
Lista de ejercicios número 2

ECUACIONES LINEALES

---

1. Sea
$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} u_{x_i}\right)_{x_j} + cu,$$
donde la matriz $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ es uniformemente elíptica y $c \in L^\infty(U)$.
Pruebe que existe una constante $\mu > 0$ tal que la correspondiente forma bilinear $B[\cdot,\cdot]$ satisface las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram si
$$c(x) \geq -\mu \quad \text{c.t.p. } U.$$

---

2. Hallar una formulación débil para la ecuación bi-armónica
$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{en } U \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases}$$
donde $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$.
Probar existencia y unicidad de soluciones débiles para ese problema.

---

3. Supongamos que U es conexo. Dar una definición de solución débil para el problema de Neumann
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } U \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial U. \end{cases}$$
Probar que existe solución débil para este problema si y sólo si
$$\int_U f\,dx = 0.$$
¿Qué puede decir sobre la unicidad?

---

4. Sea $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto una solución débil de
$$-\Delta u + c(u) = f \qquad \text{en } \mathbb{R}^n,$$
donde $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 con $c(0) = 0$ y $c' \geq 0$.
Pruebe que $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

---

5. Estudie el problema de autovalores de Neumann:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } U \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

---

6. De una definición de solución débil para el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en } U \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = f & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

donde $f \in L^2(\partial\Omega)$. Pruebe que este problema tiene solución si y sólo si

$$\int_{\partial U} f\, dS = 0.$$

¿Qué puede decir de la unicidad?

---

7. Estudie el problema de autovalores de Steklov:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en } U \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda u & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

---

8. Probar el principio de min-max de Courant:

Si $L := -\sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_i})_{x_j}$, donde la matriz (a_{ij}) es simétrica y uniformemente elíptica. Asumamos que el operador L con condiciones de borde Dirichlet tiene autovalores $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots$. Pruebe que

$$\lambda_k = \max_{S \in \Sigma_{k-1}} \min_{\substack{u \in S^\perp \\ \|u\|_{L^2(U)} = 1}} B[u,u], \qquad k = 1, 2, \ldots$$

---

9. Probar que la solución de la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } U \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{en } \partial U \times (0,\infty) \\ u = \phi & \text{en } U \times \{0\} \end{cases}$$

verifica que

$$u \to v$$

donde v es la solución de

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

¿En qué sentido es la convergencia?

En particular, si $f = 0$, se tiene que $u \to 0$.

---

10. Probar que la solución de la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } U \times (0, \infty) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial U \times (0, \infty) \\ u = \phi & \text{en } U \times \{0\} \end{cases}$$

verifica que

$$u \to \int_U \phi \, dx.$$

¿En qué sentido es la convergencia? Dar una interpretación física.
