PRÁCTICA 8: MEDIDAS ABSTRACTAS

"Everything useful in mathematics has been devised for a purpose. Even if you don't know it, the guy who did it first, he knew what he was doing. Banach didn't just develop Banach spaces for the sake of it. He wanted to put many spaces under one heading. Without knowing the examples, the whole thing is pointless."
MICHAEL ATIYAH.

Ejercicio 1. Probar que las siguientes ternas $(X, \mathcal{A}, \mu)$ constituyen espacios de medida. En cada caso encontrar los conjuntos de medida nula y caracterizar $\int_X f(x) d\mu(x)$.

(a) **Medida de contar.** Dado un conjunto X tomamos $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, y para cada $E \in \mathcal{A}$ definimos
$$\mu(E) = \begin{cases} \#E, & \text{si } E \text{ es finito,} \\ +\infty, & \text{si } E \text{ es infinito.} \end{cases}$$

(b) **Medida de contar pesada.** Dada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales no negativos (denominados pesos), tomamos $X = \mathbb{N}$ con $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y definimos para cada $E \in \mathcal{A}$
$$\mu(E) := \sum_{n\in E} a_n.$$

(c) **Medida de Dirac concentrada en x_0.** Dado un conjunto X no vacío y $x_0 \in X$ tomamos $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ y para cada $E \in \mathcal{A}$ definimos
$$\mu(E) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_0 \in E, \\ 0, & \text{si } x_0 \notin E. \end{cases}$$
La medida μ se denomina la medida delta de Dirac concentrada en x_0 y se nota δ_{x_0}.

(d) **Medida de Lebesgue pesada.** Tomamos $X = \mathbb{R}^n$ con $\mathcal{A}$ la sigma-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue y dada una función medible $\omega : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ (denominada peso) definimos para cada $E \in \mathcal{A}$
$$\mu(E) := \int_E \omega(x) dx.$$

Ejercicio 2. Probar que toda medida μ definida sobre $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ es una medida de contar pesada para alguna elección adecuada de pesos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejercicio 3. Un espacio (X, Σ, μ) se dice de medida completa si dado $Z \in \Sigma$ tal que $\mu(Z) = 0$, para cada $Y \subseteq Z$ resulta $Y \in \Sigma$ y $\mu(Y) = 0$. En este caso, probar que:

(a) Si $Z_1 \in \Sigma,\ Z_1 \Delta Z_2 \in \Sigma$ y $\mu(Z_1 \Delta Z_2) = 0$, entonces $Z_2 \in \Sigma$.

(b) Si f es medible y $f = g$ a.e., entonces g es medible.

Ejercicio 4. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una aplicación tal que:

(i) Si $A, B \in \mathcal{A}$ son disjuntos, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,

(ii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ y $A_n \searrow \emptyset$, entonces $\lim_n \mu(A_n) = 0$.

Probar que μ es una medida.

Ejercicio 5. (Pushforward de una medida). Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y μ una medida (no negativa) y finita sobre X. Sea $F : X \to \mathbb{R}^n$ una función medible. Probar que la fórmula,

$$\mu_F(E) := \mu(F^{-1}(E)),$$

define una medida sobre la sigma-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ tal que para toda función Borel medible $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ no negativa vale que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_F = \int_X f \circ F d\mu.$$

Concluir que una función Borel medible $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es integrable para μ_F si y sólo si $f \circ F$ es integrable para μ y que, en este caso, $\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_F = \int_X f \circ F d\mu$.

Ejercicio 6. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medible con μ una medida positiva y finita. Sean $f \in L^1(X, \mu)$ y $S \subseteq \mathbb{C}$ cerrado tal que $\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \in S$ para todo $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) > 0$. Probar que $f(x) \in S$, para casi todo x (respecto de μ).

Ejercicio 7. Sean $(X, \mathcal{A}, \nu)$ un espacio de medida con signo y $A, B \in \mathcal{A}$ respectivamente un conjunto positivo y negativo para ν tales que: $X = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. Dado $E \in \mathcal{A}$ demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = \sup\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \mathcal{A}\}$,

(b) $-\nu^-(E) = \nu(E \cap B) = \text{ínf}\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \mathcal{A}\}$.

Ejercicio 8. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida, f una función $\mu-$integrable y ν la medida sobre $(X, \mathcal{A})$ definida para cada $E \in \mathcal{A}$ por la fórmula

$$\nu(E) = \int_E f(x) d\mu(x).$$

Dado $E \in \mathcal{A}$ demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $\nu^+(E) = \int_E f^+(x) d\mu(x)$,

(b) $\nu^-(E) = \int_E f^-(x) d\mu(x)$.

Ejercicio 9. Sean λ y μ medidas sobre (X, Σ) con $\lambda(X) < +\infty$.

(a) Probar que si $\lambda \ll \mu$ entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $E \in \mathcal{A}$

$$\mu(E) < \delta \;\Rightarrow\; \lambda(E) < \varepsilon.$$

(b) Mostrar que sin la hipótesis $\lambda(X) < +\infty$ la afirmación en (a) puede ser falsa.

Ejercicio 10. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita, $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X.

(a) Probar que si definimos la aplicación $\mu_f \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ para cada $B \in \mathcal{F}$ por la fórmula

$$\mu_f(B) = \int_B f(x) d\mu(x)$$

entonces μ_f es una medida con signo sobre el espacio $(X, \mathcal{F})$ que satisface $\mu_f \ll \mu$. Deducir que existe una función $g \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ tal que para todo $B \in \mathcal{F}$

$$\int_B f(x) d\mu(x) = \int_B g(x) d\mu(x).$$

(b) Determinar la función g del inciso anterior si $\mathcal{F} = \{\emptyset, B, B^c, X\}$ para algún $B \in \mathcal{A}$.

Ejercicio 11. Decidir si $\lambda \ll \mu$ en cada uno de los siguientes casos y hallar la derivada de Radon-Nikodym $\frac{d\lambda}{d\mu}$ cuando corresponda.

(a) $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} =$ sigma-álgebra de Lebesgue, $\mu =$ medida de Lebesgue y $\lambda = \delta$.

(b) $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} =$ sigma-álgebra de Lebesgue, $\lambda =$ medida de Lebesgue y $\mu =$ medida de contar. ¿Contradicen sus conclusiones el Teorema de Radon Nikodym?

(c) $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\lambda =$ medida de contar, $\mu =$ medida de contar con pesos $a_n = 2^{-n}$.

Ejercicio 12. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita y ν una medida con signo sobre $(X, \mathcal{A})$ tal que $\nu \ll \mu$.

(a) Probar que existe una función $g \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ tal que para toda $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \nu)$

$$\int_X f(x) d\nu(x) = \int_X f(x) g(x) d\mu(x).$$

(b) Probar que $\{x \in X : g(x) \geq 0\}$ y $\{x \in X : g(x) < 0\}$ son respectivamente un conjunto positivo y uno negativo para ν.

Ejercicio 13. Dada μ una medida de Borel finita sobre $\mathbb{R}$ definimos $F_\mu \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ por la fórmula

$$F(x) = \mu((-\infty, x]).$$

(a) Probar que F es monótona creciente, continua a derecha, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \mu(\mathbb{R})$ y $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

(b) Probar que μ es absolutamente continua respecto de $\mathcal{L}$: la medida de Lebesgue unidimensional si y sólo si F es una función absolutamente continua. Mostrar además que en tal caso se tiene

$$\frac{d\mu}{d\mathcal{L}} = F'.$$

(c) Probar que μ es singular respecto $\mathcal{L}$ si y sólo si $F' = 0$ c.t.p. con respecto a $\mathcal{L}$. *Sugerencia*: Considerar un argumento similar al usado para probar que las funciones monótonas son derivables en casi todo punto.

Ejercicio 14. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Notamos con $\mathcal{H}^\alpha$ la medida de Hausdorff $\alpha-$dimensional.

(a) Probar que $\mathcal{H}^\alpha(E+x) = \mathcal{H}^\alpha(E)$ $\forall E$ medible, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Probar que $\mathcal{H}^\alpha(cE) = c^\alpha \mathcal{H}^\alpha(E)$ $\forall E$ medible, $\forall c > 0$.

(c) Probar que si $\mathcal{H}^\alpha(E) < \infty$, entonces $\mathcal{H}^\beta(E) = 0$ $\forall \beta > \alpha$.

(d) Probar que si $0 < \mathcal{H}^\alpha(E) \leq \infty$, entonces $\mathcal{H}^\beta(E) = \infty$ $\forall \beta < \alpha$.

Ejercicio 15. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos la *dimensión* de E como

$$\dim(E) = \sup\{\alpha\colon \mathcal{H}^\alpha(E) = \infty\} = \text{ínf}\{\alpha\colon \mathcal{H}^\alpha(E) = 0\}.$$

(a) Probar que $\mathcal{H}^\alpha(E) = 0$ $\forall \alpha > \dim(E)$.

(b) Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$. Probar que si $\dim(E_n) = d$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\dim(\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = d$. Concluir que si E es numerable, entonces $\dim(E) = 0$.

(c) Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación bi-Lipschitz, es decir, existen $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1\|x-y\| \leq \||f(x) - f(y)\| \leq C_2\|x-y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Probar que $\dim(E) = \dim(f(E))$.

Ejercicio 16. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $X = \sum_{n=1}^k a_n A_n$ una variable aleatoria simple, donde los números reales a_n son todos distintos, los conjuntos A_n son disjuntos dos a dos y $\Omega = \cup_{n=1}^k A_n$. Sea $\mathcal{U}(X) = \{X^{-1}(B)\colon B \text{ boleriano }\}$ la $\sigma-$álgebra generada por X.

(a) Describir precisamente los conjuntos que componen $\mathcal{U}(X)$.

(b) Probar que si una variable aleatoria Y es $\mathcal{U}(X)-$medible, entonces Y es constante en cada uno de los conjuntos A_n.

(c) Mostrar que entonces Y puede ser escrita en función de X.

Ejercicio 17.

(a) Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{A}-$medible. Consideramos la medida μ_X en los borelianos de $\mathbb{R}$ definida por $\mu_X(A) = \mu(X^{-1}(A))$. Probar que para toda función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μ_X-integrable, vale que

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_X = \int_\Omega f(X) d\mu.$$

(b) Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $X\colon \Omega \to \mathbb{R}_{>0}$ una función $\mathcal{A}-$medible con $\int_\Omega f dP = 1$. Definimos una medida ν sobre $(\Omega, \mathcal{A})$ por

$$\nu(A) = \int_A f dP.$$

Probar que $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ es una espacio de probabilidad y que para toda $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ $\nu-$integrable vale que

$$\int_\Omega g d\nu = \int_\Omega g f dP.$$

(c) En particular, sea $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria y sea f la función densidad de X. Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y supongamos que $Y = g(X)$ es integrable. Probar que

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} gf.$$

Johann Radon

Otto Nikodym