\pi] = \{ f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \text{ continua} \}$$

se puede definir un producto interno vía

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Notar el factor $\frac{1}{2\pi}$, está puesto para que las funciones e^{inx} ($n \in \mathbb{Z}$) sea un conjunto ortonormal y no sólo ortogonal.

9.6. Coeficientes de Fourier en espacios con producto interno

Si $\mathfrak{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ es una base de un espacio vectorial con producto interno, diremos que es una *base ortonormal* (b.o.n.) si se verifica

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0, \forall i \neq j$$

$$\langle v_i, v_i \rangle = 1, \forall i$$

La siguiente proposición es muy fácil de demostrar, pero de grandiosa utilidad:

Proposición 9.17. Sea $\mathfrak{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . Si $v \in V$ es un vector, como \mathfrak{B} es una base, seguro existirán únicos escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

Si la base es una b.o.n. entonces vale la fórmula

$$\lambda_i = \langle v, v_i \rangle$$

Demostración. En efecto,

$$\langle v, v_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j, v_i \right\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle v_j, v_i \rangle$$

pero todos esos productos escalares dan cero salvo cuando $j = i$:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \langle v_j, v_i \rangle = 0 + \dots + 0 + \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle + 0 + \dots + 0 = \lambda_i \cdot 1$$

Es decir, $\langle v, v_i \rangle = \lambda_i$

□

Cuando se tiene un espacio vectorial con un producto interno y se ha elegido una b.o.n., los coeficientes de un vector en ese espacio con respecto a esa b.o.n. se suelen denominar *coeficientes de Fourier*.

Ejemplo 9.18. Recordamos el producto interno del ejemplo 9.16: si V es el espacio de todas las funciones continuas en $[0, 2\pi]$ a valores complejos

$$V = C[0, 2\pi] = \{f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \text{ continua} \}$$

entonces con el producto interno

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

tenemos que $\mathfrak{B} = \{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$, si bien no es una base en el sentido algebraico, es un sistema ortonormal, pues (recordando el Teorema de ortogonalidad 9.3)

$$\langle e^{inx}, e^{imx} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx} \overline{e^{imx}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

Y los coeficientes de una función que sea una combinación lineal (o una serie) en esta base son los tradicionales coeficientes de Fourier (versión exponencial) ya que si

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

entonces -ecuación (1)- los c_n se calculan vía

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{e^{inx}} dx = \langle f, e^{inx} \rangle$$

9.7. La desigualdad de Cauchy-Schwartz, desigualdad triangular y distancia

En cualquier espacio con producto interno, tanto el espacio euclídeo \mathbb{R}^n como el de las funciones periódicas y el producto interno dado por la integral, hay una manera standard de definir una distancia entre sus elementos, más precisamente, se define la distancia como la norma de la diferencia, donde la norma a su vez se calcula a partir del producto interno:

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$$

La desigualdad clave para que esta noción de distancia tenga las propiedades que permiten desarrollar el análisis (de sucesiones convergentes, continuidad, etc.) es la desigualdad triangular, que en el caso de los espacios con producto interno proviene de la celebrada desigualdad de Cauchy-Schwartz:

Teorema 9.19. *En un espacio (real o complejo) con producto interno, es válida la desigualdad*

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$$

Más aún, vale la desigualdad estricta si y sólo si v y w son linealmente independientes.

Demostración. Primero veamos el caso linealmente dependiente. Supongamos que $v = \lambda w$ (el caso $w = \lambda v$ es análogo). En ese caso,

$$|\langle v, w \rangle| = |\langle \lambda w, w \rangle| = |\lambda \langle w, w \rangle| = |\lambda| \|w\|^2$$

y a su vez

$$\|v\| \|w\| = \|\lambda w\| \|w\| = |\lambda| \|w\| \|w\|$$

y vemos que vale la igualdad.

Si en cambio v y w son linealmente independientes, $v + tw \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y en consecuencia la siguiente función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente positiva:

$$\begin{aligned} (\forall t \in \mathbb{R}) \quad 0 < f(t) &= \langle v + tw, v + tw \rangle = \langle v, v \rangle + t\langle v, w \rangle + t\langle w, v \rangle + t^2\langle w, w \rangle \\ &= \|v\|^2 + t(\langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle) + t^2\|w\|^2 \\ &= \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle v, w \rangle t + \|w\|^2 t^2 \end{aligned}$$

Pero si sabemos que una función de la forma

$$f(t) = at^2 + bt + c > 0 \forall t \in \mathbb{R}$$

entonces no puede tener raíces reales, luego

$$b^2 - 4ac < 0$$

o bien

$$b^2 < 4ac$$

Reemplazando $a = \|w\|^2$, $b = 2\operatorname{Re}\langle v, w \rangle$, $c = \|v\|^2$ obtenemos

$$4(\operatorname{Re}\langle v, w \rangle)^2 < 4\|v\|^2\|w\|^2$$

Cancelando el 4 y tomando raíz cuadrada tenemos

$$|\operatorname{Re}\langle v, w \rangle| < \|v\| \|w\|$$

En el caso real, hemos terminado. En el caso complejo, si escribimos al número complejo $\langle v, w \rangle$ en forma polar:

$$\langle v, w \rangle = z = |z|e^{i\theta}$$

podemos cambiar v por $\tilde{v} = e^{-i\theta}v$ tendremos

$$\langle \tilde{v}, w \rangle = \langle e^{-i\theta}v, w \rangle = e^{-i\theta}\langle v, w \rangle = e^{-i\theta}|z|e^{i\theta} = |z| = |\langle v, w \rangle| \in \mathbb{R}$$

y usando la desigualdad anterior para \tilde{v} y w en vez de v y w ,

$$|\langle v, w \rangle| = \langle \tilde{v}, w \rangle = \operatorname{Re}\langle \tilde{v}, w \rangle < \|\tilde{v}\| \|w\| = \|e^{i\theta}v\| \|w\| = \|v\| \|w\|$$

□

Corollario 9.20 (Desigualdad triangular). *Si V es un espacio vectorial con producto interno, entonces es válida la desigualdad*

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Demostración. Calculamos la norma al cuadrado:

$$\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle = \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle v, w \rangle + \|w\|^2$$

Notar que si $z = a + bi$, entonces

$$a \leq |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

Es decir, $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$, en particular para $z = \langle v, w \rangle$, y por lo tanto

$$\|v + w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2|\langle v, w \rangle| + \|w\|^2$$

Ahora usamos la desigualdad de Cauchy Schwartz

$$\leq \|v\|^2 + 2\|v\| \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$$

Es decir,

$$\|v + w\|^2 \leq (\|v\| + \|w\|)^2$$

y tomando raíz cuadrada concluimos. □

Esto nos permite definir una distancia entre vectores vía

$$d(v, w) := \|v - w\|$$

y obtendremos la desigualdad triangular para la distancia

$$d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w), \quad \forall u$$

pues

$$\begin{aligned} d(v, w) &= \|v - w\| = \|v - u + u - w\| \\ &\leq \|v - u\| + \|u - w\| = d(v, u) + d(u, w) \end{aligned}$$

Con esta noción de distancia tendremos las nociones usuales del análisis como límite y convergencia. Esto es conveniente no sólo en espacios como \mathbb{R}^N , sino también en espacios funcionales.

9.8. El ejemplo $\ell^2(\mathbb{N})$

Definimos el siguiente subconjunto de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ de todas las sucesiones:

$$\ell^2(\mathbb{N}_0) = \left\{ \{a_n\}_{n=0}^{\infty} : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$$

A los elementos de $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ los llamamos "sucesiones de cuadrado sumables". La primera afirmación es que las sucesiones de cuadrado sumables forman un *subespacio* del espacio vectorial de todas las sucesiones. En efecto, si $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ y $b = \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ son dos sucesiones en ℓ^2 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 < \infty$$

entonces para cada suma parcial verifica

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N |a_n + b_n|^2 &= \sum_{n=0}^N |a_n|^2 + \sum_{n=0}^N |b_n|^2 + \sum_{n=0}^N a_n \bar{b}_n + \sum_{n=0}^N \bar{a}_n b_n \\ &= \sum_{n=0}^N |a_n|^2 + \sum_{n=0}^N |b_n|^2 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^N a_n \bar{b}_n \\ &\leq \sum_{n=0}^N |a_n|^2 + \sum_{n=0}^N |b_n|^2 + 2 \left| \sum_{n=0}^N a_n \bar{b}_n \right| \end{aligned}$$

Llamemos

$$a_{\leq N} = (a_0, a_1, \dots, a_N), \quad b_{\leq N} = (b_0, b_1, \dots, b_N)$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz en \mathbb{C}^{N+1} tenemos

$$|\langle a_{\leq N}, b_{\leq N} \rangle| \leq \|a_{\leq N}\| \|b_{\leq N}\|$$

luego, la fórmula anterior se acota por

$$\leq \sum_{n=0}^N |a_n|^2 + \sum_{n=0}^N |b_n|^2 + 2 \|a_{\leq N}\| \|b_{\leq N}\| = (\|a_{\leq N}\| + \|b_{\leq N}\|)^2 \leq (\|a\| + \|b\|)^2$$

Concluimos dos hechos:

1. $\sum_{n=0}^N |a_n + b_n|^2$ es (absolutamente) convergente, es decir, $a + b \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$.
2. En $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ esta bien definida la fórmula

$$\langle a, b \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b}_n$$

y es absolutamente convergente pues para todo N vale

$$\sum_{n=0}^N |a_n \bar{b}_n| = \langle |a|_{\leq N}, |b|_{\leq N} \rangle \leq \|a_{\leq N}\| \|b_{\leq N}\| \leq \|a\| \|b\|$$

En particular, $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ es un espacio vectorial con producto interno.

Observación 9.21. Si denotamos $\mathbb{C}^{(\mathbb{N}_0)}$ al conjunto de sucesiones que a partir de algún momento son cero, podemos identificar $\mathbb{C}^{(\mathbb{N}_0)} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathbb{C}^{N+1}$, que es un subconjunto denso de $\ell^2(\mathbb{N}_0)$.

9.9. Convergencia, completitud y espacios de Hilbert

Dado un conjunto X , una función distancia

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

verificando

$$\begin{aligned} (\forall x, y \in X) \quad & d(x, y) = d(y, x) \\ (\forall x, y \in X) \quad & d(x, y) = 0 \iff x = y \\ (\forall x, y, z \in X) \quad & d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \end{aligned}$$

será llamada una *métrica* para X y el par (X, d) será llamado un *espacio métrico*. En un tal espacio tiene sentido tanto la noción de sucesión convergente:

$$\boxed{x_n \longrightarrow x \text{ en } X \text{ si y sólo si } d(x_n, x) \longrightarrow 0 \text{ en } \mathbb{R}}$$

como así también la noción de sucesión de Cauchy:

$$\{x_n\}_{n \geq 0} \text{ es de Cauchy si } \forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } d(x_n, x_m) < \epsilon, \forall n, m \geq n_0$$

Sabemos que para $X = \mathbb{R}^N$ ambas nociones son equivalentes, y se puede probar bastante fácilmente que en general "ser convergente" implica "ser de Cauchy", aunque la recíproca no siempre es cierta.

Ejemplo 9.22. Si consideramos $X = \mathbb{Q}$ como subconjunto de \mathbb{R} , podemos tomar una sucesión q_n de racionales que converga a un número irracional. Por ejemplo, tomando el desarrollo decimal, tenemos la siguiente sucesión de números racionales que convergen a $\sqrt{2}$:

$$1 \quad 1,4 = \frac{14}{10} \quad 1,41 = \frac{141}{100} \quad 1,414 = \frac{1414}{1000} \quad 1,4142 = \frac{14142}{10000} \quad 1,41421 = \frac{141421}{100000} \quad \dots$$

Esta sucesión es convergente en \mathbb{R} pero converge a un elemento que no está en \mathbb{Q} .

Observación 9.23. Se podría argumentar que para definir la sucesión anterior uno debe conocer *a priori* el desarrollo decimal de $\sqrt{2}$, pero hay otras alternativas para encontrar sucesiones de racionales que converjan a $\sqrt{2}$. La siguiente es debida al método de Newton para encontrar raíces, se puede definir recursivamente

$$q_0 := 1 \quad q_{n+1} := q_n - \frac{q_n^2 - 2}{2q_n}$$

Claramente si $q_n \in \mathbb{Q}$ entonces q_{n+1} también, y como $q_0 \in \mathbb{Q}$ vemos que $q_n \in \mathbb{Q}$ para todo n . En cualquier curso de cálculo numérico se prueba que esta sucesión converge (y mucho más rápido que la del ejemplo anterior!) a $\sqrt{2}$, por ejemplo

$$q_1 = \frac{3}{2} = 1,5 \quad q_2 = \frac{17}{12} = 1,4166666 \dots \quad q_3 = \frac{577}{408} = 1,4142156 \dots$$

ya tiene 5 decimales exactos.

Definición 9.24. Decimos que un espacio métrico (X, d) es *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente a un elemento de X .

Ejemplo 9.25. \mathbb{Q} con la distancia $d(q_1, q_2) = |q_1 - q_2|$ no es completo. Sin embargo, \mathbb{R} sí es completo. Similarmente \mathbb{R}^n con la distancia Eucídea usual es completo.

Ejemplo 9.26. $C[-1, 1]$ con el producto interno dado por la integral

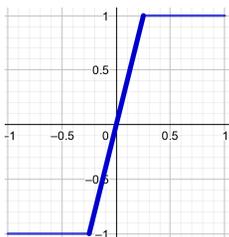
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)\bar{g}(x)dx$$

y la distancia

$$d(f, g) = \|f - g\| = \sqrt{\|f - g\|^2} = \sqrt{\int_{-1}^1 |f(x) - g(x)|^2 dx}$$

lamentablemente **no** es completo.

Para esto, podemos considerar la sucesión de funciones $f_n(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-1, -\frac{1}{n}) \\ nx & x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1 & x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$



Por ejemplo, el gráfico de f_4 es

Es claro que f_n converge puntualmente a la función dada por $f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-1, 0) \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x \in (0, 1] \end{cases}$

y también podemos ver que converge en el sentido de la distancia dada por

$$d(f, g) = \|f - g\| = \sqrt{\int_{-1}^1 |f(x) - g(x)|^2 dx}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|^2 &= \int_{-1}^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 2 \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx \\ &= 2 \int_0^{1/n} (1 - nx)^2 dx \\ &= 2 \left(\frac{(1 - nx)^3}{-3n} \right) \Big|_0^{1/n} = 2 \left(0 + \frac{1}{3n} \right) = \frac{2}{3n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

En particular, f_n es de Cauchy por ser convergente, pero no converge a una función continua! Vemos que $C[-1, 1]$ con la norma proveniente de este producto interno, no es completo.

Así como antes veíamos a \mathbb{Q} dentro de \mathbb{R} , el subconjunto \mathbb{Q} no era completo y lo "completábamos" agregándole los irracionales, ahora podemos pensar a $C[-1, 1]$ como subconjunto no completo, y para "completarlo" debemos agregarle algunas funciones no necesariamente continuas, como el límite anterior. Es un hecho que el menor subconjunto de todas las funciones que hay que agregar para obtener un espacio completo es el de las funciones medibles¹ de cuadrado integrables, que denotaremos $L^2[-1, 1]$.

Diferencia de completitudes

- Sabemos que la convergencia uniforme de continuas es continua, esto significa que $C([a, b], \|\cdot\|_\infty)$ es completo, donde

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{\text{sup}} = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$$

- $C([a, b], \|\cdot\|_2)$ no es completo.

A diferencia del caso \mathbb{R}^n , donde las convergencias en cualquier norma son equivalentes, en caso de espacios funcionales hay que prestar atención en qué norma se da la convergencia. También observamos que si $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ que por definición es $\|f\|_\infty$, entonces

$$\begin{aligned} \|f_2\|^2 &= \int_a^b \int |f(x)|^2 dx \leq \int_a^b \int M^2 dx = (b-a)M^2 \\ \implies \|f_2\|^2 &\leq \text{cte}M = \text{cte}\|f\|_\infty \end{aligned}$$

Esto implica que si $f_n \rightarrow f$ con respecto a $\|\cdot\|_\infty$ (lo que equivale a la convergencia uniforme) entonces necesariamente converge con respecto a $\|\cdot\|_2$. Sin embargo la recíproca no es cierta, pues vimos una sucesión de continuas ocnvergente en norma 2, con límite no continuo, por lo que la convergencia no puede ser uniforme, es decir, no es una sucesión convergente para la norma del supremo.

Repetimos: cuando en un espacio funcional se habla de convergencia de una cierta sucesión de funciones, es muy importante aclarar con respecto a qué noción de distancia se está considerando la convergencia.

Observación 9.27. Así como los números racionales no son "completos" en el sentido de que existen sucesiones de Cauchy de números racionales que no convergen a un racional, dado un espacio métrico (X, d) , es un hecho matemático que siempre existe un espacio métrico \widehat{X} que contiene a X como subespacio métrico tal que \widehat{X} es completo y X es denso

¹No definiremos aquí la noción de función *medible*, concepto esencial en la teoría general de integración. Simplemente diremos que es la hipótesis general necesaria para que tenga sentido integrar.

en \widehat{X} . Al conjunto \widehat{X} se lo denomina *la completación* de X (con respecto a la métrica d). Es un hecho que (\widehat{X}, d) queda unívocamente determinado (a menos de biyección isometría) por (X, d) .

Definición 9.28. El espacio $L^2[a, b]$ se define como la completación de $C[a, b]$ con respecto a la norma 2.

Observación 9.29. El espacio $L^2[a, b]$ se puede identificar con el conjunto de funciones $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de cuadrado integrable, pero con la relación de equivalencia $f \sim g$ cuando f y g coincidan en $[a, b]$ salvo eventualmente un conjunto de medida cero. En el caso que tanto f como g sean continuas, eso equivale a que $f = g$ para todo x , pero si no son continuas no. Una igualdad " $f = g$ " como igualdad de elementos en $L^2[a, b]$ lamentablemente no implicará $f(x) = g(x)$ para todo x , sino $f(x) = g(x)$ para todo x salvo eventualmente un subconjunto de medida cero.

Ejemplo 9.30. El espacio vectorial $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ con la norma

$$\|(a_0, a_1, a_2, \dots)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$$

es completo. De hecho, es la completación del subespacio de las sucesiones de soporte finito: $S = \cup_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}^{N+1} \subset \ell^2(\mathbb{N}_0)$.

Ejemplo 9.31. El espacio vectorial $\ell^2(\mathbb{Z})$ con la norma

$$\|\{a_n : n \in \mathbb{Z}\}\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2$$

es completo.

Definición 9.32. Un espacio de pre-Hilbert es simplemente un espacio vectorial con un producto interno. Diremos que un espacio es de Hilbert si, además de tener producto interno, resulta completo con respecto a la distancia dada por la norma asociada al producto interno.

Ejemplo 9.33. Todo espacio vectorial con producto interno *de dimensión finita* es automáticamente de Hilbert.

Ejemplo 9.34. $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ y $\ell^2(\mathbb{Z})$ son espacios de Hilbert.

Ejemplo 9.35. $L^2[a, b]$ es de Hilbert (por definición).

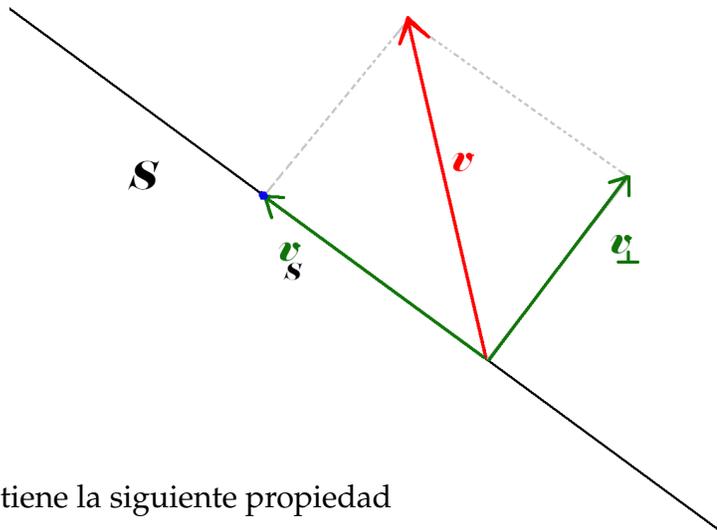
9.10. Proyección ortogonal y mejor aproximación en media cuadrática

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y $S \subset V$ es un subespacio, en caso de contar con un producto interno, hay un complemento natural de S :

$$V = S \oplus S^\perp$$

Más aún, si $v \in V$, y lo escribimos de manera única como

con $v_S \in S$ y $v_\perp \in S^\perp$.



La componente v_S tiene la siguiente propiedad

- $v_S \in S$,
- si $w \in S$ entonces $\|v - w\| \geq \|v - v_S\|$.

Es decir, v_S es el elemento de S más cercano a v . En efecto, recordamos primero que

$$u \perp w \implies \|u + w\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2$$

pues

$$\|u + w\|^2 = \langle u + w, u + w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, w \rangle + \langle w, u \rangle + \langle w, w \rangle = \|u\|^2 + 0 + 0 + \|w\|^2$$

En particular, si tomamos $w \in S$ tenemos que $\langle w, v_{S^\perp} \rangle = 0$, y si calculamos la distancia de v a w tendremos

$$\begin{aligned} \|v - w\|^2 &= \|(v_S + v_{S^\perp}) - w\|^2 \\ &= \|(v_S - w) + v_{S^\perp}\|^2 = \|(v_S - w)\|^2 + \|v_{S^\perp}\|^2 \\ &\geq \|v_{S^\perp}\|^2 = \|v - v_S\|^2 \end{aligned}$$

Es decir, la distancia de v a w es por lo menos la distancia de v a v_S , y además la igualdad se da sólo cuando $\|(v_S - w)\| = 0$, es decir, cuando $w = v_S$.

Esto permite tener un criterio de aproximación, si se tiene una función en cierto espacio vectorial (por ejemplo una función 2π -periódica continua) y se busca una aproximación por funciones trigonométricas, usando un producto interno se puede buscar la proyección ortogonal sobre el subespacio generado por las funciones trigonométricas. Eso dará la combinación lineal de trigonométricas "más cercana" a la función original.

Fórmula de la proyección ortogonal

Supongamos dado V un espacio vectorial con producto interno y sea S un subespacio de dimensión finita. Supongamos elegida $\{u_1, \dots, u_n\}$ una b.o.n. de S .

Proposición 9.36. Con las notaciones anteriores, si $v \in V$, entonces

$$P_S(v) := \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i$$

es la fórmula de la proyección ortogonal en S .

Demostración. Es claro que para cualquier $v \in V$,

$$P_S(v) = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i \in S$$

y también es claro que

$$v = P_S(v) + (v - P_S(v))$$

Mostraremos que

$$v - P_S(v) \in S^\perp$$

y como la descomposición $v = v_S + v_{S^\perp}$ es única se seguirá que $P_S(v) = v_S$ como queríamos ver. Para ésto calculamos

$$\begin{aligned} \langle (v - P_S(v)), u_i \rangle &= \langle v, u_i \rangle - \langle P_S(v), u_i \rangle = \langle v, u_i \rangle - \left\langle \sum_{j=1}^n \langle v, u_j \rangle u_j, u_i \right\rangle \\ &= \langle v, u_i \rangle - \sum_{j=1}^n \langle v, u_j \rangle \langle u_j, u_i \rangle \end{aligned}$$

Pero como los u_j forman una b.o.n., $\langle u_j, u_i \rangle = 0$ salvo cuando $j = i$ y obtenemos

$$\langle v, u_i \rangle - \sum_{j=1}^n \langle v, u_j \rangle \langle u_j, u_i \rangle = \langle v, u_i \rangle - \langle v, u_i \rangle \langle u_i, u_i \rangle = 0$$

Con esto mostramos que $v - P_S(v) \perp u_i$ para todo i , por lo tanto $v - P_S(v) \perp S$ pues S está generado por los u_i . \square

9.11. Desigualdad de Bessel e identidad de Parseval

Teorema 9.37 (Desigualdad de Bessel e identidad de Parseval en abstracto). *Sea V un espacio vectorial con producto interno y $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistema ortonormal en V finito o numerable. Si $v \in V$ y*

$$c_n := \langle v, u_n \rangle$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|v\|^2$$

y la igualdad se dá si y sólo si $v \in \bar{S}$, la clausura de S , donde S es el subespacio generado por los u_n .

Demostración. Hacemos primero el caso de tener un sistema ortonormal finito, u_1, \dots, u_N . Definimos P_S como la proyección ortogonal de V en S :

$$P_S : V \rightarrow V$$

$$v \mapsto \sum_n \langle v, u_n \rangle u_n$$

Llamamos $c_n = \langle v, u_n \rangle$. Sabemos que $P_S(v) \in S$ es la componente de v en S y $v^\perp := v - P_S(v) \in S^\perp$ es la componente en S^\perp :

$$v = v_S + v^\perp \implies \|v\|^2 = \|v_S\|^2 + \|v^\perp\|^2 \geq \|v_S\|^2$$

y notamos que la desigualdad es una igualdad si y sólo si $v^\perp = 0$, es decir, si y sólo si $v \in S$. Además, como los u_n son ortonormales,

$$\|v_S\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^N c_n u_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^N \|c_n u_n\|^2 = \sum_{n=1}^N |c_n|^2 \|u_n\|^2 = \sum_{n=1}^N |c_n|^2$$

En el caso numerable $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, la desigualdad vale para cada subfamilia finita:

$$\sum_{n=1}^N |c_n|^2 \leq \|v\|^2, \forall N \implies \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|v\|^2$$

y hemos demostrado la desigualdad de Bessel.

Para la igualdad en el caso $v \in \bar{S}$ daremos la línea argumental junto con las indicaciones de las partes técnicas que se necesitan.

Primero, si $\dim S = \infty$, no es cierto en general que $V = S \oplus S^\perp$ sino

$$V = \bar{S} \oplus S^\perp$$

Lo que observamos es que el generado por u_1, \dots, u_N se identifica (como espacio de Hilbert) con \mathbb{C}^N , y que el generado por todos los u_n se identifica con

$$\cup_{N=1}^{\infty} \mathbb{C}^N \subset \ell^2(\mathbb{N})$$

y como $\ell^2(\mathbb{N})$ es completo, tenemos un modelo de \bar{S} . Es decir, \bar{S} se identifica con las expresiones de la forma $\sum_n z_n u_n$ con $\sum_n |z_n|^2 < \infty$. Ahora, si $v \in \bar{S}$, entonces

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} z_n u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle v, u_n \rangle u_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$$

y es claro que $\|v\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$. Recíprocamente, si v es vector arbitrario, no necesariamente en \overline{S} , descomponemos

$$v = v_{\overline{S}} + v_{\perp}$$

pero $v_{\overline{S}} = \sum_n c_n u_n$, y

$$\|v\|^2 = \|v_{\overline{S}}\|^2 + \|v_{\perp}\|^2 = \sum_n |c_n|^2 + \|v_{\perp}\|^2$$

si suponemos válida la igualdad $\|v\|^2 = \sum_n |c_n|^2$ obtenemos $\|v_{\perp}\|^2 = 0$, luego $v_{\perp} = 0$ y $v \in \overline{S}$. \square

La aplicación que haremos del teorema anterior será en la siguiente forma:

Corollario 9.38. Si V un espacio de Hilbert que admite un sistema ortonormal $\{u_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ tal que genera un subespacio S que es denso, entonces para todo elemento $v \in V$ es válida la fórmula

$$v = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \langle v, u_n \rangle u_n$$

En particular, V es isomorfo a $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ como espacio de Hilbert.

Demostración. Vimos en la demostración del Teorema anterior que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \langle v, u_n \rangle u_n$$

es la fórmula de la proyección ortogonal de V en \overline{S} , pero si S es denso, $\overline{S} = V$ y por lo tanto esa proyección es la identidad de V . \square

Antes de saber cuál es la completación de $C[0, 2\pi]$ con la norma 2, podemos concluir del teorema anterior el siguiente corolario concreto:

Corollario 9.39 (Desigualdad de Bessel). Si $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ es continua a trozos y

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

Demostración. Simplemente notamos que si consideramos el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

entonces $\{u_n = e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal, y

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx} dx = \langle f, e^{inx} \rangle = \langle f, u_n \rangle$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

□

Corollario 9.40. *La suma de los cuadrados de los módulos de los coeficientes de Fourier de una función continua a trozos converge siempre es convergente. Por ejemplo, la serie de Fourier de la función escalonada, sus coeficientes van como $c_n \sim \frac{cte}{n}$ que no convergen absolutamente, pero sí son de cuadrado sumable. Además, en particular, $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$*

9.12. Stone-Weierstrass

Mencionamos sin demostración dos teoremas históricos de vital importancia en el cálculo de clausuras y completaciones. Recordamos que dado un espacio métrico V , decimos que un subconjunto $S \subset V$ es *denso* si la clausura de S es V , o equivalentemente, si para todo $v \in V$ existe una sucesión $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde $s_n \in S$ para todo n y $s_n \rightarrow v$. Por ejemplo \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} .

Teorema 9.41 (1885 K. Weierstrass). *Los polinomios son densos en $C[a, b]$ con la norma supremo, en particular con la norma 2.*

Es decir, dada una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, si damos un $\epsilon > 0$ entonces el teorema nos asegura que podemos encontrar un polinomio $p(x)$ tal que

$$\sup \{|f(x) - p(x)| : x \in [a, b]\} < \epsilon$$

Una generalización posterior fue dada por Stone:

Teorema 9.42 (1937 M. Stone). *X Hausdorff, A una subálgebra de $C(X, \mathbb{R})$ que contiene a las constantes y separa puntos entonces A es densa. Si se toma $A \subset C(X, \mathbb{C})$, se pide además A sea estable por conjugación.*

En este enunciado, cuando decimos que A separa puntos queremos decir que dados cualquier par de puntos x, y en X , siempre se puede encontrar algún $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

El teorema de Stone generaliza ampliamente el resultado de Weierstrass, que en sí mismo fué un resultado muy influyente. Para hacer honor a ambos, el Teorema 9.42 se lo denomina Teorema de Stone-Weierstrass, aún cuando Weierstrass y Stone no hayan coincidido en sus vidas sobre la tierra (Weierstrass murió en 1897, Stone nació en 1903).

Corollario 9.43. Las combinaciones lineales de $\{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ -notar que forman una subálgebra- son densas con la norma supremo en $C(S^1)$, y por lo tanto son densas en $L^2(S^1) \cong L^2[0, 2\pi]$.

De esta manera, asignando a cada $f \in L^2[0, 2\pi]$ sus coeficientes de Fourier

$$L^2[0, 2\pi] \ni f \mapsto \{c_n(f) : n \in \mathbb{Z}\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

resulta $L^2[0, 2\pi] \cong \ell^2(\mathbb{Z})$. En particular, en la desigualdad de Bessel vale la igualdad, conocida como identidad de Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

Vemos entonces que la buena noción de convergencia para desarrollos de Fourier es la convergencia en norma 2, es decir, en "media cuadrática". Eso dice que dada f , digamos continua a trozos en $[0, 2\pi]$, entonces

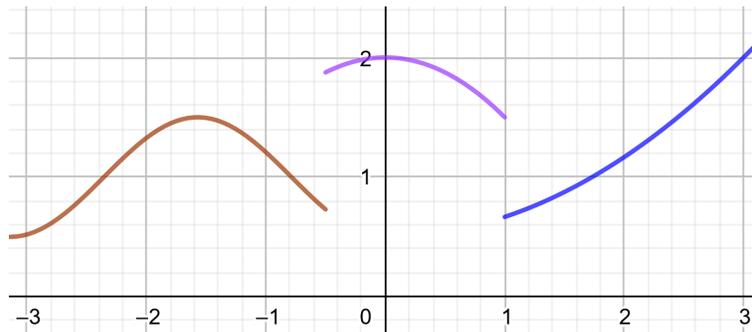
$$f(x) \stackrel{?}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e^{-inx} \rangle e^{inx}$$

es una igualdad en $L^2[0, 2\pi]$, que es el completado de $C[0, 2\pi]$. Necesitamos a $L^2[0, 2\pi]$ porque es un espacio de Hilbert, mientras que el espacio de las funciones continuas si bien tiene producto interno, no es completo con respecto a la norma proveniente del producto interno. Esto nos asegura que la igualdad vala para todo x salvo eventualmente un subconjunto de medida cero. Lamentablemente esto no nos dice que la igualdad valga para todo x , ya que si dos funciones coinciden salvo medida cero, definen *el mismo elemento* de $L^2[0, 2\pi]$. Además, dos funciones que coinciden salvo medida cero tendrán los mismos coeficientes de Fourier, así que no es posible mejorar esta situación. La pregunta de la convergencia puntual es más delicada y requiere un desarrollo adicional.

9.13. Sobre la convergencia puntual

En lo que respecta a esta sección, tomamos la siguiente convención de nombre:

Definición 9.44. Diremos que $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ es continua a trozos si f es continua salvo una cantidad finita de puntos, y en cada punto de discontinuidad existen los límites laterales.



En esta sección demostraremos el siguiente resultado:

Teorema 9.45 (Dirichlet). *Sea $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua a trozos en donde en cada sector de continuidad, f también es C^1 . Asumimos que en cada punto de discontinuidad de f o de f' existen los límites laterales (tanto de f como) de f' . Entonces para todo x en donde f es continua, la serie de Fourier de f converge puntualmente a $f(x)$, mientras que en los puntos de discontinuidad converge al promedio de los límites laterales:*

$$\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$$

La situación de tener convergencia puntual (en el caso de continuidad) o de convergencia al valor promedio (en el caso de los saltos) vale con mayor generalidad. Mencionamos sin demostración el siguiente resultado llamado Criterio o Test de Jordan:

Teorema 9.46 (Dirichlet-Jordan). *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible 2π -periódica de la forma $f = f_1 - f_2$ donde f_1 y f_2 son dos funciones reales monótonas. Entonces para todo x , su serie de Fourier converge al promedio de los límites laterales $\frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-))$.*

Observación 9.47. Vemos que la condición de C^1 es suficiente pero no necesaria. Sin embargo, la condición de continuidad sola no alcanza: se sabe de la existencia de ejemplos de funciones continuas cuya serie de Fourier diverge en algunos puntos (ver por ejemplo 13.4, capítulo 12) aunque los ejemplos son sofisticados y escapan al alcance de este texto en esa dirección.

No demostraremos el Criterio de Jordan. Sobre el Teorema de Dirichlet, demostraremos la siguiente proposición, que es una versión más débil, y dejaremos como ejercicios guiados la demostración completa, que se basa en esta proposición y en cálculos explícitos en dos ejemplos.

Proposición 9.48. *Si $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ es acotada, continua a trozos, con $f \in C^1$ en un entorno de $x_0 = 0$ (i.e, en $(-\epsilon, \epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$), entonces la suma parcial de la serie de Fourier de f*

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

converge puntualmente a $f(0)$ en $x_0 = 0$.

Observación 9.49. La demostración que daremos no es la tradicional, se debe a P. Chernoff 13.4, agradezco a Pablo de Napoli por haber señalado esta referencia.

Demostración. Dado que las funciones constantes son -trivialmente- representadas por su serie de Fourier, cambiando $f(x)$ por $\tilde{f}(x) := f(x) - f(0)$, asumiremos sin pérdida de generalidad que $f(0) = 0$. Definimos

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{e^{ix} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^{ix} - 1} = \frac{f'(0)}{i} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Claramente g es continua en $x = 0$, por lo tanto acotada en un entorno del cero, y también sigue siendo acotada y continua a trozos fuera del cero en donde f lo era, por lo tanto $g \in L^2[-\pi, \pi]$. Notar que f también pertenece a $L^2[-\pi, \pi]$ por ser acotada y continua a trozos. Ahora calculamos los coeficientes de Fourier de f y los comparamos con los de g :

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \langle f, e^{-inx} \rangle = \langle g(x)(e^{ix} - 1), e^{-inx} \rangle \\ &= \langle g(x)e^{ix}, e^{-inx} \rangle - \langle g(x), e^{-inx} \rangle \\ &= \langle g(x), e^{-i(n-1)x} \rangle - \langle g(x), e^{-inx} \rangle \\ &= c_{n-1}(g) - c_n(g) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} S_N(f)(0) &= \sum_{n=-N}^N c_n(f)e^{in \cdot 0} = \sum_{n=-N}^N c_n(f) \\ &= \sum_{n=-N}^N (c_{n-1}(g) - c_n(g)) = c_{-N-1}(g) - c_N(g) \end{aligned}$$

Como $g \in L^2$ tenemos que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(g)|^2 = \|g\|^2 < \infty$, en particular $c_N(g) \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \pm\infty$ y por lo tanto

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} (c_{-N-1}(g) - c_N(g)) = 0 = f(0)$$

□

El siguiente lema lo dejamos como ejercicio:

Lema 9.50. Si f es 2π -periódica y $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces

$$\tilde{f}(x) := f(x - x_0)$$

también es 2π -periódica. Y si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ es la serie de Fourier de f , entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n e^{-inx_0}) e^{inx}$$

es la serie de Fourier de \tilde{f} .

Observación 9.51. Cambiando f por \tilde{f} como en el lema anterior, podemos concluir que si f es continua a trozos y C^1 a trozos, entonces la serie de Fourier de f converge puntualmente al valor de f para cualquier punto $x_0 \in (-\pi, \pi)$ donde f sea C^1 .

9.14. Ejercicios para completar la demostración del Teorema 9.45

1. Considere la función "cuadrada" $f_L : [-\pi, \pi]$, para cada $0 < L < \pi$ definida por

$$f_L(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-L, L] \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

a) Muestre que el desarrollo de Fourier está dado por

$$SF(x) = \frac{L}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nL)}{n} \cos(nx)$$

b) Utilizando el hecho de que f es C^1 alrededor del cero, muestre la fórmula

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nL)}{n} = \frac{\pi - L}{2}} \quad \forall 0 \leq L < \pi$$

c) Muestre (y reserve para luego) que la fórmula de Parseval conduce a

$$\frac{L}{\pi} = \frac{L^2}{\pi^2} + \frac{1}{2} \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}^2(nL)}{n^2}$$

y por lo tanto, para todo $0 < L < \pi$ vale

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}^2(nL)}{n^2} = \frac{L(\pi - L)}{2}}$$

d) Utilizando la fórmula del ítem b) muestre que la serie de Fourier de la onda cuadrada evaluada f_L , evaluada en $\pm L$ vale $SF(\pm L) = \frac{1}{2}$. Es decir, el valor promedio de los límites laterales

$$SF(L) = \frac{1}{2}(f(L_+) + f(L_-))$$

2. Similarmente al ejercicio anterior, considerando la función "serrucho" $g_L : [-\pi, \pi]$, para cada $0 < L < \pi$ definida por

$$g_L(x) = \begin{cases} x & x \in [-L, L] \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

a) Muestre que el desarrollo de Fourier está dado por

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\text{sen}(nL) - nL \cos(nL))}{n^2} \text{sen}(nx)$$

b) Utilizando las fórmulas de los ítems b) y c) del ejercicio 1 muestre que la serie evaluada en $\pm L$ vale $\pm \frac{L}{2}$. Es decir, el valor promedio de los límites laterales.

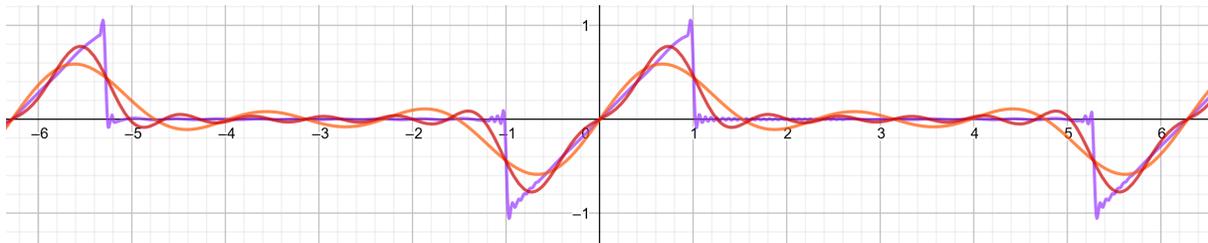
3. Sean $a, b \in \mathbb{C}$, $x_0 \in [-\pi, \pi]$ y $0 < \Delta$ tal que $x_0 + \Delta \in (-\pi, \pi)$. Definimos

$$f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) = \begin{cases} a + b(x - x_0) & x \in [x_0, x_0 + \Delta] \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

A partir de una combinación lineal y traslación conveniente de los ejemplos ejercicios anteriores, muestre que el desarrollo de Fourier de f converge puntualmente a f en cada punto de continuidad, y en los saltos de discontinuidad converge al promedio de los límites laterales.

4. Consideremos una función f es 2π -periódica acotada, continua a trozos y C^1 a trozos tal que en todo punto de discontinuidad, tanto de f como de f' , existen los límites laterales de f y de f' . Sea x_0 uno de esos tales puntos. Muestre que existen a, b, Δ como en el ejercicio anterior de manera tal que $f + g$ es C^1 en x_0 . Concluya la validez del enunciado del Teorema 9.45 para f en x_0 .

Aquí vemos el gráfico de Serie de Fourier de la onda serrucho g_L para $L = 1$ con 3, 8 y 100 armónicos:



10. Ecuación del calor / onda y separación de variables

El método de separación de variables permite obtener, en algunos ejemplos, familias de soluciones especiales, pero cuando las ecuaciones son lineales, se obtienen muchas soluciones considerando las combinaciones lineales de éstas soluciones especiales. Con suerte, estas familias de soluciones son suficientes para ajustar condiciones iniciales dadas. Veremos el método en los ejemplos de la ecuación del calor y la ecuación de ondas.

10.1. Ecuación del calor

La experiencia cotidiana nos indica que cuando colocamos cerca un objeto frío con otro caliente, el caliente se enfría y el frío se calienta. Interpretamos esto como un flujo de calor desde el objeto caliente hacia el objeto frío. A su vez, si un sólido está a temperatura pareja, nunca se observa que se enfríe o se caliente espontáneamente. Esta experiencia la podemos formalizar proponiendo un modelo en donde el (vector) flujo de calor esté alineado con la dirección de crecimiento de la temperatura, o sea, el gradiente de la función temperatura. Si llamamos $u(x, y, z, t)$ a la función temperatura de un sólido en el punto (x, y, z) en el momento t , como el flujo va de lo caliente a lo frío, el flujo será proporcional a *menos* el gradiente:

$$\vec{F}(x, y, z, t) = -k\nabla u = -k (\partial_x u, \partial_y u, \partial_z u)|_{(x,y,z,t)}$$

donde k será una constante característica del material.

Ahora consideremos un punto $p = (x_0, y_0, z_0)$ y una pequeña región $W \ni p_0$ (por ejemplo una bola de radio R centrada en p_0). La temperatura promedio en la región W será proporcional a

$$\iiint_W u(x, y, z, t) dx dy dz$$

y en caso de que haya una variación del promedio de temperatura en esa región, ésta será debida al flujo de calor por la superficie borde de la región (estamos modelando transmisión de calor en un sólido, donde no hay transferencia de calor por otras razones, como transporte por movimiento o existencia de fuentes). Cuando haya flujo de calor neto hacia afuera, la temperatura descenderá, cuando haya flujo hacia adentro la temperatura media se incrementará. Proponemos la relación

$$\begin{aligned} \partial_t \iiint_W u dx dy dz &= - \iint_{\partial W} \langle \vec{F}, \hat{n} \rangle dA \\ &= + \iint_{\partial W} \langle k\nabla u, \hat{n} \rangle dA \end{aligned}$$

y por el teorema de Gauss

$$= \iiint_W \operatorname{div}(k\nabla u) dx dy dz$$

Si suponemos que tenemos un sólido homogéneo, es decir, su conductividad térmica k no depende de la posición, entonces

$$= k \iiint_W \operatorname{div}(\nabla u) dx dy dz = k \iiint_W \Delta u dx dy dz$$

Finalmente, si asumimos una regularidad suficiente en el tiempo de forma tal que

$$\partial_t \iiint_W u dx dy dz = \iiint_W \partial_t u dx dy dz$$

podemos concluir

$$\iiint_W \partial_t u dx dy dz = k \iiint_W \Delta u dx dy dz$$

y como esto es válido para cualquier región W , necesariamente

$$\boxed{\partial_t u = k \Delta u}$$

10.2. La ecuación del calor unidimensional y separación de variables

Consideremos la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Si resolvemos utilizando el método de variables separadas, proponemos $f(x, t) = T(t)X(x)$, entonces

$$T'(t)X(x) = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = T(t)X''(x)$$

pasando de miembro, al menos donde no se anulan, tendremos

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

como a la derecha no depende de t y a la izquierda no depende de x se sigue que existe una constante λ (en \mathbb{R} si T y X eran funciones a valores reales, o $\lambda \in \mathbb{C}$ en general) tal que

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

por lo tanto

$$T = T(0)e^{\lambda t}, \quad X = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

y así

$$f(x, t) = f_\lambda(x, t) := Ae^{\sqrt{\lambda}x + \lambda t} + Be^{-\sqrt{\lambda}x + \lambda t}$$

es una solución. Por el principio de superposición (la ecuación es lineal!)

$$f(x, t) = \sum_{\lambda} f_{\lambda}(x, t) = \sum_{\lambda} \left(A(\lambda)e^{\sqrt{\lambda}x+\lambda t} + B(\lambda)e^{-\sqrt{\lambda}x+\lambda t} \right)$$

es solución para cualquier elección de $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$, podría incluso ser una serie (si los λ 's fueran numerables) o también, si tuviera sentido, podría ser algo de la forma

$$f(x, t) = \int \left(A(\lambda)e^{\sqrt{\lambda}x+\lambda t} + B(\lambda)e^{-\sqrt{\lambda}x+\lambda t} \right) d\lambda$$

10.3. Ecuación de onda

El método de variables separadas también lo podemos aplicar a la ecuación de onda:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

(v una constante con unidades de velocidad). De nuevo proponemos una solución de la forma $f(x, t) = T(t)X(x)$ y obtenemos

$$\frac{1}{v^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

De aquí concluimos

$$\begin{aligned} X(x) &= Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} \\ T(t) &= Ce^{v\sqrt{\lambda}t} + De^{-v\sqrt{\lambda}t} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$f(x, t) = X(x)T(t) = A_{++}e^{\sqrt{\lambda}(x+vt)} + A_{+-}e^{\sqrt{\lambda}(x-vt)} + A_{-+}e^{-\sqrt{\lambda}(x+vt)} + A_{--}e^{-\sqrt{\lambda}(x-vt)}$$

Observación 10.1. $f(x, t) = f_1(x + vt) + f_2(x - vt)$. Al menos esto vale en dim 1 (para x).

De nuevo por superposición, puedo sumar para varios valores de λ , o considerar integrales con funciones "peso" $A_{\pm\pm}(\lambda)$ y obtener soluciones de la forma

$$f(x, t) = \int \left(A_{++}(\lambda)e^{\sqrt{\lambda}(x+vt)} + A_{+-}(\lambda)e^{\sqrt{\lambda}(x-vt)} + A_{-+}(\lambda)e^{-\sqrt{\lambda}(x+vt)} + A_{--}(\lambda)e^{-\sqrt{\lambda}(x-vt)} \right) d\lambda$$

10.4. Ejemplo de aplicación de la ecuación del calor: la bodega ideal

Supongamos que en una dada locación, la temperatura cambia a medida que descendemos en profundidad, digamos $T(t, x)$ = temperatura a tiempo t y a profundidad x .

Supondremos que es una muy buena aproximación que T sea periódica con respecto a t , con periodo 1 año, pues desde hace mucho tiempo que en verano siempre hace calor y en invierno siempre hace frío... Planteamos la ecuación del calor unidimensional

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2)$$

donde k es la constante de conductividad térmica del suelo, que dependerá del tipo de suelo en cuestión, que asumimos homogéneo. (Por ejemplo, un orden de magnitud de piedra arenosa o cuarzo es $k \approx 1,2 \times \text{mm}^2/\text{seg.}$)

Supongamos conocida la función "temperatura típica durante el año al aire libre" = $f(t) = T(t, 0)$. Entonces, para cada x , desarrollamos en serie de Fourier la dependencia temporal

$$T(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(x) e^{2\pi i n t / A}$$

donde A es un año. Si exigimos la validez de la ecuación (2) obtenemos

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(x) \frac{2\pi i n}{A} e^{i n t / A} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} k c_n(x)'' e^{2\pi i n t / A}$$

y por lo tanto, para cada n debe valer

$$c_n''(x) = \frac{2\pi i n}{kA} c_n(x)$$

Para $n = 0$ tenemos que $c_0(x) = a + bx$. Desconocemos a y b (salvo que $a = c_0(0)$ = el coeficiente 0 de $f(t)$ = la temperatura media anual), pero la dependencia temporal asociada

$$c_0(x) e^{2\pi i \cdot 0 \cdot t} = c_0(x)$$

no nos aportará a una variación temporal. Por lo tanto no nos interesa en este análisis. Para $n \neq 0$,

$$c_n(x) = \text{combinaciones lineales de } e^{\lambda_n x}$$

donde $\lambda^2 = \frac{2\pi i n}{kA}$. Si $n > 0$,

$$\lambda_n = \pm(1 + i) \sqrt{\frac{\pi n}{kA}}$$

Si $n < 0$, digamos $n = -|n|$,

$$\lambda_{-|n|} = \pm(1 + i) i \sqrt{\frac{\pi |n|}{kA}} = \pm(-1 + i) \sqrt{\frac{\pi |n|}{kA}}$$

Una de las soluciones tiene una exponencial con parte real positiva: la desechamos, porque observamos que a profundidad de unos pocos metros, la temperatura no aumenta

exponencialmente con la profundidad (estamos suponiendo que no vivimos cerca de un volcán!). Proponemos entonces

$$\begin{aligned}
 T(t, x) &= c_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n(x) e^{2\pi i n t / A} + c_{-n}(x) e^{-2\pi i n t / A} \right) \\
 &= c_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n(0) e^{-(1+i)\sqrt{\frac{2\pi n}{kA}} x} e^{2\pi i n t / A} + c_{-n}(0) e^{-(1+i)\sqrt{\frac{2\pi n}{kA}} x} e^{-2\pi i n t / A} \right) \\
 &= c_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n(0) e^{i(-\sqrt{\frac{2\pi n}{kA}} x + 2\pi i n t / A)} + c_{-n}(0) e^{i(\sqrt{\frac{2\pi n}{kA}} x - 2\pi i n t / A)} \right) e^{-\sqrt{\frac{2\pi n}{kA}} x}
 \end{aligned}$$

Como $f(t) = T(t, 0)$, necesariamente

$$f(t) = T(t, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(0) e^{2\pi i n t / A}$$

sabemos que $c_n(0)$ = el coeficiente n -ésimo de Fourier de f . Como f es real, necesariamente $c_{-n}(0) = \overline{c_n(0)}$, luego

$$T(t, x) = c_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left(c_n(0) e^{i(2\pi n t / A - \sqrt{\frac{2\pi n}{kA}} x)} \right) e^{-\sqrt{\frac{2\pi n}{kA}} x}$$

Vemos que la "influencia" en x se ve reflejada en dos aspectos: el más evidente es que decrece de manera exponencial (real) negativa, y la tasa de decaimiento es más rápida cuanto mayor es el n . Por lo tanto, el término con $n = 1$ será rápidamente el preponderante cuando empecemos a aumentar en profundidad. El segundo aspecto de dependencia se da a través de un "desfasaje" temporal. Asumamos ahora que nos posicionamos en una profundidad fija x_0 , entonces

$$T(t, x_0) = c_0(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left(c_n(0) e^{i(2\pi n t / A - \sqrt{\frac{2\pi n}{kA}} x_0)} \right) e^{-\sqrt{\frac{2\pi n}{kA}} x_0}$$

Viendo que dependencia temporal más importante es la debida al primer armónico, aproximamos

$$T(t, x_0) \approx c_0(x_0) + 2\operatorname{Re} \left(c_1(0) e^{i(2\pi t / A - \sqrt{\frac{2\pi}{kA}} x_0)} \right)$$

Vemos que podemos ahora calcular -o despejar- la profundidad x_0 de manera tal que el "desfasaje" sea máximo. en otras palabras, si

$$\sqrt{\frac{2\pi}{kA}} x_0 = \pi$$

entonces

$$e^{i(2\pi t / A - \sqrt{\frac{2\pi}{kA}} x_0)} = e^{i(2\pi t / A - \pi)} = e^{i\frac{2\pi}{A}(t - A/2)}$$

y así logramos un desfase de 6 meses (medio año): para ese valor de profundidad x_0 la bodega tendrá máximo frío en verano y máximo calor en invierno :-), concretamente,

$$x_0 = \sqrt{\frac{\pi k A}{2}}$$

Si $k \approx 1,2 \times \frac{mm^2}{seg}$ (tomado de Wikipedia el material "sandstone")

$$1 \text{ año} = 365 \times 24 \times 60 \times 60 \text{ seg} \approx 3,1536 \times 10^7 \text{ seg}$$

$$\Rightarrow x_0 \approx \sqrt{\frac{\pi \times 1,2 \times \frac{mm^2}{seg} \times 3,1 \times 10^7 \text{ seg}}{2}} \approx 7700 \text{ mm} = 7,7 \text{ metros}$$

En una zona de suelo de piedra arenosa, la bodega ideal debería estar ubicada aproximadamente entre un segundo o tercer subsuelo.

Observación 10.2. Una alternativa a la bodega, es construir unas cañerías que vayan y vuelvan a radiadores a esa profundidad, teniendo así la opción de un sistema de calefacción en invierno y de refrigeración en verano, aprovechando el calor acumulado en el verano anterior y el frío del invierno pasado respectivamente.

11. Transformada de Fourier

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, se define su transformada de Fourier como

$$\widehat{f}(y_1, \dots, y_n) := \iint \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) e^{-i\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle} dx_1 \cdots dx_n$$

En particular, para dependencia en una sola variable, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx$$

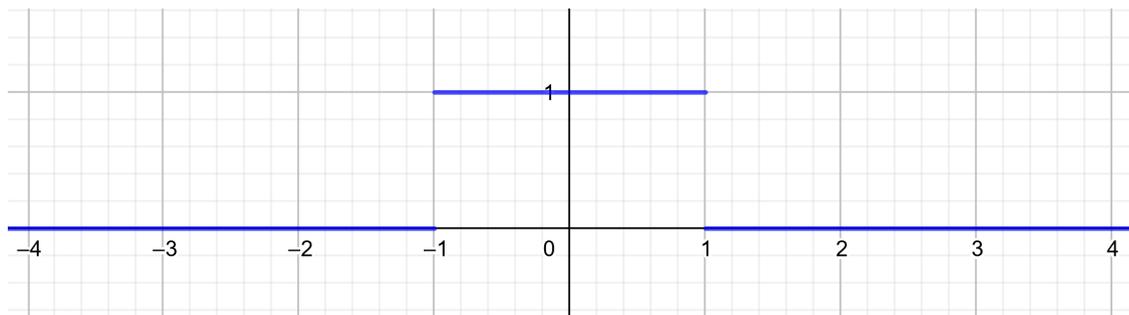
Esta transformada debe su nombre a Fourier, que perfeccionó las ideas previas de su época sobre oscilaciones de cuerdas vibrantes (formalizando las ahora llamadas Series de Fourier) aplicando estos métodos al estudio de la ecuación del Calor. La transformada de Fourier tiene las siguientes propiedades importantísimas:

- "intercambia" la operación de derivar con la de multiplicar por la variable (ver Proposiciones 11.6 y 11.6).
- La operación de "transformar Fourier" es inversible, con inversa muy similar (ver Sección 11.6).
- Es una isometría en $L^2(\mathbb{R})$ (ver Sección 11.8, Fórmula de Plancherel).

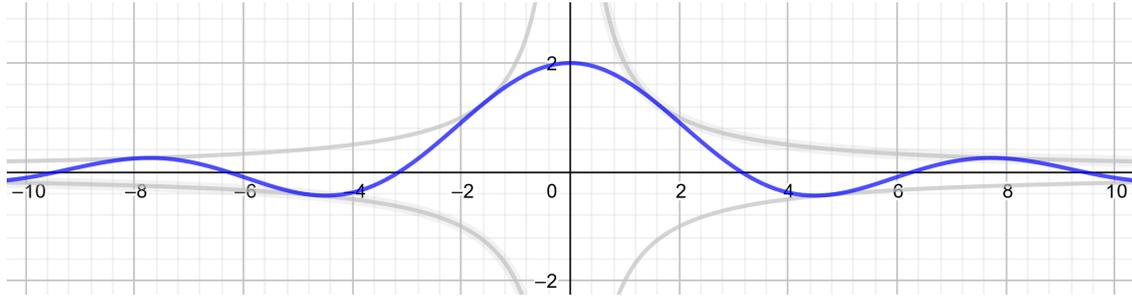
La primera propiedad hace que ecuaciones en derivadas parciales a coeficientes constantes (o que no dependan de la variable con respecto a la que se está derivando) se conviertan en ecuaciones algebraicas, que se pueden resolver con los métodos algebraicos tradicionales como "pasar dividiendo". Y una vez resuelto el problema respectivo de la transformada de f , se aplica la transformada inversa y así se resuelve el problema original.

11.1. Primeros ejemplos y propiedades

Ejemplo 11.1. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = 1$ si $x \in [-1, 1]$ y $f(x) = 0$ en otro caso.



entonces $\hat{f} = \frac{2 \operatorname{sen}(y)}{y}$.



En efecto, si $y = 0$,

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-1}^1 1 dx = 2$$

Para $y \neq 0$,

$$\begin{aligned} \hat{f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(x,y)} dx = \int_{-1}^1 e^{-ixy} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{e^{-ixy}}{-iy} \right) dx = \frac{i}{y} (e^{-iy} - e^{iy}) \\ &= \frac{i}{y} (-2i \operatorname{sen} y) = \frac{2 \operatorname{sen} y}{y} \end{aligned}$$

Ejemplo 11.2. (Relación entre fase y traslación) Si $f(x) = g(x)e^{iax}$, ($a \in \mathbb{R}$), entonces $\hat{f}(y) = \hat{g}(y - a)$:

$$\begin{aligned} \hat{f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{iax} e^{-ixy} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ix(y-a)} dx = \hat{g}(y - a) \end{aligned}$$

Ejemplo 11.3. (Relación entre traslación y fase) Si $f(x) = g(x - a)$ entonces $\hat{f}(y) = e^{-ia y} \hat{g}(y)$, pues con el cambio de variable $\tilde{x} = x - a$,

$$\begin{aligned} \hat{f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x - a) e^{-ixy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tilde{x}) e^{-i(\tilde{x}+a)y} d\tilde{x} \\ &= e^{-ia y} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tilde{x}) e^{-i\tilde{x}y} d\tilde{x} = e^{-ia y} \hat{g}(y) \end{aligned}$$

Ejemplo 11.4. (Expansiones y contracciones) $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $g(x) = f(ax)$ entonces

$$\hat{g}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ixy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-ixy} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-ixy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-iaxy/a} d(ax)1/a \\
&= \frac{\widehat{f}(y/a)}{a}
\end{aligned}$$

Ejemplo 11.5. $g(x) = \overline{f(-x)}$ entonces $\widehat{g} = \widehat{f}$.

Proposición 11.6. $f \in L^1$ entonces \widehat{f} es continua, si además $f(x)x \in L^1$ entonces \widehat{f} es derivable y $\widehat{f}'(y) = \widehat{g}(y)$ donde $g(x) = f(x)ix$.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, afirmamos que existe $R > 0$ tal que $|\int_{|x|>R} f(x)e^{ixy} dx| < \epsilon/2$ para cualquier y . En efecto, como $f \in L^1(\mathbb{R})$, para cualquier $y \in \mathbb{R}$ también $\phi_y(x) := f(x)e^{ixy}$ también pertenece a L^1 y como la integral se puede calcular como

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ix} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x)e^{ix} dx = \ell$$

Entonces existe R tal que

$$\left| \int_{-R}^R f(x)e^{ix} dx - \ell \right| < \epsilon/2$$

y ése R sirve.

Veamos ahora la continuidad. Dejamos fijo el ϵ y R .

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}(y + \Delta y) - \widehat{f}(y)| &= \left| \int f(x)e^{-ix(y+\Delta y)} dx - \int f(x)e^{-ixy} dx \right| \\
&\leq \int_{|x| \leq R} |f(x)e^{-ixy}(e^{ix\Delta y} - 1)| dx + \epsilon/2 \\
&= \int_{|x| \leq R} |f(x)| \frac{|e^{ix\Delta y} - 1|}{|x\Delta y|} |x\Delta y| dx + \epsilon/2 \\
&\leq \left(\int_{|x| \leq R} |f(x)| \frac{|e^{ix\Delta y} - 1|}{|x\Delta y|} dx \right) R|\Delta y| + \epsilon/2
\end{aligned}$$

Recordamos que la función compleja

$$\frac{e^{iz} - 1}{z}$$

es holomorfa en $z = 0$ y por lo tanto continua alrededor del cero, y para $t \in \mathbb{R}$ de módulo muy grande

$$\frac{|e^{it} - 1|}{|t|}$$

tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$, luego $\frac{e^{it}-1}{t}$ es acotado para todo $t \in \mathbb{R}$. En particular, para cualquier x y Δy $\left| \frac{e^{ix\Delta y}-1}{ix\Delta y} \right|$ está globalmente acotado.

Vemos entonces que el factor de la integral

$$\left(\int_{|x| \leq R} |f(x)| \frac{|e^{ix\Delta y} - 1|}{|x\Delta y|} dx \right) R|\Delta y| + \epsilon/2$$

queda acotada sin importar Δy . Recordamos que el ϵ está fijado y el R depende sólo de ϵ , pero vemos que aún hay un factor Δy , y concluimos continuidad, a la vez que adivinamos el camino a seguir para ver la derivabilidad.

Derivabilidad:

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{f}(y + \Delta y) - \widehat{f}(y)}{\Delta y} &= \frac{\int f(x)e^{-ix(y+\Delta y)} dx - \int f(x)e^{-ixy}}{\Delta y} \\ &= \frac{\int f(x)e^{-ixy}(e^{ix\Delta y} - 1) dx}{\Delta y} \\ &= \int f(x) \frac{e^{ix\Delta y} - 1}{\Delta y} dx \\ &= \int ix f(x) \left(\frac{e^{ix\Delta y} - 1}{ix\Delta y} \right) e^{-ix} dx \end{aligned}$$

Seguimos con la idea y dejamos los detalles como ejercicio:

1. usamos que $\frac{e^{ix\Delta y}-1}{ix\Delta y}$ es una función acotada, y por lo tanto el integrando $\in L^1$ y podemos, dado un $\epsilon > 0$, encontrar un $R > 0$ tal que la integral en todo \mathbb{R} dista de

$$\int_{-R}^R ix f(x) \left(\frac{e^{ix\Delta y} - 1}{ix\Delta y} \right) e^{-ix} dx$$

en menos de ϵ .

2. En $[-R, R]$,

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{e^{ix\Delta y} - 1}{ix\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{ix}{ix} = 1$$

3. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{it} - 1}{t} = 1$, entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe t_0 tal que si $|t| < |t_0|$ entonces

$$\left| \frac{e^{it} - 1}{t} - 1 \right| < \frac{\epsilon}{R\|f\|_1}$$

4. Ahora tomando Δy tal que $|R\Delta y| < t_0$ tendremos y por lo tanto $|x\Delta y| < t_0$ si $x \in [-R, R]$. Podemos comparar la integral original y la integral con el valor límite:

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{-R}^R ix f(x) \left(\frac{e^{ix\Delta y} - 1}{ix\Delta y} \right) e^{-ix} dx - \int_{-R}^R ix f(x) e^{-ix} dx \right| \\
 & \leq \left| \int_{-R}^R ix f(x) \left(\frac{e^{ix\Delta y} - 1}{ix\Delta y} - 1 \right) e^{-ix} dx \right| \\
 & \leq \int_{-R}^R |x| |f(x)| \left| \frac{e^{ix\Delta y} - 1}{ix\Delta y} - 1 \right| dx \\
 & \leq \int_{-R}^R R |f(x)| \frac{\epsilon}{2R \|f\|_1} dx \\
 & = \frac{\epsilon}{2 \|f\|_1} \int_{-R}^R |f(x)| dx \leq \frac{\epsilon}{2}
 \end{aligned}$$

□

De demostración sensiblemente más sencilla es la siguiente Proposición, análoga a la anterior en enunciado:

Proposición 11.7. $f \in C^1$ con $f' \in L^1$ y supongamos que $\exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ (necesariamente cero).

Entonces $\widehat{(f')}(y) = iy\widehat{f}(y)$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 \widehat{f'}(y) &= \int f'(x) e^{-ixy} dx \\
 &= f(x) e^{-ixy} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int f(x) e^{-ixy} (-iy) dx \\
 &= +iy \int f(x) e^{-ixy} dx = +iy\widehat{f}(y)
 \end{aligned}$$

□

Resumen de las primeras propiedades

1. $\widehat{(f(x)e^{iax})}(y) = \widehat{f}(y - a)$

2. $\widehat{f(x - a)} = e^{-ia y} \widehat{f}(y)$

3. $\widehat{f(ax)}(y) = \frac{\widehat{f}(y/a)}{a}$

4. Tomando $\tilde{a} = \frac{1}{a}$ tenemos también $\widehat{f(\frac{1}{a})}(y) = a\widehat{f}(ay)$

$$5. \frac{d}{dy} \widehat{f}(y) = -ix \widehat{f(x)}(y)$$

$$6. \frac{d}{dx} \widehat{f(x)}(y) = iy \widehat{f}(y)$$

Corollario 11.8. ■ $f \in C^k$ y en L^1 entonces $y^k \widehat{f}(y)$ acotada, en particular $f \in C^\infty$ y en L^1 entonces \widehat{f} decae mas rápido que cualquier potencia.

- f en L^1 tal que $x^k f(x) \in L^1$ entonces $\widehat{f} \in C^k$. En particular, si $f \in L^1$ decae mas rápido que cualquier potencia (i.e. $x^n f(x) \in L^1$ para cualquier n) entonces $\widehat{f} \in C^\infty$.
- Denotando $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ al espacio de Schwartz de todas las funciones infinitamente derivables tales que decaen más rápido que cualquier potencia polinomial, entonces si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, tenemos que $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

11.2. Demostración de regularidad utilizando análisis funcional

Nosotros comenzamos definiendo la transformada de Fourier para funciones en $L^1(\mathbb{R})$, es decir, funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

las llamadas funciones absolutamente integrables. Denotamos $L^1(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las funciones absolutamente integrables en \mathbb{R} . Si tenemos una función $f \in L^1$ y g una función acotada, digamos

$$\exists M > 0 : g(x) \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

entonces claramente $f(x)g(x)$ es absolutamente integrable y valen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) dx \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)g(x)| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| M dx = M \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \\ &= M \|f\|_1 \end{aligned}$$

De esta desigualdad obtendremos muchísimas consecuencias.

Primero observamos que la cuenta anterior es válida para cualquier cota de $|g|$, por lo que consideraremos "la mejor cota" de $|g(x)|$, es decir, el supremo. Como será de gran relevancia le pondremos nombre.

Definición 11.9. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función acotada. Definimos la norma supremo (o norma infinito) de g como

$$\|g\|_\infty = \|g\|_{\text{sup}} := \sup\{|g(x)| : x \in \mathbb{R}\}$$

Dejamos como ejercicio verificar que tiene las propiedades esperadas de una norma:

- $\|g\|_{\text{sup}} \geq 0$ y $\|g\|_{\text{sup}} = 0$ si y sólo si $g \equiv 0$.
- $\|g + h\|_{\text{sup}} \leq \|g\|_{\text{sup}} + \|h\|_{\text{sup}}$
- $\|\lambda g\|_{\text{sup}} = |\lambda| \|g\|_{\text{sup}}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Puesto que por construcción $|g(x)| \leq \|g\|_{\text{sup}}$, tendremos que, si $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \right| \leq \|f\|_1 \|g\|_{\text{sup}}$$

Utilizando esta desigualdad, tenemos los siguientes corolarios:

Corollario 11.10. Si $\{g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ es una sucesión de funciones acotadas que convergen uniformemente a g (necesariamente acotada) y $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g_n(x)dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$$

Es decir, vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g_n(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x)g_n(x)dx$$

Similarmente, si fijamos g y variamos f tenemos la siguiente versión:

Corollario 11.11. Si $\{f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$ es una sucesión de funciones en $L^1(\mathbb{R})$ que converge a una función $f \in L^1(\mathbb{R})$ en norma 1, es decir, tal que

$$\|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

y g es una función acotada, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$$

Es decir, vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)g(x)dx$$

Demostración. Para el primer corolario, tenemos

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g_n(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \right| = \\ & = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(g_n(x) - g(x))dx \right| \leq \|f\|_1 \|g_n - g\|_{\text{sup}} \end{aligned}$$

y notamos que g_n converge uniformemente a g si y sólo si $\|g_n - g\|_{\text{sup}} \rightarrow 0$, y por lo tanto la desigualdad anterior implica

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g_n(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \right| \rightarrow 0$$

Similarmente, si fijamos g y consideramos una sucesión de funciones $f_n \rightarrow f$ en el sentido L^1 , es decir, tal que $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$, tendremos

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \right| = \\ & = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f_n(x) - f(x))g(x)dx \right| \leq \|f_n - f\|_1 \|g\|_{\text{sup}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

Estas generalidades tienen las siguientes aplicaciones a la transformada de Fourier:

Proposición 11.12. $f \in L^1(\mathbb{R})$ de soporte compacto (i.e. existe R tal que $f(x) = 0$ si $|x| > R$) entonces \hat{f} es analítica con radio de convergencia infinito.

Demostración. Supongamos que el soporte de f está contenido en $[-R, R]$, entonces

$$\hat{f}(y) = \int f(x)e^{-ixy}dx = \int_{-R}^R f(x)e^{-ixy}dx = \int_{-R}^R f(x) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ixy)^n}{n!} \right) dx$$

Pero, fijado y , como el radio de convergencia de la exponencial e^{ixy} (vista como función de x) es infinito, entonces tenemos una convergencia uniforme para $x \in [-R, R]$ de las sumas parciales

$$g_N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{(-ixy)^n}{n!} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{unif}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ixy)^n}{n!}$$

y luego

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R f(x) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ixy)^n}{n!} \right) dx &= \int_{-R}^R f(x) \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-ixy)^n}{n!} \right) dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \int_{-R}^R f(x) \frac{(-ixy)^n}{n!} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-R}^R f(x) \frac{(-ixy)^n}{n!} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{-R}^R f(x) \frac{(-ix)^n}{n!} dx \right) y^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \end{aligned}$$

donde $a_n = \int_{-R}^R f(x) \frac{(-ix)^n}{n!} dx$.

Vemos entonces que $\widehat{f}(y)$ es de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ para los a_n calculados anteriormente, es decir, \widehat{f} está dada por una serie con radio de convergencia infinito. \square

Si bien claramente no toda función en $L^1(\mathbb{R})$ es de soporte compacto, tenemos lo siguiente:

Proposición 11.13. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y definimos, para cada $N \in \mathbb{N}$

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [-N, N] \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Entonces $\|f_N - f\|_1 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

Demostración. Por hipótesis $f \in L^1(\mathbb{R})$, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$. Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N |f(x)| dx$$

dado $\epsilon > 0$, existe N_0 tal que para $N > N_0$ vale

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx - \int_{-N}^N |f(x)| dx \right| < \epsilon$$

Pero

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx - \int_{-N}^N |f(x)| dx \right| &= \int_{-\infty}^{-N} |f(x)| dx + \int_N^{+\infty} |f(x)| dx \\ &= \int_{-\infty}^{-\infty} |f(x) - f_N| dx \end{aligned}$$

pues

$$f(x) - f_N = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in (-\infty, N) \\ 0 & \text{si } x \in [-N, N] \\ f(x) & \text{si } x \in [N, +\infty) \end{cases}$$

Es decir, hemos mostrado que dado $\epsilon > 0$ existe N_0 tal que $\|f_N - f\|_1 < \epsilon$ si $N \geq N_0$. \square

A partir de esto podemos dar una segunda demostración de la primera parte de la Proposición 11.6:

Corollario 11.14. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ entonces \widehat{f} es continua.

Demostración. Definiendo f_N como antes, al tener soporte compacto \widehat{f}_N es analítica, en particular continua. Pero como

$$f_N \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$$

entonces

$$\widehat{f}_N \xrightarrow{\text{unif}} \widehat{f}$$

Sabemos que la transformada de una de soporte compacto es analítica, en particular continua, luego \widehat{f} es límite uniforme de continuas y por lo tanto continua. \square

Con las mismas técnicas podemos dar una demostración de la segunda parte de la proposición mencionada anteriormente:

Corollario 11.15. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Si f es de soporte compacto, entonces (sabemos que \widehat{f} es analítica)

$$(\widehat{f})'(y) = (\widehat{ixf(x)})(y)$$

2. En general, si f tiene soporte arbitrario pero $xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$ entonces $\widehat{f} \in C^1$ y

$$(\widehat{f})'(y) = (\widehat{-ixf(x)})(y)$$

Demostración. Si f tiene soporte compacto, digamos $f(x) = 0$ si $x \notin [-R, R]$, entonces

$$\widehat{f}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$$

donde $a_n = \int_{-R}^R f(x) \frac{(-ix)^n}{n!} dx$ y tenemos

$$\begin{aligned} (\widehat{f})'(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n y^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} y^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\int_{-R}^R f(x) \frac{(-ix)^{n+1}}{(n+1)!} dx \right) y^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-R}^R f(x) \frac{(-ix)^{n+1} y^n}{n!} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-R}^R -ix f(x) \frac{(-ixy)^n}{n!} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-R}^R -ixf(x)e^{-ixy}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} -ixf(x)e^{-ixy}dx = (\widehat{ixf(x)})(y)
\end{aligned}$$

Para la segunda parte, si $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, definiendo f_N como antes sabemos que $\widehat{f_N}$ es analítica y

$$(\widehat{f_N})'(y) = (\widehat{-ixf_N(x)})(y)$$

Pero asumiendo $xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$, tenemos que

$$-ixf_N(x) \xrightarrow{\|\cdot\|_1} -ixf(x)$$

y por lo tanto tenemos que la sucesión de funciones $\widehat{f_N}(y)$ son una sucesión de funciones C^1 (por ser analíticas) que verifican

$$\widehat{f_N} \xrightarrow{unif} \widehat{f}$$

$$y \quad \widehat{f_N}' \xrightarrow{unif} \widehat{-ixf}$$

por lo tanto (Teorema 5.9 y Observación 5.10) concluimos que \widehat{f} es C^1 y $(\widehat{f})'(y) = (\widehat{-ixf})(y)$. \square

11.3. La transformada de la Gaussiana

Como ejemplo importante de aplicación de las propiedades realizaremos el siguiente cálculo:

$$\text{Si } f(x) = e^{-x^2/2} \text{ entonces } \widehat{f}(y) = \sqrt{2\pi}e^{-y^2/2}.$$

Demostración. Primero observamos que $f'(x) = -xe^{-x^2/2} = -xf(x)$, por lo tanto

$$iy \widehat{f}(y) = (\widehat{f'}) (y) = \widehat{-xf(x)}(y) = i(\widehat{ixf(x)})(y) = -i(\widehat{f})'(y)$$

Es decir (simplificando la i en ambos miembros), la transformada de f verifica la misma ecuación diferencial que f :

$$\frac{d}{dy} \widehat{f}(y) = -y\widehat{f}(y)$$

Concluimos $\widehat{f}(y) = cte e^{-y^2/2}$, y como $\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}$, entonces $\widehat{f}(y) = \sqrt{2\pi}e^{-y^2/2}$.

Si no recordábamos el valor de la integral de la Gaussiana, repasamos cómo calcular

$$\int e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Esto es consecuencia por ejemplo del siguiente argumento: Si llamamos I al valor de esa integral

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

entonces

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr \right) d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} 2r dr = \pi \left(e^{-r^2} \right) \Big|_{r=0}^{r=+\infty} = \pi \end{aligned}$$

Es decir, $I^2 = \pi$, luego $I = \sqrt{\pi}$. Para $e^{-x^2/2}$ hacemos un cambio de variable lineal:

$$\int e^{-x^2/2} dx = \int e^{-(x/\sqrt{2})^2} dx = \sqrt{2} \int e^{-(x/\sqrt{2})^2} d(x/\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{2\pi}$$

□

Ejemplo 11.16. Dejamos como ejercicio mostrar la fórmula (para $a > 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx+c} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}+c}$$

y el cálculo de la transformada de Fourier de $f(x) = e^{-ax^2+bx+c}$ a partir de la transformada de $e^{-x^2/2}$.

11.4. Producto de Convención

Observamos que si f y g son acotadas, entonces fg también pues si $|f(x)| \leq M$ y $|g(x)| \leq C$ para todo x entonces claramente

$$|f(x)g(x)| \leq MC$$

Pero si $f \in L^1$ y $g \in L^1$, no siempre el producto $fg \in L^1$, por ejemplo, si f y g son cero para $x \leq 0$ y $x > 1$ y $f(x) = g(x) = 1/\sqrt{x}$,

$$\int |f| = \int |g| = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_a^1 = 2 < \infty$$

o sea, $f, g \in L^1$, pero

$$\int |fg| = \int f^2 = \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \ln(a) = \infty$$

es decir, $fg \notin L^1$. Sin embargo, si f y g están en L^1 ,

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int |(f * g)(x)| dx = \int \left| \int f(y)g(x-y) dy \right| dx \\ &\leq \int \int |f(y)g(x-y)| dy dx \\ &= \int \int |f(y)g(x-y)| dx dy \\ &= \int \left(|f(y)| \int |g(x-y)| dx \right) dy \\ &= \int |f(y)| \left(\int |g(x)| dx \right) dy \\ &= \int |g(x)| dx \int |f(y)| dy = \|f\|_1 \|g\|_1 \end{aligned}$$

es decir, $f * g \in L^1$.

Ejemplo 11.17. $\chi_{[a,b]}$ = función característica de $[a, b]$ entonces

$$(f * \chi_{[a,b]})(x) = \int_a^b f(x-y) dy$$

Ejemplo 11.18. Supongamos que en un sistema unidimensional, un objeto puntual con carga q genera un potencial de forma que si su posición es x' , el potencial en x es

$$V(x) = \frac{q}{|x - x'|}$$

Si en cambio, tuviéramos una configuración con una "densidad" de estos objetos, con una densidad de carga dada por una función $\rho(x')$, superponiendo los potenciales del caso puntual tendríamos que el potencial en x estaría ahora dado por

$$V(x) = \int \frac{\rho(x')}{|x - x'|} dx'$$

Esta fórmula "conocida" puede ser interpretada en términos de convolución, pues si llamamos

$$V_0(x) := \frac{1}{|x|}$$

al potencial de una carga unitaria centrada en el origen, entonces el potencial debido a una distribución de cargas dada por ρ se escribe como

$$V(x) = \int \frac{\rho(x')}{|x - x'|} dx' = \int \rho(x') \frac{1}{|x - x'|} dx' = (\rho * V_0)(x)$$

De esta manera, una convolución entre f y g

$$(f * g)(x) = \int f(x')g(x - x')dx'$$

puede pensarse como una "superposición" de una dada función "potencial" g , con factor de peso dada por una función "densidad" f .

Mas allá de las interpretaciones, tenemos la siguiente propiedad fundamental de la convolución con respecto a la transformada de Fourier:

Proposición 11.19. *La transformada de Fourier manda producto de convolución en producto usual de funciones:*

$$\widehat{f * g}(y) = \widehat{f}(y)\widehat{g}(y)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(y) &= \int (f * g)(x)e^{-ixy} dx \\ &= \int \left(\int f(v)g(x - v)dv \right) e^{-ixy} dx \\ &= \int \left(\int f(v)g(x - v)e^{-ixy} dx \right) dv \\ &= \int f(v) \left(\int g(x - v)e^{-ixy} dx \right) dv \\ &= \int f(v) \left(\int g(x - v)e^{-i(x-v)y} e^{-ivy} dx \right) dv \\ &= \int f(v)e^{-ivy} \left(\int g(x - v)e^{-i(x-v)y} dx \right) dv \\ &= \int f(v)e^{-ivy} \left(\int g(x)e^{-ixy} dx \right) dv \\ &= \int f(v)e^{-ivy}\widehat{g}(y)dv \\ &= \left(\int f(v)e^{-ivy} dv \right)\widehat{g}(y) = \widehat{f}(y)\widehat{g}(y) \end{aligned}$$

□

Observación 11.20. A la vista del resultado anterior no resultará sorprendente saber que el producto de convolución es asociativo $(f * g) * h = f * (g * h)$ y conmutativo $f * g = g * f$ (dejamos la demostración como ejercicio), aunque no tiene unidad.

Observación 11.21. Si al resolver una ecuación para la transformada obtenemos que (la transformada de) la solución deseada es un producto de dos funciones, entonces la función original puede ser descrita en términos de un producto de convolución. Una ilustración de este hecho se dará en la Sección 11.7 al resolver la ecuación del calor utilizando transformada de Fourier.

11.5. Unidad aproximada para la convolución

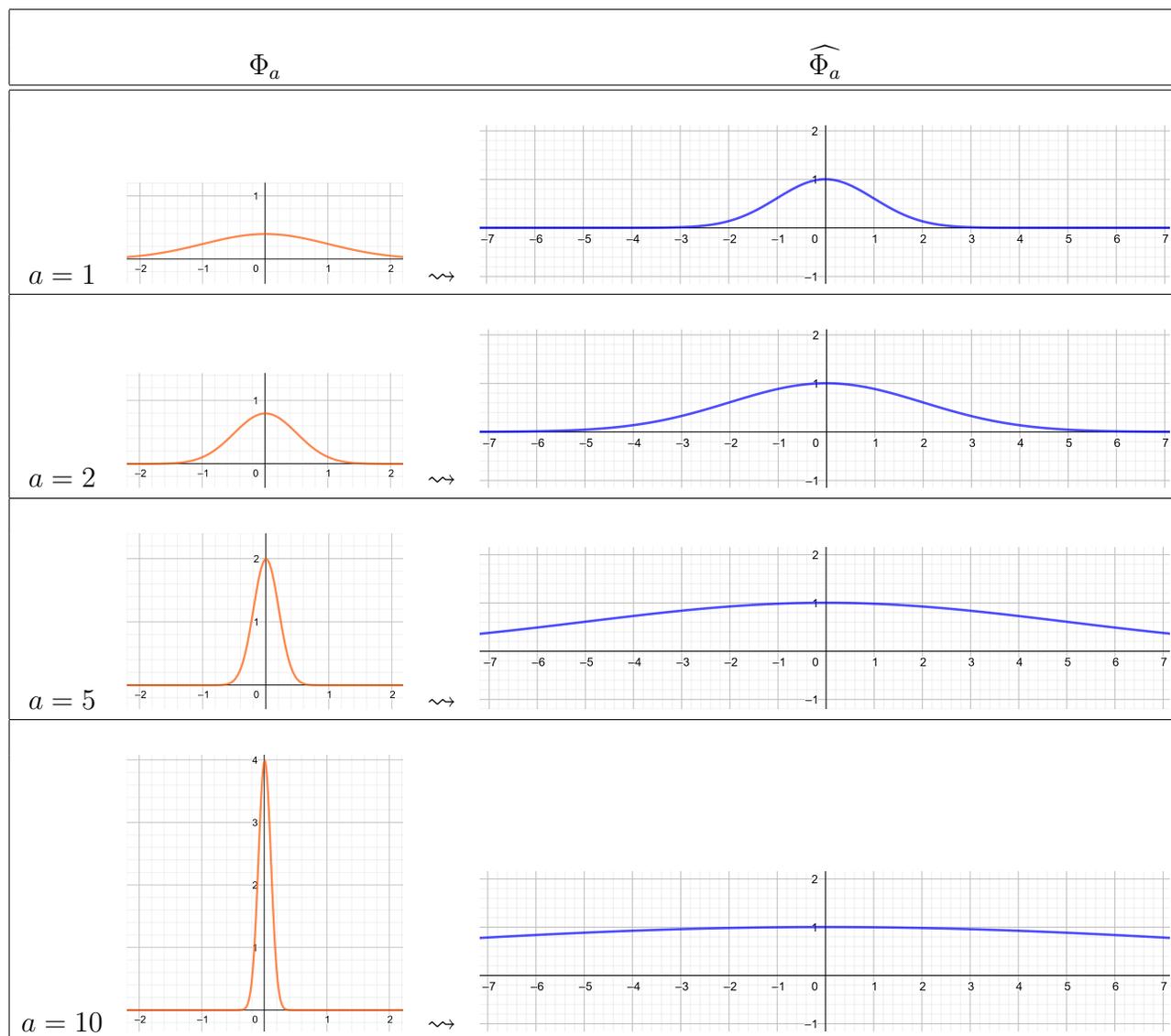
Recordemos la función $\Phi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ verifica

$$\widehat{\Phi}(y) = e^{-y^2/2}$$

Si tomamos $a > 0$ y definimos

$$\Phi_a(x) := a\Phi(ax) = \frac{ae^{-(ax)^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \implies \widehat{\Phi}_a(y) = \widehat{\Phi}(y/a) = e^{-\frac{(y/a)^2}{2}} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 1$$

donde la convergencia es puntual, pero también es uniforme sobre compactos.



Vemos que Φ_a se concentra cada vez más alrededor del origen, con integral total igual a uno, mientras que su transformada se parece cada vez más a la función constantemente 1. La función constantemente 1 es la unidad para la multiplicación usual de funciones, pero no es la transformada de ninguna función, sin embargo, la función Φ_a jugará el rol de unidad aproximada para la convolución.

Recordamos

$$(f * \Phi_a)(x) = \int f(x - y)\Phi_a(y)dy$$

y cuando transformamos Fourier obtenemos

$$(\widehat{f * \Phi_a})(y) = \widehat{f}(y)\widehat{\Phi}_a(y) = \widehat{f}(y)e^{-\frac{(y/a)^2}{2}} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \widehat{f}(y)$$

donde el último límite es para cada y fijo (y si fijamos $R > 0$, es uniforme en $[-R, R]$). El objetivo es mostrar que tomando $\Phi_a(x) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{-(ax)^2}$ y f continua, entonces para cada x

$$(\Phi_a * f)(x) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} f(x)$$

Para esto veamos primero un Lema:

Lema 11.22. *Dados $\delta > 0$ y $\epsilon > 0$, existe $a > 0$ tal que*

$$\left| \int e^{-y^2} dy - a \int_{-\delta}^{\delta} e^{-(ay)^2} dy \right| < \epsilon$$

Demostración. $|y| < \delta \iff |ay| < a\delta$, por lo que un cambio de variables nos da

$$a \int_{-\delta}^{\delta} e^{-(ay)^2} dy = \int_{-a\delta}^{a\delta} e^{-y^2} dy$$

y como e^{-y^2} es integrable y, fijo δ , el límite cuando a va a infinito da la integral impropia de e^{-y^2} , concluimos. \square

El siguiente resultado es la razón por la que llamamos a la familia $\{\Phi_a : a > 0\}$ una unidad aproximada:

Proposición 11.23. *$f \in L^1$ y continua en x entonces*

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (f * \Phi_a)(x) = f(x)$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como f es continua, existe δ tal que $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ si $|x - y| < \delta$, es decir

$$f(x) - \epsilon < f(y) < f(x) + \epsilon$$

y por lo tanto

$$(f(x) - \epsilon)e^{-(a(y-x))^2} < e^{-a(y-x)^2} f(y) < (f(x) + \epsilon)e^{-(a(y-x))^2}$$

Integrando en la zona donde vale la desigualdad obtenemos

$$(f(x) - \epsilon)a \int_{x-\delta}^{x+\delta} e^{-(a(y-x))^2} dy < a \int_{x-\delta}^{x+\delta} e^{-a(y-x)^2} f(y) dy < (f(x) + \epsilon)a \int_{x-\delta}^{x+\delta} e^{-(a(y-x))^2} dy$$

Usando el lema anterior sabemos que existe un a tal que

$$\left| \int e^{-(y-x)^2} dy - a \int_{x-\delta}^{x+\delta} e^{-(a(y-x))^2} dy \right| = \left| \int e^{-(y-x)^2} dy - a \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-(ay)^2} dy \right| < \epsilon$$

y como la integral de la Gaussiana da $\sqrt{\pi}$, tenemos

$$(f(x) - \epsilon)\left(1 - \frac{\epsilon}{\sqrt{\pi}}\right) < a \int_{x-\delta}^{x+\delta} e^{-a(y-x)^2} f(y) dy < (f(x) + \epsilon)\left(1 + \frac{\epsilon}{\sqrt{\pi}}\right)$$

Lo que le falta al medio para toda la integral es

$$\begin{aligned} & \left| a \int e^{-(a(y-x))^2} f(y) dy - a \int_{x-\delta}^{x+\delta} e^{-(a(y-x))^2} f(y) dy \right| \leq \\ & \leq |a \int_{-\infty}^{x-\delta} e^{-(a(y-x))^2} |f(y)| dy + a \int_{x+\delta}^{\infty} e^{-(a(y-x))^2} |f(y)| dy \\ & \leq ae^{-a^2\delta^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy = ae^{-a^2\delta^2} \|f\|_1 \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

□

11.6. Anti-transformada

Definimos una versión diferente pero muy similar a la transformada de Fourier:

$$\tilde{f}(x) := \frac{1}{2\pi} \int f(y) e^{ixy} dy$$

Esta fórmula de transformación funcionará como operación inversa a la transformada de Fourier. En la demostración usaremos las unidades aproximadas y la propiedad de "anti-transformar" a las Gaussianas.

Primero, empezamos con algunas propiedades. Análogamente al caso de la transformada (con un signo de diferencia) tenemos:

1. $\tilde{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int f(y) dy$
2. $\widetilde{f(ay)}(x) = \frac{\tilde{f}(x/a)}{a}$
3. $\frac{d}{dx} \tilde{f}(x) = \widetilde{+iyf(y)}(x)$
4. $\widetilde{\frac{d}{dy} f(y)}(x) = -ix\tilde{f}(x)$

Una consecuencia inmediata es que podemos repetir el argumento de cálculo de transformada de la Gaussiana: si $\phi(y) = e^{-y^2/2}$, usando $\frac{d}{dy} \phi(y) = y\phi(y)$ y las propiedades de intercambio de multiplicación y derivación de la transformada de Fourier:

$$-ix\tilde{\phi}(x) = \widetilde{\left(\frac{d}{dy} \phi(y)\right)}(x) = \widetilde{y\phi(y)}(x) = -i\widetilde{(iy\phi(y))}(x) = -i\frac{d}{dx}(\tilde{\phi}(x))$$

O sea, $\tilde{\phi}$ verifica la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dx} \tilde{\phi}(x) = x\tilde{\phi}(x)$$

Esto implica que $\tilde{\phi}$ tiene la dependencia funcional de la forma

$$\tilde{\phi}(x) = cte e^{-x^2/2} = cte \phi(x)$$

Y como $\tilde{\phi}(0) = (1/2\pi) \int \phi(y)dy = \sqrt{2\pi}/2\pi$, concluimos

$$\tilde{\phi}(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = \Phi(x)$$

Con esta cuenta vemos que $\widetilde{(\Phi)} = \Phi$, y simplemente usando las propiedades formales de las transformadas también tendremos $\widetilde{(\Phi_a)} = \Phi_a$ para todo $a > 0$. Utilizando la convolución y tomando límite veremos que esto es suficiente para mostrar la fórmula de la anti-transformada en general (para funciones $f \in L^1$ continuas).

Demostración de la fórmula de inversión para las continuas:

Tomemos $f \in L^1$ continua. Por un lado sabemos que

$$f(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} (\Phi_a * f)(x)$$

pero también

$$\begin{aligned} (\Phi_a * f)(x) &= \int \frac{ae^{-(ay)^2/2}}{\sqrt{2\pi}} f(x-y)dy \\ &= \int \left(\frac{1}{2\pi} \int e^{-(z/a)^2/2} e^{izy} dz \right) f(x-y)dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-(z/a)^2/2} \left(\int e^{izy} f(x-y)dy \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-(z/a)^2/2} \left(\int e^{iz(x-y)} f(y)dy \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-(z/a)^2/2} e^{izx} \left(\int e^{-izy} f(y)dy \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-(z/a)^2} e^{izx} \hat{f}(z) dz \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int e^{izx} \hat{f}(z) dz = \widetilde{(\hat{f})}(x) \end{aligned}$$

Concluimos $\widetilde{(\hat{f})}(x) = f(x)$.

11.7. La ecuación del calor con transformada de Fourier

Consideramos la ecuación del calor unidimensional

$$\partial_t f(x, t) = \partial_x^2 f(x, t)$$

Si transformamos Fourier con respecto a la variable x :

$$\int \partial_t f e^{ixy} dx = \int \partial_x^2 f e^{ixy} dx$$

Bajo condiciones de regularidad suficientes en la dependencia temporal como para sacar la derivada temporal fuera de la integral, y usando la propiedad de la transformada de Fourier en relación a la derivada espacial obtenemos

$$\partial_t \hat{f} = -y^2 \hat{f}$$

Si fijamos y , al verla como una constante (con respecto a t) esta ecuación rápidamente se resuelve en general como

$$\hat{f}(y, t) = A(y)e^{-y^2 t}$$

Si imponemos una condición a tiempo inicial dada $f(x, 0) = u(x)$, entonces debe valer

$$\hat{f}(y, 0) = \hat{u}(y)$$

luego $A(y)$ no es otra cosa que $\hat{u}(y)$. Es decir, hemos calculado \hat{f} para f una solución de la ecuación del calor $f_t = f_{xx}$ junto a la condición inicial $f(x, 0) = u(x)$:

$$\hat{f}(y, t) = \hat{u}(y)e^{-y^2 t}$$

Ahora podemos despejar f anti-transformando:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(y, t) e^{iyx} dy = \frac{1}{2\pi} \int \hat{u}(y) e^{-y^2 t} e^{iyx} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \left(\int u(z) e^{-izy} dz \right) e^{-y^2 t} e^{iyx} dy \end{aligned}$$

Aplicando Fubini, adecuado cambios de variables y manipulaciones elementales tenemos

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \iint u(z) e^{-izy - y^2 t + iyx} dy dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint u(z) e^{-i(z-x)y - y^2 t} dz dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint u(z+x) e^{-izy - y^2 t} dz dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \iint u(z+x) e^{-izy-y^2t} dy dz \\
&= \frac{1}{2\pi} \int u(x+z) \left(\int e^{-izy-y^2t} dy \right) dz \\
&= \frac{1}{2\pi} \int u(x+z) \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{z^2}{4t}} dz \\
&= \frac{1}{2\pi} \int u(z) \frac{e^{-\frac{(z-x)^2}{4t}}}{\sqrt{t}} dz \\
&= (u * K_t)(x)
\end{aligned}$$

donde

$$K_t(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{4t}}}{\sqrt{t}}$$

Tenemos entonces un "resolvidor automático" de la ecuación del calor a condición inicial: dada una condición inicial $u(x) = f(x, 0)$, la solución a tiempo t se consigue con $u * K_t$.

11.8. Transformada de Fourier en L^2 : fórmula de Plancherel

Recordamos que para las funciones periódicas, la identidad de Parseval nos decía que la norma al cuadrado de una función se podía calcular a partir de la norma 2 de los coeficientes, vistos en $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned}
&f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \\
L^2[0, 2\pi] \ni f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} &\implies \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2
\end{aligned}$$

De esta manera, tomar Serie de Fourier de una función 2π - periódica puede ser considerado como una isometría entre $L^2(S^1)$ y $\ell^2(\mathbb{Z})$. Ahora, con la Transformada de Fourier de una función de variable continua "arbitraria" obtenemos otra función también de variable continua. Nos preguntamos por la condición de isometría con respecto a la norma 2, lo que se conoce como la fórmula de Plancherel. En principio, la transformada de Fourier se puede calcular a una $f \in L^1(\mathbb{R})$ y podría no tener sentido querer calcular la norma 2 de una función de L^1 . Para remediar este hecho, hacemos las consideraciones siguientes:

Como la transformada de Fourier (a menos de factor i) intercambia la derivada con multiplicación -y viceversa- concluimos que la transformada de Fourier preserva el subespacio de las funciones que son infinitamente derivables y con decaimiento más rápido que cualquier polinomio, llamado el espacio de Schwartz y denotado $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Este subespacio es muy cómodo porque $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ está contenido tanto en $C_0(\mathbb{R})$ (las continuas que tienden a cero en el infinito) como $L^1(\mathbb{R})$ y $L^2(\mathbb{R})$, y es un subespacio denso en cualquiera de los

casos (respectivamente con la norma supremo, la norma 1 y la norma 2). Calculemos en particular la norma 2 de la transformada de Fourier de una función f , que por comodidad la tomamos en $S(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
 \|\widehat{f}\|_2^2 &= \int |\widehat{f}|^2(y) dy = \int \widehat{f}(y) \overline{\widehat{f}(y)} dy \\
 &= \int \widehat{f}(y) \overline{\left(\int f(u) e^{-iuy} du \right)} dy \\
 &= \int \widehat{f}(y) \left(\int \overline{f(u)} e^{iuy} du \right) dy \\
 &= \iint \widehat{f}(y) \overline{f(u)} e^{iuy} dy du \\
 &= \int \overline{f(u)} \left(\int \widehat{f}(y) e^{iuy} dy \right) du \\
 &= \int \overline{f(u)} 2\pi \left(\frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}(y) e^{iuy} dy \right) du \\
 &= \int \overline{f(u)} 2\pi \widetilde{f}(u) du \\
 &= 2\pi \int \overline{f(u)} f(u) du \\
 &= 2\pi \int |f|^2(u) du \\
 &= 2\pi \|f\|_2^2
 \end{aligned}$$

y hemos mostrado la fórmula de Plancherel: $\|\widehat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$, o bien

$$\boxed{\left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f} \right\|_2^2 = \|f\|_2^2}$$

Observación 11.24. En espacios con producto interno, preservar la norma equivale a preservar el producto interno, por lo que también tendremos

$$\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle$$

Esta fórmula se puede obtener como corolario de la versión en norma, o también se puede obtener con casi exactamente la misma demostración que antes.

En efecto,

$$\begin{aligned}
 \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle &= \int \widehat{f}(y) \overline{\widehat{g}(y)} dy \\
 &= \int \widehat{f}(y) \overline{\left(\int g(z) e^{-izy} dz \right)} dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \widehat{f}(y) \left(\int \overline{g(z)} e^{izy} dz \right) dy \\
&= \iint \widehat{f}(y) \overline{g(z)} e^{izy} dy dz \\
&= \int \overline{g(z)} \left(\int \widehat{f}(y) e^{izy} dy \right) dz \\
&= \int \overline{g(z)} 2\pi \left(\frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}(y) e^{izy} dy \right) dz \\
&= \int \overline{g(z)} 2\pi \widetilde{f}(z) dz \\
&= 2\pi \int \overline{g(z)} f(z) dz \\
&= 2\pi \langle f, g \rangle
\end{aligned}$$

Corollario 11.25. *La transformada de Fourier está definida para L^1 , y en particular en $S(\mathbb{R})$. Pero se puede extender la definición por densidad a todo L^2 . Si una sucesión es de Cauchy con norma 2, su transformada de Fourier también lo es, pues salvo el factor 2π , la transformada de Fourier es una isometría con respecto a la norma 2.*

Observación 11.26. Muchas veces se toma la convención de poner un factor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ en la definición de transformada de Fourier, a diferencia de nuestro caso en que no pusimos ningún factor. Salvo la desventaja obvia de introducir un factor donde no había, la ventaja es que con esta convención por un lado la anti-transformada tiene *el mismo* factor (y no $\frac{1}{2\pi}$ como en nuestro caso) y además la transformada de Fourier con este factor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ resulta directamente una isometría, y no una isometría a menos de factor 2π .

11.9. Transformada de Fourier - Resumen de resultados

Definición

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es tal que

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

se define su transformada de Fourier como

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx$$

Propiedades algebraicas y diferenciales

- $f(x) = g(x)e^{iax}, (a \in \mathbb{R}) \implies \widehat{f}(y) = \widehat{g}(y - a)$
- $f(x) = g(x - a) \implies \widehat{f}(y) = e^{-ia y} \widehat{g}(y),$
- $a > 0, g(x) = f(ax) \implies \widehat{g}(y) = \frac{\widehat{f}(y/a)}{a}$
- $f \in L^1 \implies \widehat{f}$ continua, si además $f(x)x \in L^1 \implies \widehat{f} \in C^1$ y vale $\widehat{f}'(y) = \widehat{g}(y)$ donde $g(x) = -ixf(x).$
- $f \in C^1$ y $f' \in L^1$ y $\exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \implies (\widehat{f}')(y) = iy\widehat{f}(y).$
- $f \in L^1(\mathbb{R})$ de soporte compacto (i.e. existe R tal que $f(x) = 0$ si $|x| > R$) entonces \widehat{f} es analítica con radio de convergencia infinito.
- $f(x) = e^{-x^2/2}$ entonces $\widehat{f}(y) = \sqrt{2\pi}e^{-y^2/2}.$
- $(\forall a > 0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+2bx+c} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{a}+c}$

Convolución

- $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x - u)du$
- $\widehat{f * g}(y) = \widehat{f}(y)\widehat{g}(y)$

Fórmula de inversión:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continua tal que $f \in L^1$ y $\widehat{f} \in L^1$ (por ejemplo si $f \in L^1 \cap C^2$) entonces

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}(y)e^{+ixy} dy$$

Fórmula de Plancherel

$f \in L^1 \cap L^2$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}|^2(y)dy = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$$

o más generalmente, si $f, g \in L^1 \cap L^2$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)\overline{\widehat{g}(y)}dy = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$$

12. Transformada de Laplace

Así como la transformada de Fourier es muy utilizada en el ambiente tanto matemático como físico para resolver ecuaciones diferenciales, en el ambiente de la ingeniería, estudio de circuitos, señales etc. es mucho más popular la *Transformada de Laplace*. Esta transformada tiene la ventaja que puede ser definida directamente para funciones de variable real, sin consideraciones de números complejos (aunque para demostrar sus propiedades fundamentales es muy conveniente ver su extensión compleja).

12.1. Definición y algunas propiedades

Si $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función tal que, para cierto s en \mathbb{R} o \mathbb{C} , existe la integral impropia $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$, entonces se define su *transformada de Laplace* vía

$$\mathcal{L}(f)(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Observación 12.1. Si $\mathcal{L}(f)$ está definida en s entonces lo está para todos los $\tilde{s} > s$ (o si s es complejo, para todos los \tilde{s} tal que la parte real sea mayor que la parte real de s)

Definición 12.2. Si $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$, diremos que f crece a lo sumo exponencialmente si existen constantes positivas A, B tales que

$$|f(t)| \leq Ae^{Bt}, \text{ para todo } t \geq 0$$

El subconjunto de funciones que crece a lo sumo exponencialmente es un subespacio vectorial de todas las funciones, y resulta muy conveniente para la transformada de Laplace pues si f crece a lo sumo exponencialmente con constantes asociadas A y B , entonces la transformada de Laplace esta definida por lo menos para $\forall s > B$.

Observación 12.3. No toda función crece a lo sumo exponencialmente, por ejemplo $\mathcal{L}(f)$ no esta definida para $f(t) = e^{+t^2}$.

De aquí en adelante asumiremos, cada vez que calculemos una transformada de Laplace, que la función en cuestión es de crecimiento a lo sumo exponencial.

Proposición 12.4. *Propiedades de la transformada de Laplace:*

1. Es lineal: $\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{L}(f_1) + c_2 \mathcal{L}(f_2)$ para todo par de funciones f_1, f_2 y constantes c_1, c_2 .
2. $\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)$
3. $\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$
4. $\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n \mathcal{L}(f) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$

5. Si $F(t) = \int_0^t f(x)dx$ entonces $\mathcal{L}(F)(s) = \frac{L(f)(s)}{s}$

Demostración. Demostraremos la fórmula de la derivada primera. La derivada segunda es consecuencia de aplicar dos veces la fórmula de la derivada primera, y la fórmula de la derivada n -ésima se demuestra haciendo una recurrencia en n .

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f')(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt \\ &= e^{-st} f(t) \Big|_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty (-s) e^{-st} f(t) dt \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st} f(t) - e^{-s \cdot 0} f(0) + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= -f(0) + s\mathcal{L}(f)(s)\end{aligned}$$

donde hemos usado que f es de crecimiento a lo sumo exponencial y que por lo tanto $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st} f(t) = 0$.

Para demostrar 5, si $F(t) = \int_0^t f(x)dx$ entonces $F' = f$ y $F(0) = 0$, usando la fórmula de la derivada

$$\mathcal{L}(F') = s\mathcal{L}(F) - F(0)$$

obtenemos

$$\mathcal{L}(f) = s\mathcal{L}(F)$$

es decir, $\mathcal{L}(F) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f)$. □

Ejemplo 12.5. $\mathcal{L}(1) = ?$

Podemos calcular $\mathcal{L}(1)$ a partir de la definición, pero es interesante ver que también se puede calcular a partir de las propiedades que acabamos de ver. Sabemos que $\mathcal{L}(1') = \mathcal{L}(0) = 0$, pero por otra parte

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(1') &= s\mathcal{L}(1) - 1(0) = s\mathcal{L}(1) - 1 \\ \implies \mathcal{L}(1) &= \frac{1}{s}\end{aligned}$$

Análogamente, $\mathcal{L}(t) = ?$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t') &= s\mathcal{L}(t) - t|_{t=0} = s\mathcal{L}(t) \\ \implies \mathcal{L}(t) &= \frac{1}{s}\mathcal{L}(t') = \frac{1}{s}\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s^2}\end{aligned}$$

Notar que también podríamos haber utilizado la fórmula de la derivada segunda:

$$\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$$

que para $f(t) = t$ nos da

$$\mathcal{L}(0) = s^2 \mathcal{L}(t) - s \times 0 - 1$$

y como $\mathcal{L}(0) = 0$ concluimos $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$.

También podríamos haber calculado $\mathcal{L}(t)$ a partir de $t = \int_0^t 1 dx$ luego

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(1)$$

Y por supuesto también podríamos haber calculado

$$\mathcal{L}(t)(s) = \int_0^\infty e^{-st} t dt$$

integrando por partes, cosa que dejamos como ejercicio ver que coincide con el cálculo anterior. Dejamos también como ejercicio mostrar por recurrencia en n que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^n}$$

Observación 12.6. La función constantemente 1, así como la función $f(t) = t$ se caracterizan por ser soluciones de ecuaciones diferenciales muy sencillas ($1' = 0$, y $t'' = 0$). Esta condición fue la que nos permitió calcular sus transformadas de Laplace a partir de las propiedades generales que relacionan $\mathcal{L}(f)$ con $\mathcal{L}(f')$. Estas mismas ideas nos permitirán calcular fácilmente la transformada de Laplace de una función que sepamos de antemano que sea solución de alguna ecuación diferencial particular.

Ejemplo 12.7. Se quiere resolver

$$au'' + bu' + cu = f(t)$$

donde

$$f(t) = \chi_{[0,1]}(t) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

y queremos que satisfaga las condiciones iniciales $u(0) = u'(0) = 0$.

En principio, la solución podría costar cierto trabajo encontrarla, pero en cambio su transformada de Laplace será bastante fácil de calcular. A partir de la igualdad

$$au'' + bu' + cu = f(t)$$

Si transformamos Laplace en ambos miembros obtendremos

$$a\mathcal{L}(u'') + b\mathcal{L}(u') + c\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(f)$$

y como pedimos $u(0) = 0 = u'(0)$ tenemos

$$as^2\mathcal{L}(u) + bs\mathcal{L}(u) + c\mathcal{L}(u) = \int_0^1 e^{-st} dt$$

o bien

$$(as^2 + bs + c)\mathcal{L}(u) = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

y por lo tanto

$$\mathcal{L}(u)(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(as^2 + bs + c)}$$

Despues, para hallar u , hay que buscar la antitransformada... con un poco de práctica y conocimiento de varios ejemplos, muchas veces se puede descubrir una función cuya transformada sea lo que acabamos de despejar. Por ejemplo en este caso se puede manipular un poco utilizando fracciones simples y así simplificar el problema. También veremos que hay una versión de la operación de convolución, tal que -similar al caso Fourier- la transformada de la convolución es el producto usual, y así podremos muchas veces describir la solución buscada como producto de convolución de ciertas funciones más básicas. Mostraremos esta metodología en la sección 12.6.

12.2. Algunas transformadas de Laplace

1. $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$
2. $\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$
3. $\mathcal{L}(\sin(at)) = \frac{a}{s^2+s^2}$
4. $\mathcal{L}(\cos(at)) = \frac{s}{s^2+s^2}$
5. $\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$

La fórmula 1 ya la hemos visto y es un caso particular de la 2, que se demuestra tanto de manera directa como utilizando la propiedad

$$(e^{at})' = ae^{at}$$

Para demostrar 3 y 4 podemos manipular la fórmula 2 para e^{iat} . Alternativamente, si $f(t) = \sin(at)$, entonces sabemos que

$$f'' = -a^2 f, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = a$$

entonces

$$-a^2\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0) = s^2\mathcal{L}(f) - a$$

de esta manera despejamos

$$\mathcal{L}(f) = \frac{a}{a^2 + s^2}$$

Dejamos los demas cálculos y detalles de 1-4 como ejercicios, mostraremos la fórmula 5:

$$\mathcal{L}(1/\sqrt{t})(s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-st} dt}{\sqrt{t}}$$

Si hacemos la sustitución $u = \sqrt{t}$, entonces $t = u^2$ y $dt = 2udu$,

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-st} dt}{\sqrt{t}} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-su^2} 2udu}{u}$$

pero nos irá mejor si proponemos $u = \sqrt{st}$, $st = u^2$, $sdt = 2udu$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{e^{-st} dt}{\sqrt{t}} &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2} 2udu/s}{u/\sqrt{s}} \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2} du}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \end{aligned}$$

12.3. Más ejemplos: la función Heaviside

$$H_c(t) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & c \leq t \end{cases}$$

Suponiendo $c > 0$ tenemos

$$\mathcal{L}(H_c)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} H_c(t) dt = \int_c^{+\infty} e^{-st} = \left(\frac{e^{-st}}{-s} \right) \Big|_c^{+\infty} = \frac{e^{-sc}}{s}$$

La función Parte entera (en los positivos)

Para $t \geq 0$, podemos escribir

$$[t] = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(t)$$

Luego (para $s > 0$)

$$\mathcal{L}[t](s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}(H_n)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s} e^{-sn} = \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-s})^n = \frac{e^{-s}}{s(1 - e^{-s})} = \frac{1}{s(e^s - 1)}$$

12.4. Más propiedades

Similarmente al caso de Transformada de Fourier tenemos las siguientes identidades para la transformada de Laplace:

Proposición 12.8. Si $a > 0$, entonces

- $\mathcal{L}(f(at))(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f)(s/a)$
- $\mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) = \mathcal{L}(f)(s - a)$
- $e^{-sa}\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(f(t - a)H_a)$, donde H_a es la función de Heaviside en a .

En particular, para $f \equiv 1$ reobtenemos $\mathcal{L}(H_c) = e^{-sc}\mathcal{L}(1)(s) = \frac{e^{-sc}}{s}$.

Notar en la tercera propiedad, la aparición de la función de Heaviside, a diferencia de la versión análoga en transformada de Fourier.

Demostración. Planteamos por definición

$$\mathcal{L}(f(at))(s) = \int_0^{\infty} f(at)e^{-st}dt$$

Con la sustitución $u = at$ tenemos $du = adt$ y por lo tanto

$$\int_0^{\infty} f(at)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} f(u)e^{-su/a}\frac{1}{a}du = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f)(s/a)$$

Para la segunda fórmula,

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) = \int_0^{\infty} e^{at}f(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s-a)t}dt = \mathcal{L}(f)(s - a)$$

y finalmente

$$H_a f(t - a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ f(t - a) & t \geq a \end{cases}$$

por lo tanto

$$\mathcal{L}(H_a f(t - a)) = \int_0^{\infty} H_a f(t - a)e^{-st}dt = \int_a^{\infty} f(t - a)e^{-st}dt$$

Si ahora hacemos el cambio de variable $u := t - a$, entonces los límites de integración vuelven a ser 0 y $+\infty$:

$$\int_{t=a}^{\infty} f(t - a)e^{-st}dt = \int_{u=0}^{\infty} f(u)e^{-s(u+a)}du = \int_0^{\infty} f(u)e^{-su}e^{-sa}du = e^{-sa}\mathcal{L}(f)(s)$$

□

12.5. Convolución para Laplace

Dado que la transformada de Laplace tiene sentido para las funciones definidas en los positivos, comenzamos con una propiedad de la convolución con respecto a las funciones con soporte en $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Proposición 12.9. *Las funciones con soporte en $\mathbb{R}_{\geq 0}$ es una subálgebra para la convolución.*

Demostración. Supongamos $f(x) = g(x) = 0$ si $x \leq 0$. Si calculamos la convolución usual

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)dy$$

observamos que, como $f(y) = 0$ si $y \leq 0$ y $g(x - y) = 0$ si $x - y \leq 0$, entonces la integral da lo mismo que hacerla en

$$0 \leq y \leq x$$

Es decir,

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)dy = \int_0^x f(y)g(x - y)dy$$

A su vez, si bien la expresión anterior tiene sentido para $x < 0$, como $f(y) = 0$ si $y < 0$ tenemos que $(f * g)(x) = 0$ para $x < 0$. \square

Esto motiva la siguiente definición de (una nueva) convolución en el contexto de transformada de Laplace:

Definición 12.10. Para funciones definidas en $\mathbb{R}_{\geq 0}$ se define un producto de convolución de la siguiente manera:

$$(f \star g)(x) := \int_0^x f(y)g(x - y)dy, \quad \forall x \geq 0$$

Observación 12.11. Notar la diferencia notacional $f * g$ para la convolución usual y $f \star g$ para esta nueva convolución.

Veremos ahora que la misma propiedad de crecimiento a lo sumo exponencial, que nos permite definir tranquilamente transformada de Laplace, se lleva bien con la convolución, y que además la transformada de Laplace tiene el comportamiento esperado con la convolución:

Proposición 12.12. *Si f y g son a lo sumo exponenciales (i.e. $f(t) \leq Ke^{at}$) y $f(x) = g(x) = 0$ para $x \leq 0$ entonces la convolución también y*

$$\mathcal{L}(f \star g) = \mathcal{L}(f) \mathcal{L}(g)$$

Demostración. Podemos suponer $|f(x)| \leq Ke^{ax}$ y $|g(x)| \leq Me^{ax}$ (o sea, el mismo exponente, si no, usamos el mas grande de los dos). Ahora acotamos:

$$\begin{aligned} |(f \star g)(x)| &= \left| \int_0^x f(y)g(x-y)dy \right| \leq \int_0^x |f(y)| |g(x-y)|dy \leq \int_0^x KM e^{ay} e^{a(x-y)} dy \\ &= KM \int_0^x e^{ax} dy = KMxe^{ax} < KM e^x e^{ax} = KM e^{(a+1)x} \end{aligned}$$

Ahora transformamos la convolución:

$$\mathcal{L}(f \star g)(s) = \int_0^\infty (f \star g)(x)e^{-sx} dx = \int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)g(x-t)e^{-sx} dt \right) dx$$

Notar que esa integral corresponde a la versión iterada de la integral doble en la region de \mathbb{R}^2 formada por los pares (t, x) con $t \leq x$. Si utilizamos Fubini obtenemos

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty \left(\int_t^\infty f(t)g(x-t)e^{-sx} dx \right) dt \\ &= \int_0^\infty f(t) \left(\int_t^\infty g(x-t)e^{-sx} dx \right) dt \end{aligned}$$

ahora sustituímos $\tilde{x} = x - t$ y el límite de integración para de ser $x \geq t$ a $\tilde{x} \geq 0$:

$$= \int_0^\infty f(t) \left(\int_0^\infty g(\tilde{x})e^{-s(\tilde{x}+t)} d\tilde{x} \right) dt = \int_0^\infty f(t) \left(\int_0^\infty g(\tilde{x})e^{-s\tilde{x}} e^{-st} d\tilde{x} \right) dt$$

el factor e^{-st} sale de la integral en \tilde{x}

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty f(t)e^{-st} \left(\int_0^\infty g(\tilde{x})e^{-s\tilde{x}} d\tilde{x} \right) dt \\ &= \left(\int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \right) \left(\int_0^\infty g(\tilde{x})e^{-s\tilde{x}} d\tilde{x} \right) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 12.13. Sabemos que $\frac{1}{s-a} = \mathcal{L}(e^{ax})(s)$, pero $\frac{1}{(s-a)^2} = \mathcal{L}(?)(s)$.

Si llamamos $f(x) = e^{ax}$, como $\mathcal{L}(e^{ax}) = \frac{1}{s-a}$ obtenemos

$$(f \star f)(x) = \int_0^x e^{ay} e^{a(x-y)} dy = \int_0^x e^{ax} dy = xe^{ax}$$

y por lo tanto

$$\mathcal{L}(xe^{ax}) = \mathcal{L}(e^{ax} \star e^{ax}) = \mathcal{L}(e^{ax})\mathcal{L}(e^{ax}) = (\mathcal{L}(e^{ax}))^2 = \frac{1}{(s-a)^2}$$

Ejemplo 12.14. Queremos resolver la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales

$$u'' + 2u' + u = e^{-t}, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1$$

Si observamos el polinomio característico: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$ vemos que es un caso de raíz doble. Más aún, la función e^{-t} es solución del homogéneo. Sin embargo, no nos dejamos intimidar, calculamos transformada de Laplace en ambos miembros:

$$\mathcal{L}(u'') + 2\mathcal{L}(u') + \mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(e^{-t})$$

y usando las propiedades de la Transformada de Laplace, junto con las condiciones iniciales obtenemos

$$s^2\mathcal{L}(u) + 2s\mathcal{L}(u) + \mathcal{L}(u) = (s^2 + 2s + 1)\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(e^{-t}) = \frac{1}{s + 1}$$

por lo tanto

$$\mathcal{L}(u) = \frac{1}{(s + 1)^3}$$

Como $\mathcal{L}(e^{-t}) = \frac{1}{s+1}$, entonces

$$\mathcal{L}(e^{-t} \star e^{-t} \star e^{-t}) = \mathcal{L}(e^{-t})^3 = \frac{1}{(s + 1)^3}$$

Para calcular esa convolución al cubo recordamos que recién calculamos $e^{-x} \star e^{-x} = xe^{-x}$, luego

$$\begin{aligned} \left((e^{-x} \star e^{-x}) \star e^{-x} \right) (t) &= \left(xe^{-x} \star e^{-x} \right) (t) = \int_0^t xe^{-x} e^{-(t-x)} dx \\ &= \int_0^t xe^{-t} dx = \frac{t^2}{2} e^{-t} \end{aligned}$$

Y podemos comprobar fácilmente que $u(t) = \frac{t^2}{2} e^{-t}$ efectivamente es solución del problema

$$u'' + 2u' + u = e^{-t}, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1$$

12.6. Ejemplo genérico

Consideremos una ecuación de la forma

$$u''(t) + bu'(t) + cu(t) = f(t)$$

donde b y c son constantes y f es de crecimiento a lo sumo exponencial (o que admite transformada de Laplace), donde u está sujeta a condiciones iniciales

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1$$

Si transformamos Laplace en ambos miembros, recordando las propiedades

$$\mathcal{L}(u') = s\mathcal{L}(u) - u(0)$$

$$\mathcal{L}(u'') = s^2\mathcal{L}(u) - su(0) - u'(0)$$

obtendremos

$$s^2\mathcal{L}(u) - su_0 - u_1 + b(s\mathcal{L}(u) - u_0) + c\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(f)$$

y despejando obtenemos

$$\mathcal{L}(u) = \frac{\mathcal{L}(f) + (s+b)u_0 + u_1}{s^2 + bs + c} = \mathcal{L}(f) \cdot \frac{1}{s^2 + bs + c} + \frac{(s+b)u_0 + u_1}{s^2 + bs + c}$$

Caso raíces simples

Consideremos primero el caso en que el polinomio característico de la ecuación

$$s^2 + bs + c$$

tiene raíces simples, digamos λ y μ (podrían ser reales o complejas). Para el sumando

$$\frac{(s+b)u_0 + u_1}{s^2 + bs + c}$$

está claro que con el método de fracciones simples podemos describirlo como una combinación lineal

$$\frac{(s+b)u_0 + u_1}{s^2 + bs + c} = \frac{A_1}{s - \lambda} + \frac{B_1}{s - \mu}$$

De hecho, A_1 es el residuo en λ y B_1 es el residuo en μ . Recordando que para un polinomio $p(s)$ con raíces simples y una función holomorfa $f(s)$ tenemos

$$\text{Res}\left(\frac{f(s)}{p(s)}, s_0\right) = \frac{f(s_0)}{p'(s_0)}$$

concluimos

$$\begin{cases} A_1 = \frac{(\lambda + b)u_0 + u_1}{2\lambda + b} \\ B_1 = \frac{(\mu + b)u_0 + u_1}{2\mu + b} \end{cases}$$

Incluso, como

$$s^2 + bs + c = (s - \lambda)(s - \mu) = s^2 - (\lambda + \mu)s + \lambda\mu$$

sabemos que

$$b = -\lambda - \mu \implies \begin{cases} A_1 = \frac{-\mu u_0 + u_1}{\lambda - \mu} \\ B_1 = \frac{-\lambda u_0 + u_1}{\mu - \lambda} \end{cases}$$

En definitiva,

$$\frac{(s+b)u_0 + u_1}{s^2 + bs + c} = \frac{A_1}{s - \lambda} + \frac{B_1}{s - \mu} = \mathcal{L}(A_1 e^{\lambda t} + B_1 e^{\mu t})(s)$$

Si llamamos

$$\phi_1(t) := A_1 e^{\lambda t} + B_1 e^{\mu t}$$

vemos que $\phi_1(t)$ está determinada como la única solución del homogéneo que verifica las condiciones iniciales

$$\phi_1(0) = u_0, \quad \phi_1'(0) = u_1$$

Similarmente

$$\frac{1}{s^2 + bs + c} = \frac{A_0}{s - \lambda} + \frac{B_0}{s - \mu}$$

para ciertos A_0 y B_0 , que podemos calcularlos con la fórmula anterior (de A_1 y B_1) poniendo $u_0 = 0$ y $u_1 = 1$:

$$\frac{1}{(s - \lambda)(s - \mu)} = \frac{\frac{1}{\lambda - \mu}}{s - \lambda} + \frac{\frac{1}{\mu - \lambda}}{s - \mu} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{\lambda - \mu} e^{\lambda t} + \frac{1}{\mu - \lambda} e^{\mu t}\right)(s)$$

Llamemos

$$\phi_0(t) := \frac{1}{\lambda - \mu} e^{\lambda t} + \frac{1}{\mu - \lambda} e^{\mu t}$$

Observamos aquí que ϕ_0 también está definida como la única solución de la ecuación diferencial homogénea que satisface

$$\phi_0(0) = 0, \quad \phi_0'(0) = 1$$

Utilizando ahora la propiedad de que la transformada de Laplace manda convolución en producto, tenemos

$$\mathcal{L}(f) \cdot \frac{1}{s^2 + bs + c} = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(\phi_0) = \mathcal{L}(f \star \phi_0)$$

Concluimos entonces que la solución de la ecuación diferencial con condición inicial está dada por

$$\begin{aligned} & \boxed{u(t) = (f \star \phi_0)(t) + \phi_1(t)} \\ &= \int_0^t f(x) \left(\frac{1}{\lambda - \mu} e^{\lambda(t-x)} + \frac{1}{\mu - \lambda} e^{\mu(t-x)} \right) dx + \frac{-\mu u_0 + u_1}{\lambda - \mu} e^{\lambda t} + \frac{-\lambda u_0 + u_1}{\mu - \lambda} e^{\mu t} \\ &= \frac{\int_0^t f(x) e^{-\lambda x} dx - \mu u_0 + u_1}{\lambda - \mu} e^{\lambda t} + \frac{\int_0^t f(x) e^{-\mu x} dx - \lambda u_0 + u_1}{\mu - \lambda} e^{\mu t} \end{aligned}$$

Caso raíz doble

Si el polinomio característico de la ecuación diferencial

$$s^2 + bs + c$$

tiene una raíz doble, entonces es de la forma

$$s^2 + bs + c = (s - \lambda)^2 = s^2 - 2\lambda s + \lambda^2$$

Al igual que el caso anterior, la transformada de Laplace de la solución es

$$L(u) = \mathcal{L}(f) \cdot \frac{1}{s^2 + bs + c} + \frac{(s + b)u_0 + u_1}{s^2 + bs + c}$$

que ahora suponemos de la forma

$$\begin{aligned} &= \mathcal{L}(f) \cdot \frac{1}{(s - \lambda)^2} + \frac{(s - 2\lambda)u_0 + u_1}{(s - \lambda)^2} \\ &= \mathcal{L}(f) \cdot \frac{1}{(s - \lambda)^2} + \frac{u_0}{s - \lambda} + \frac{-\lambda u_0 + u_1}{(s - \lambda)^2} \end{aligned}$$

Sabemos (Ejemplo 12.13)

$$\frac{1}{(s - \lambda)^2} = \mathcal{L}(e^{\lambda t} \star e^{\lambda t})(s) = \mathcal{L}(te^{\lambda t})(s)$$

Notar que si ahora definimos $\phi_0(t) = te^{\lambda t}$, nuevamente ϕ_0 está determinada como la única solución del homogéneo que verifica $\phi_0(0) = 0$ y $\phi_0'(0) = 1$.

Para el primer sumando tenemos

$$\mathcal{L}(f) \cdot \frac{1}{(s - \lambda)^2} = \mathcal{L}(f \star \phi_0)$$

y para el sumando

$$\frac{u_0}{s - \lambda} + \frac{-\lambda u_0 + u_1}{(s - \lambda)^2}$$

vemos fácilmente que

$$\frac{u_0}{s - \lambda} + \frac{-\lambda u_0 + u_1}{(s - \lambda)^2} = \mathcal{L}(u_0 e^{\lambda t} + (-\lambda u_0 + u_1)te^{\lambda t}) = \mathcal{L}(\phi_1)$$

donde $\phi_1(t) = u_0 e^{\lambda t} + (-\lambda u_0 + u_1)te^{\lambda t}$ está, al igual que el caso previo, también caracterizada como la única solución del homogéneo que satisface $\phi_1(0) = u_0$ y $\phi_1'(0) = u_1$. La estructura de la solución, al igual que antes, está dada por

$$u(t) = (f \star \phi_0)(t) + \phi_1(t)$$

que ahora es igual a

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^t f(x)(t-x)e^{\lambda(t-x)} dx + (u_0 + (-\lambda u_0 + u_1)t)e^{\lambda t} \\
 &= \left(u_0 - \int_0^t f(x)xe^{-\lambda x} dx \right) e^{\lambda t} + \left(\int_0^t f(x)e^{-\lambda x} dx - \lambda u_0 + u_1 \right) te^{\lambda t}
 \end{aligned}$$

Ejercicio: Muestre directamente "aplicando \mathcal{L} a la ecuación" que si ϕ es solución de

$$\phi'' + b\phi' + c\phi = 0$$

satisfaciendo la condición inicial

$$\phi(0) = u_0, \quad \phi'(0) = u_1$$

entonces

$$\mathcal{L}(\phi)(s) = \frac{(s+b)u_0 + u_1}{s^2 + bs + c}$$

En particular, si $\phi(0) = 0$ y $\phi'(0) = 1$ entonces $\mathcal{L}(\phi)(s) = \frac{1}{s^2 + bs + c}$.

Ejemplo 12.15. Queremos resolver la ecuación

$$y'' + y = f(t)$$

con $y(0) = 0 = y'(0)$,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases}$$

El método anterior nos lleva a buscar ϕ_0 solución del homogéneo con $\phi(0) = 0$ y $\phi'(0) = 1$: en este caso fácilmente vemos $\phi_0(t) = \sin(t)$ funciona. Y para ϕ_1 , como $\phi_1(0) = 0 = \phi_1'(0)$, necesariamente $\phi_1 = 0$. Concluimos

$$\begin{aligned}
 y(t) &= (\text{sen} \star f)(t) = \int_0^t f(x) \text{sen}(t-x) dx = \int_0^t f(x) (\text{sen}(t) \cos(x) - \cos(t) \text{sen}(x)) dx \\
 &= \left(\int_0^t f(x) \cos(x) dx \right) \text{sen}(t) - \left(\int_0^t f(x) \text{sen}(x) dx \right) \cos(t)
 \end{aligned}$$

Observamos que para $t > t_0$ la función f vale cero y por lo tanto

$$\int_0^t f(x) \cos(x) dx = \int_0^{t_0} \cos(x) dx =: A(t_0)$$

$$-\int_0^t f(x) \operatorname{sen}(x) dx = -\int_0^{t_0} \operatorname{sen}(x) dx =: B(t_0)$$

y tenemos

$$y(t) = A(t_0) \operatorname{sen}(t) + B(t_0) \cos(t), \quad (t \geq t_0)$$

Si pensamos en este sistema como un resorte ideal forzado, podemos preguntarnos por el "empuje ideal", es decir, forzandolo con una fuerza constante durante cierto lapso de tiempo t_0 (y habiendo partido del reposo), cuánto debe ser t_0 para que $A(t_0)^2 + B(t_0)^2$ sea máximo. Observamos que para $t_0 = 2\pi$ tenemos $A(t_0) = 0 = B(t_0)$, así que no conviene empujar mucho tiempo para el mismo lado. Dejamos como ejercicio averiguar el t_0 óptimo.

12.7. La función Γ

La transformada de Laplace de t^α , $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$ se calcula por definición como :

$$\mathcal{L}(t^\alpha)(s) = \int_0^\infty e^{-st} t^\alpha dt$$

si $u = st$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^\alpha du \\ &= \frac{\operatorname{cte}(\alpha)}{s^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

Definición 12.16. A menos de un corrimiento, se define la función Γ como la que aparece en esa dependencia en α :

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} du$$

De esta forma obtenemos

$$\mathcal{L}(t^\alpha)(s) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}$$

En particular, si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ sabemos que

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{\alpha+1}} \Rightarrow \Gamma(n + 1) = n!$$

Otro valor particular de $\Gamma(\alpha)$ es

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}} = \mathcal{L}(t^{-1/2}) \Rightarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Observación 12.17. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

Demostración. Integramos por partes:

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha + 1) &= \int_0^\infty e^{-u} u^\alpha du = \int_0^\infty (-e^{-u})' u^\alpha du \\ &= -e^{-u} u^\alpha \Big|_{u=0}^{u=+\infty} + \int_0^\infty e^{-u} (u^\alpha)' du \\ &= 0 + \alpha \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} du = \alpha \Gamma(\alpha)\end{aligned}$$

□

Corollario 12.18. 1. $\Gamma(n + \alpha) = (\alpha + n - 1) \cdot (\alpha + n - 2) \cdots (\alpha + 1) \cdot \alpha \Gamma(\alpha)$

2. $\Gamma(\frac{2n+1}{2}) = \Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n+1)(2n-1)\cdots 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^n} \sqrt{\pi}$, luego

$$\mathcal{L}(t^{n-1/2})(s) = \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{s^{n+1/2}} = \frac{(2n+1)!! \sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{(2n+1)! \sqrt{\pi}}{4^n n! s^{n+\frac{1}{2}}}$$

Observación 12.19. Definiendo como es usual para $\alpha \in \mathbb{C}$ y $u \in \mathbb{R}_{>0}$,

$$u^\alpha := e^{\alpha \ln(u)}$$

notamos que

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} du$$

tiene sentido para $\alpha \in \mathbb{C}$ con parte real mayor que -1 . Esta función en realidad resulta holomorfa en α . Incluso, la fórmula $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ permite extender (de manera holomorfa) la función Γ en regiones en donde en principio la definición por la integral no tiene sentido. Informalmente, la función Γ se puede considerar como "la extensión holomorfa del factorial".

12.8. Integración "por partes" de la transformada de Laplace

Proposición 12.20. Si $f, g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ son tales que $F(x, s) := f(s)e^{-sx}g(x)$ es integrable en $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, entonces es válida la fórmula

$$\int_0^\infty (\mathcal{L}f)(x)g(x) dx = \int_0^\infty f(s)(\mathcal{L}g)(s) ds$$

Demostración.

$$\int_0^\infty (\mathcal{L}f)(x)g(x) dx = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(s)e^{-sx} ds \right) g(x) dx = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(s)e^{-sx} g(x) ds \right) dx$$

y usando Fubini

$$\begin{aligned} &= \iint_{\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}} f(s)e^{-sx}g(x)dxds \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(s)e^{-sx}g(x)dx \right) ds \\ &= \int_0^\infty f(s) \left(\int_0^\infty e^{-sx}g(x)dx \right) ds \\ &= \int_0^\infty f(s)\mathcal{L}g(s)ds \end{aligned}$$

□

Ejemplo 12.21. $\int_0^\infty \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

Efectivamente, sabiendo que $(\mathcal{L}[1])(x) = \frac{1}{x}$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\text{sen } x}{x} dx &= \int_0^\infty \frac{1}{x} \text{sen } x dx = \int_0^\infty (\mathcal{L}1)(x) \text{sen } x dx \\ &= \int_0^\infty 1 \cdot \mathcal{L}(\text{sen } x)(s) ds = \int_0^\infty \frac{1}{1+s^2} ds = \text{arc tg}(s) \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

13. Ecuaciones ordinarias de orden 2

13.1. Soluciones analíticas

Es conveniente remarcar que, cuando uno se enfrenta a una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes analíticos, como podría ser

- $y'' - xy' + y = 0$, o bien
- $y'' - xy' + y = e^x$

si bien no hay métodos generales para obtener una *fórmula* de la solución del homogéneo o una solución particular, siempre es posible proponer como solución una función holomorfa escrita alrededor de cierto punto como el desarrollo en serie de Taylor de la misma. Por ejemplo, en el caso de querer resolver

$$y'' - xy' + y = e^x$$

escribimos $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$, y si

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

tendremos

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

En nuestro caso particular nos interesa

$$-xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -n a_n x^n$$

y si escribimos y'' como serie con x^n (y no en serie con x^{n-2}) tenemos

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

y por lo tanto

$$y'' - xy' + y = e^x$$

equivale a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

o bien

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + a_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

Esta igualdad será ciertamente verificada si para cada n vale

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + a_n = \frac{1}{n!}$$

y este sistema infinito de ecuaciones se resuelve fácilmente definiendo arbitrariamente a_0 y a_1 (a partir de condiciones iniciales $y(0) = a_0$ e $y'(0) = a_1$ y recursivamente, para los demás a_n a partir de

$$a_{n+2} = \frac{\frac{1}{n!} - (na_n + a_n)}{(n+2)(n+1)}$$

Con un poco de suerte se podrá tener el caso de conseguir una fórmula cerrada para a_n , y con más suerte se tendrá una fórmula para la serie $\sum_n a_n x^n$. Pero si ninguna de estas cosas es posible, siempre se podrá tener recursivamente tantos a_n como se deseen calcular a partir de la recurrencia, y por lo tanto tantos terminos del desarrollo de Taylor de y como se quiera.

Este método funcionará para ecuaciones lineales no homogéneas con coeficientes analíticos. Si los coeficientes no son analíticos pero son de tipo polo de orden a lo sumo 1 en el factor de y' y a lo sumo de orden 2 en el factor y , se puede hacer una variación de esta propuesta que funcionará casi idénticamente. Antes de mostrar el método, veamos un caso concreto y de mucho interés: el Laplaciano en coordenadas curvilíneas, que al plantear la resolución de la ecuación armónica por el método de separación de variables, la ecuación resultante para la dependencia radial es justamente singular, pero con estas singularidades en las que tenemos método para resolver.

13.2. El Laplaciano en cilíndricas y separación de variables

Aparición de una ecuación ordinaria de orden dos con singularidad

Si $f = f(r, \theta, z)$, entonces el operador Laplaciano

$$\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$

en términos de las derivadas con respecto a las coordenadas curvilíneas se escribe como

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r f) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 f + \partial_z^2 f$$

Por el método de variables separadas, al proponer

$$f = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$$

tenemos

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= \Theta Z \frac{1}{r} \partial_r (rR') + \frac{1}{r^2} \Theta'' RZ + Z'' R\Theta \\ &= \Theta Z \left(\frac{R'}{r} + R'' \right) + \frac{1}{r^2} \Theta'' RZ + Z'' R\Theta\end{aligned}$$

Si suponemos $\nabla^2(f) \equiv 0$, dividiendo todo por $f(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$ tendremos

$$0 = \frac{R'}{rR} + \frac{R''}{R} + \frac{\Theta''}{r^2\Theta} + \frac{Z''}{Z}$$

o bien

$$\frac{R'}{rR} + \frac{R''}{R} + \frac{\Theta''}{r^2\Theta} = -\frac{Z''}{Z}$$

Concluimos que existe una constante λ tal que

$$\frac{R'}{rR} + \frac{R''}{R} + \frac{\Theta''}{r^2\Theta} = \lambda = -\frac{Z''}{Z}$$

Incluso si $\lambda = -\omega^2$,

$$\begin{aligned}\frac{(rR)'}{rR} + \frac{\Theta''}{r^2\Theta} &= -\omega^2 \\ Z'' &= \omega^2 Z\end{aligned}$$

De la segunda ecuación obtenemos (salvo el caso $\omega = 0$ que lo dejamos como ejercicio)

$$Z(z) = Ae^{\omega z} + Be^{-\omega z}$$

mientras que de la primera

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -r^2 \left(\omega^2 + \frac{(rR)'}{rR} \right)$$

De esto se sigue que existe otra constante $-c^2$ tal que

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -c^2 = -r^2 \left(\omega^2 + \frac{(rR)'}{rR} \right)$$

y por lo tanto, si $c \neq 0$

$$\Theta(\theta) = c_1 e^{ic\theta} + c_2 e^{-ic\theta}$$

y si $c = 0$ entonces $\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta$. Pero esta función debe ser periódica en θ de período 2π , luego $c = k$ con $k \in \mathbb{N}$ ó $k = 0$ y Θ es constante. Resumiendo, hasta ahora tenemos la forma funcional de $Z(z)$ y de $\Theta(\theta)$, mientras que de la dependencia radial $R(r)$ tenemos la ecuación

$$k^2 = r^2 \left(\omega^2 + \frac{(rR)'}{rR} \right) = r^2\omega^2 + \frac{r(rR)'}{R}$$

luego

$$k^2 R = r^2\omega^2 R + r(rR)'$$

o bien

$$r^2 R'' + rR' + (\omega^2 r^2 - k^2)R = 0 \tag{3}$$

Observación 13.1. Esta ecuación de orden 2 en R es singular en $r = 0$ pues si queremos despejar R'' en términos de R y R' tendremos

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(\omega^2 - \frac{k^2}{r^2}\right)R = 0$$

Por ejemplo, si damos $R(0)$ y $R'(0)$, de esta ecuación no podremos despejar $R''(0)$. De hecho, no sabemos hasta ahora si será posible expresar a R como una serie de Taylor alrededor del cero. Esta cuestión será respondida (afirmativamente para k entero) en 13.4.

13.3. Singularidades, método de Frobenius

Atacaremos una ecuación diferencial de la forma

$$z^2 u''(z) + z b(z)u'(z) + c(z)u(z) = 0$$

con $b(z)$ y $c(z)$ analíticas alrededor del 0 y nos interesa saber su comportamiento cerca del 0. El método consiste en proponer una solución de la forma $u(z) = z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, donde por convención tomamos $a_0 = 1$:

$$\begin{aligned} u(z) &= z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = z^\alpha + a_1 z^{\alpha+1} + a_2 z^{\alpha+2} + \dots = \sum_{n \geq 1} a_n z^{\alpha+n} \\ &= z^\alpha + \sum_{n \geq 1} a_n z^{\alpha+n} \end{aligned}$$

Recordamos, para z y α en \mathbb{C} , por definición

$$z^\alpha := e^{\alpha \ln z}$$

está bien definido siempre y cuando (y donde) esté bien definido el logaritmo. De aquí en adelante fijamos una definición de logaritmo. Notamos que la derivada de z^α resulta lo que era de esperar:

$$(z^\alpha)' = (e^{\alpha \ln z})' = e^{\alpha \ln z} (\alpha \ln z)' = z^\alpha \frac{\alpha}{z} = \alpha z^{\alpha-1}$$

Si ponemos a u en la ecuación, forzamos un factor común z^α y miramos los términos de menor grado tenemos

$$\begin{aligned} z^2 u'' + z b u' + c u &= z^2 (\alpha(\alpha-1)z^{\alpha-2} + \dots) + z b (\alpha z^{\alpha-1} + \dots) + c (z^\alpha + \dots) \\ &= \alpha(\alpha-1)z^\alpha + \dots + b_0 \alpha z^\alpha + \dots + c_0 z^\alpha + \dots \\ &= z^\alpha \left(\alpha(\alpha-1) + b_0 \alpha + c_0 + \sum_{n \geq 1} (***)z^n \right) \end{aligned}$$

y concluimos que una condición necesaria es que α debe ser solución de la ecuación

$$\boxed{I(\alpha) := \alpha(\alpha - 1) + b_0\alpha + c_0 = 0} \quad (4)$$

Después, intentaremos resolver los otros términos por recurrencia. Comencemos entonces, suponiendo que α verifica la ecuación (4), a ver la recurrencia que nos queda al plantear la ecuación:

$$z^2 u'' + zb(u)u' + c(u)u = 0$$

Si $u = z^\alpha + \sum_{n \geq 1} a_n z^{n+\alpha}$, recordamos $a_0 = 1$

$$cu = \left(\sum_{n \geq 0} c_n z^n \right) \left(z^\alpha + \sum_{n \geq 1} a_n z^{n+\alpha} \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k c_{n-k} \right) z^{n+\alpha}$$

$$u' = \sum_{n \geq 0} (n + \alpha) a_n z^{n+\alpha-1}$$

$$zu' = \sum_{n \geq 0} (n + \alpha) a_n z^{n+\alpha}$$

$$zb u' = \left(\sum_{n \geq 0} b_n z^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} (\alpha + n) a_n z^{n+\alpha} \right)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n (\alpha + k) a_k b_{n-k} \right) z^{n+\alpha}$$

$$u'' = \sum_{n \geq 0} (n + \alpha)(n - 1 + \alpha) a_n z^{n+\alpha-2}$$

$$z^2 u'' = \sum_{n \geq 0} (n + \alpha)(n - 1 + \alpha) a_n z^{n+\alpha}$$

Luego, $z^2 u'' + zb u' + cu$ es igual a

$$\sum_{n \geq 0} (n + \alpha)(n - 1 + \alpha) a_n z^{n+\alpha} + \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n (\alpha + k) a_k b_{n-k} \right) z^{n+\alpha} + \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k c_{n-k} \right) z^{n+\alpha}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \left((n + \alpha)(n - 1 + \alpha) a_n + \sum_{k=0}^n (\alpha + k) a_k b_{n-k} + \sum_{k=0}^n a_k c_{n-k} \right) z^{n+\alpha}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \left((n + \alpha)(n - 1 + \alpha) a_n + \sum_{k=0}^n ((\alpha + k) a_k b_{n-k} + a_k c_{n-k}) \right) z^{n+\alpha}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n \geq 0} \left((n + \alpha)(n - 1 + \alpha)a_n + \sum_{k=0}^n a_k((\alpha + k)b_{n-k} + c_{n-k}) \right) z^{n+\alpha} \\
&= \sum_{n \geq 0} ((n + \alpha)(n - 1 + \alpha)a_n + a_n((\alpha + n)b_0 + c_0)) z^{n+\alpha} \\
&\quad + \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k((\alpha + k)b_{n-k} + c_{n-k}) \right) z^{n+\alpha} \\
&= \sum_{n \geq 0} a_n \left((\alpha + n)((\alpha + n) - 1) + (\alpha + n)b_0 + c_0 \right) z^{n+\alpha} \\
&\quad + \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k((\alpha + k)b_{n-k} + c_{n-k}) \right) z^{n+\alpha} \\
&= \sum_{n \geq 0} a_n I(\alpha + n) z^{n+\alpha} + \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k((\alpha + k)b_{n-k} + c_{n-k}) \right) z^{n+\alpha}
\end{aligned}$$

Recordamos que α era raíz de $I(\alpha) = \alpha(\alpha - 1) + b_0\alpha + c_0$, por lo que en principio $I(\alpha + n)$ no tiene porqué ser cero, salvo que tengamos la mala suerte de que justo la diferencia entre las dos raíces sea un natural n , en ese caso tomamos α la raíz "más grande" (es decir, la otra es $\alpha - n_0$) y por lo tanto $\alpha + n$ no es raíz para ningún $n \in \mathbb{N}$.

Asumiendo que $I(\alpha + n)$ nunca es cero obtenemos la ecuación de recurrencia:

$$a_n := \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k((\alpha + k)b_{n-k} + c_{n-k})}{I(\alpha + n)} \quad (5)$$

Si las raíces α y β de I no son tales que $\alpha - \beta$ sea entero, este método produce dos soluciones linealmente independientes. En caso contrario, por un lado si $I(\alpha + n_0) = 0$, se podría tener suerte y $\sum_{k=0}^{n_0-1} a_k((\alpha + k)b_{n_0-k} + c_{n_0-k}) = 0$, en ese caso cualquier a_{n_0} sería solución de

$$a_{n_0} \cdot 0 = 0$$

(por ejemplo $a_{n_0} = 0$) y después seguimos la recurrencia (en realidad, si $a_{n_0} = 0$ después todos los siguientes serían cero). Pero si esa suma en $n_0 \neq 0$ entonces no podemos encontrar solución por éste método, y debemos conformarnos con la solución asociada a la raíz más grande.

En cualquier caso, siempre es válido a partir de una solución u_0 dada, encontrar una segunda solución por el método de reducción de orden. Por completitud, recordamos

rápidamente el procedimiento de reducción de orden: si $u_0(z)$ es solución de $z^2 u'' + zbu' + cu = 0$, se propone una solución de la forma $u(z) = f(z)u_0(z)$, calculamos

$$\begin{aligned} cu &= cfu_0 \\ zbu' &= zb(fu_0)' = zbfu_0' + zbf'u_0 \\ z^2 u'' &= z^2(fu_0)'' = z^2 fu_0'' + 2z^2 f'u_0' + z^2 f''u_0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$ec(fu_0) = f \times ec(u_0) + zbf'u_0 + 2z^2 f'u_0' + z^2 f''u_0$$

obteniendo

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + (zbu_0 + 2z^2 u_0')f' + z^2 f''u_0 \\ \iff (zbu_0 + 2z^2 u_0')f' &= -z^2 f''u_0 \\ \iff \frac{zbu_0 + 2z^2 u_0'}{z^2 u_0} &= -\frac{f''}{f'} \\ \iff \frac{b}{z} + 2\frac{u_0'}{u_0} &= -\frac{f''}{f'} \\ \iff \left(\int \frac{b}{z}\right)' + \ln(u_0^2)' &= -\ln(f')' \\ \iff -\int \frac{b}{z} - \ln(u_0^2) &= \ln(f') \end{aligned}$$

donde el símbolo \int lo utilizamos aquí para denotar la elección de una primitiva (o anti-derivada) de la función en cuestión. (La constante de integración la absorbemos en la primitiva.) Luego

$$\frac{e^{-\int \frac{b}{z}}}{u_0^2} = f'$$

o bien $f = \int \frac{e^{-\int \frac{b}{z}}}{u_0^2}$ y así finalmente $u = fu_0 = u_0 \int \frac{e^{-\int \frac{b}{z}}}{u_0^2}$.

13.4. El método de Frobenius para el Laplaciano en cilíndricas: la función de Bessel

Recordamos que al plantear variables separadas para el Laplaciano en cilíndricas, la dependencia radial $R(r)$ debía satisfacer la ecuación (3):

$$r^2 R'' + rR' + (\omega^2 r^2 - k^2)R = 0$$

donde $\omega \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{N}_0$ (aunque la ecuación -y la solución que encontraremos- tendrá sentido también para $k \in \mathbb{C}$). Ésta es una ecuación diferencial ordinaria con una singularidad en la que el método de Frobenius se aplica, las llamadas singularidades regulares.

Proponemos una solución de la forma

$$R(r) = r^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

Recordamos la ecuación (4) para α asociada a una ecuación de la forma

$$r^2 R'' + r b(r) R' + c(r) R = 0$$

es

$$I(\alpha) = \alpha(\alpha - 1) + b_0 \alpha + c_0 = 0$$

En nuestro caso tenemos $b(r) = 1$, $c(r) = -k^2 + \omega^2 r^2$, luego $c_0 = -k^2$, tenemos

$$0 = I(\alpha) = \alpha(\alpha - 1) + \alpha - k^2 = \alpha^2 - k^2$$

que tiene soluciones $\alpha = \pm k$. Pero notamos que si $k < 0$, entonces $R(r)$ no estaría definido en $r = 0$, por lo que esa solución no nos interesa. Tomamos entonces

$$\boxed{\alpha = k}$$

Recordamos la ecuación de recurrencia (5) para los a_n era

$$a_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k ((\alpha + k) b_{n-k} + c_{n-k})}{I(\alpha + n)}$$

que en nuestro caso sólo hay b_0 y c_0 y $c_2 = -\omega^2$, por lo que en la sumatoria sólo se tiene el término de c_2 (si $n \geq 2$), que es c_{n-k} para $k = n - 2$, y así

$$a_n = \frac{a_{n-2} c_2}{I(k + n)}$$

mientras que para $n = 1$ nos da $a_1 = 0$. Es claro que entonces $a_n = 0$ para todo n impar, y

$$a_n = \frac{a_{n-2} c_2}{I(k + n)} = \frac{-\omega^2}{I(k + n)} a_{n-2}$$

o bien

$$a_{2n} = -\frac{\omega^2}{I(2n + k)} a_{2(n-1)}$$

Recordamos $I(\alpha) = \alpha^2 - k^2$ luego

$$I(n + k) = (n + k)^2 - k^2 = n^2 + 2nk = n(n + 2k)$$

$$\implies I(2n + k) = 2n(2n + 2k) = 4n(n + k)$$

Tendremos

$$a_2 = -\frac{\omega^2}{I(2+k)}a_0 = -\frac{\omega^2}{I(2+k)}$$

(Hemos usado $a_0 = 1$, no siempre se usa esta convención, veremos al final que a veces es conveniente considerar $a_0 = \frac{1}{k!}$.)

$$a_4 = -\frac{\omega^2}{I(4+k)}a_2 = \frac{\omega^2}{I(4+k)}\frac{\omega^2}{I(2+k)} = \frac{\omega^4}{I(4+k)I(2+k)}$$

$$a_6 = -\frac{\omega^2}{I(6+k)}a_4 = -\frac{\omega^2}{I(6+k)}\frac{\omega^4}{I(4+k)I(2+k)} = -\frac{\omega^6}{I(6+k)I(4+k)I(2+k)}$$

\vdots

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{I(2n+k)I(2n-2+k)\cdots I(4+k)I(2+k)}$$

Ahora usamos $I(2n+k) = 2n(2n+2k) = 4n(n+k)$ para explicitar un poco más el denominador:

$$\begin{aligned} I(2n+k)I(2n-2+k)\cdots I(4+k)I(2+k) &= \prod_{j=1}^n I(2j+k) \\ &= \prod_{j=1}^n 4j(j+k) = 4^n \left(\prod_{j=1}^n j \right) \left(\prod_{j=1}^n (j+k) \right) = 4^n n! \frac{(n+k)!}{k!} \end{aligned}$$

Luego

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n k!}{n!(n+k)!} \left(\frac{\omega}{2} \right)^{2n}$$

y la solución $R(r)$ está dada por

$$R(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} r^{2n+k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k!}{n!(n+k)!} \left(\frac{\omega r}{2} \right)^{2n+k} = k! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \left(\frac{\omega r}{2} \right)^{2n+k}$$

$$\boxed{\therefore R(r) = k! J_k(\omega r)}$$

donde J_k es la llamada Función de Bessel de primer tipo, definida en general para $k = \alpha \in \mathbb{C}$ (cambiando $(n+\alpha)! \leftrightarrow \Gamma(n+\alpha+1)$), dada por

$$J_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n+\alpha}$$

Dejamos como ejercicio verificar (cuando $k \in \mathbb{N}_0$) que estas series de potencias tienen radio de convergencia infinito.

Bibliografía y referencias

Sobre análisis complejo

[A] Ahlfors, L.V. Complex Analysis. Mc Graw Hill, New Hork, 1966.

[C-B] Churchill, R.V., Brown, J.W., Variable compleja y aplicaciones, McGraw-Hill, 1992.

Sobre Series de Fourier, análisis funcional y teoría de integración

[Ch] P. Chernoff. The American Mathematical Monthly, Vol 87 Nro. 5 (pag 399).

[P-Z] A. Pinkus, A. Zafrany, Fourier Series and Integral Transforms, Cambridge University Press, 1997.

[R1] W. Rudin, Real and Complex Analysis, Mc Graw Hill, New York, 1966.

[R2] W. Rudin, Functional Analysis. International Series in Pure and Applied Mathematics. Vol. 8 (Second ed. 1991). New York, NY:

[W-Z] R. Wheeden, A. Zygmund. Measure and integral. An introduction to real analysis. CRC Press, 1977 ISBN: 9780824764999,0824764994.