Práctica 7: Teorema de Cambio de Variables

"Papers should include more side remarks, open questions, and such. Very often, these are more interesting than the theorems actually proved. Alas, most people are afraid to admit that they don't know the answer to some question, and as a consequence they refrain from mentioning the question, even if it is a very natural one. What a pity! As for myself, I enjoy saying I do not know."
Jean-Pierre Serre.

Ejercicio 0. Sean $H, G \subset \mathbb{R}^n$ los abiertos definidos como:

$$G := (0, +\infty) \times (0, \pi) \times \cdots \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \quad \text{y} \quad H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{n+1} \neq 0 \text{ o } x_n < 0\}.$$

Sea $\varphi_n : G \to H$ la función $(\rho, \theta_1, dots, \theta_{n-1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$ donde

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho\cos(\theta_1),\\
x_2 &= \rho\,\mathrm{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2),\\
x_3 &= \rho\,\mathrm{sen}(\theta_1)\,\mathrm{sen}(\theta_2)\cos(\theta_3),\\
&\ \vdots\\
x_{n-2} &= \rho\,\mathrm{sen}(\theta_1)\,\mathrm{sen}(\theta_2)\ldots\mathrm{sen}(\theta_{n-2})\cos(\theta_{n-1}),\\
x_{n-1} &= \rho\,\mathrm{sen}(\theta_1)\,\mathrm{sen}(\theta_2)\ldots\mathrm{sen}(\theta_{n-2})\,\mathrm{sen}(\theta_{n-1}).
\end{aligned}$$

a) Probar que φ_n está bien definida, es biyectiva, es diferenciable y su inversa también lo es.

b) Probar que $\det(D\varphi(\rho, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})) = \rho^{n-1}\sin(\theta_1)^{n-2}\sin(\theta_2)^{n-3}\cdots\sin(\theta_{n-1})$.
Sugerencia: escribir a φ como $\psi_2 \circ \psi_1$ con

$$\begin{aligned}
\psi_1(\rho, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) &= (\rho\cos(\theta_1), \rho\sin(\theta_1), \theta_3, \ldots, \theta_{n-1}),\\
\psi_2(x_1, r, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) &= (x_1, \varphi_{n-1}(r, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1})),
\end{aligned}$$

y probarlo por inducción.

Ejercicio 1.

(a) Probar que para cualquier función medible no negativa $f(x, y)$ definida sobre $\mathbb{R}^2$ se cumple

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)dxdy = \int_G f(rcos\theta, rsen\theta)rdrd\theta.$$

(b) Probar que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Ejercicio 2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica y sea $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por $Q(x) = xAx^t$. Probar que la función $f(x) = e^{-Q(x)}$ es integrable sobre $\mathbb{R}^n$ si y sólo si todos los autovalores de A son positivos.
Probar, además, que en tal caso

$$\int f = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Ejercicio 3. Decimos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una *función radial* si existe $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(\|x\|)$. Probar que existe una constante C_n tal que para toda función radial f vale que

$$\int f(x)dx = C_n \int_0^{+\infty} r^{n-1} g(r)dr.$$

Ejercicio 4. ¿Para qué valores de p es $\|x\|^p$ integrable sobre la bola unitaria $\{\|x\| \leq 1\}$?

Ejercicio 5. Calcular

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\|x\|^2)^{\frac{n+1}{2}}} dx.$$

Ejercicio 6. Demostrar que la integral biparamétrica

$$\int_0^1 x^{p-1} |\log x|^{q-1} dx.$$

es finita si $p > 0$ y $q > 0$ y expresar su valor en términos de la función Γ.
Sugerencia: Considere el cambio de variables $x = e^{-t}$.

Bernhard Riemann

Henri Lebesgue