

PRÁCTICA 5 INVERSIÓN

1. Sean A, B, C, D y O puntos del plano tales que

$$AB = BC = CD = DA = \ell \quad \text{y} \quad OA = OC = r,$$

probar que B y D son inversos con respecto a la circunferencia de centro O y radio igual a $\sqrt{r^2 - \ell^2}$.

2. Dado un triángulo ABC sean P y Q los pies de las alturas desde A y B respectivamente. Si M es el punto medio de AB demostrar que la circunferencia que pasa por los puntos B, M y P es tangente a la recta AC si y solo si la circunferencia que pasa por los puntos A, M y Q es tangente a la recta BC .
3. Sea ABC un triángulo, M el punto medio del lado AB y N el punto medio del lado AC . Las circunferencias circunscritas a los triángulos ABN y AMC se cortan en los puntos A y P . La recta AP interseca a la circunferencia circunscrita al triángulo AMN en los puntos A y Q . Demostrar que $AP/AQ = 3/2$.
4. Sea ABC un triángulo y P un punto interior. Sean además D y E los incentros de APB y APC . Si se tiene que

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC.$$

demostrar que AP, BD y CE concurren.

5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Sea P la intersección de las rectas BC y AD . La recta AC corta a la circunferencia circunscrita del triángulo BDP en S y T . La recta BD corta a la circunferencia circunscrita del triángulo ACP en U y V . Demuestre que $PS = PT = PU = PV$.
6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con diagonales perpendiculares que se cortan en un punto O , demostrar que las reflexiones de O en los lados del cuadrilátero forman un cuadrilátero cíclico.
7. En cada caso construir con regla y compas una recta o circunferencia que sea
- (a) tangente a una circunferencia dada en un punto dado y pase por un segundo punto dado,
 - (b) tangente a una circunferencia dada y pase por dos puntos dados,
 - (c) tangente a una circunferencia y a dos rectas dadas,
 - (d) tangente a tres circunferencias dadas,
 - (e) ortogonal a tres circunferencias dadas,
 - (f) ortogonal a dos circunferencias dadas y tangente a otra circunferencia dada,
 - (g) ortogonal a una circunferencia y tangente a dos circunferencias dadas,
 - (h) ortogonal a una circunferencia dada, tangente a otra circunferencia dada y que pase por un punto dado.