PRÁCTICA 6: DIFERENCIACIÓN

"Nowadays there are three great English mathematicians: Hardy, Littlewood and Hardy-Littlewood."
HARALD BOHR, MATEMÁTICO Y FUTBOLISTA. NO CONFUNDIR CON SU HERMANO, NIELS.

Definiciones y notación: durante esta práctica se utilizarán las siguientes definiciones:

- $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ denotará el conjunto formado por aquellas funciones medibles que son integrables sobre todo compacto de $\mathbb{R}^n$.
- Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $M(f)$ denotará la función maximal de Hardy-Littlewood centrada, definida por

$$M(f)(x) = \sup \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f| : Q \text{ un cubo centrado en } x \right\}.$$

Ejercicio 1. Probar que,

(a) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq \infty$, entonces $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ entonces $M(f)$ es semicontinua inferiormente.

Ejercicio 2. Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ definimos,

$$M_Q(f)(x) = \sup \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B |f| : B \text{ una bola que contiene a } x \right\}.$$

Probar que existen constantes $A, B > 0$ que dependen sólo de n, tales que

$$AM(f)(x) \leq M_Q(f)(x) \leq BM(f)(x), \text{ para toda } f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Ejercicio 3. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ que satisface $|\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}| > 0$. Probar que existe $c > 0$ tal que $M(f)(x) \geq c\|x\|^{-n}$ para $\|x\| \geq 1$. Deducir que $M(f) \notin L^1(\mathbb{R}^n)$, salvo que $f = 0$ en casi todo punto.

Ejercicio 4. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(a) Probar que si $1 \leq p < \infty$, existe $c > 0$ que no depende de f tal que para todo $\alpha > 0$

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M(f)(x) > \alpha\}| \leq \frac{c}{\alpha} \int_{\{x:|f(x)| \geq \alpha/2\}} |f(x)|dx.$$

(b) Probar que si $1 < p \leq \infty$, entonces $M(f) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Además existe $c_p > 0$ que no depende de f tal que $\|M(f)\|_p \leq c_p \|f\|_p$.

Ejercicio 5. Sea $\mathcal{S} = \{S_i : i \in I\}$ una familia de conjuntos medibles. Decimos que $\mathcal{S}$ se *contrae regularmente a x* si verifica

(i) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $S_i \in \mathcal{S}$ con diam $S_i < \varepsilon$.

(ii) Existe una constante $k > 0$ tal que para todo $S_i \in \mathcal{S}$, si Q_i es el cubo más pequeño con centro en x que contiene a S_i, entonces $|Q_i| \leq k|S_i|$.

Notar que los conjuntos S_i no necesitan contener a x.

(a) Probar que $\{B(x,r)\}_{r>0}$ se contrae regularmente a x.

(b) Probar que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, entonces en todo punto de Lebesgue de f

$$\frac{1}{|S|}\int_S |f(y) - f(x)|dy \to 0$$

para toda familia $\mathcal{S}$ que se contrae regularmente a x.

Ejercicio 6. Sea $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible y acotada tal que sop $(\phi) \subseteq \{x : \|x\| \leq 1\}$ y $\int_{\mathbb{R}^n} \phi dx = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$, sea $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\phi(x/\varepsilon)$. Probar que para toda $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0}(f * \phi_\varepsilon)(x) = f(x),$$

si x es un punto de Lebesgue de f.

Ejercicio 7. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx = 0$, para toda $\varphi \in \mathbb{C}^\infty_c(\mathbb{R})$. Probar que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f \equiv c$ a.e.

Ejercicio 8. Sea $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función medible, acotada y de soporte compacto. Probar que existe una constante $C > 0$ tal que para toda función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$ vale:

$$\sup_{\varepsilon>0} |f * K_\varepsilon(x)| \leq CM(f)(x),$$

donde $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}K(x/\varepsilon)$.

Ejercicio 9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x\sin(1/x), & x \neq 0. \end{cases}$$

Calcular los cuatro números de Dini f en $x_0 = 0$.

Ejercicio 10. Hallar $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ creciente, continua y tal que

$$\int_0^1 f'(x)dx < f(1) - f(0).$$

Ejercicio 11. Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente y absolutamente continua con $g(a) = c$ y $g(b) = d$.

(a) Si $G \subseteq [c,d]$ es abierto, entonces $|G| = \int_{g^{-1}(G)} g'(x)dx$.

(b) Sea $H = \{x : g'(x) \neq 0\}$. Si $E \subseteq [c,d]$ y $|E| = 0$ entonces $g^{-1}(E) \cap H$ tiene medida nula.

(c) Si $E \subseteq [c,d]$ es medible, entonces $F = g^{-1}(E) \cap H$ es medible y $|E| = \int_F g' = \int_a^b \chi_E(g(x))g'(x)dx$.

(d) Si f es medible y no negativa sobre $[c,d]$, entonces $(f \circ g)g'$ es medible sobre $[a,b]$ y $\int_c^d f(y)dy = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx$.

Ejercicio 12. Sean $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, absolutamente continua en $[a,b]$, g integrable sobre $[a,b]$ y

$$G(x) = G(a) + \int_a^x g(t)dt.$$

Probar que

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b G(x)F'(x)dx.$$

Ejercicio 13. Probar que si f es de variación acotada en $[a,b]$, entonces f se puede escribir como $f = g + h$ donde g es absolutamente continua en $[a,b]$ y h es singular en $[a,b]$. Probar, además, que g y h son únicas salvo constantes aditivas.

Ejercicio 14. Sean $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}, (n \in N)$ funciones monótonas crecientes tales que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge a un límite finito para todo $x \in [a,b]$. Sea $f(x)$ el límite. Probar que f es derivable a.e. y $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ a.e.

Ejercicio 15. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada. Sea $V : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $V(x) := V_a^x(f)$. El objetivo de este ejercicio es probar que $V' = |f'|$ a.e. Para eso se propone el siguiente plan.

(a) Dada una partición $a = x_0 < \ldots < x_n = b$, existe una función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que,

- $g(a) = 0$,
- para cada $0 \leq j \leq n-1$: $g(x_{j+1}) - g(x_j) = |f(x_{j+1}) - f(x_j)|$,
- para cada $0 \leq j \leq n-1$: existe una constante $c_j \in \mathbb{R}$ tal que

$$g|_{[x_j,x_{j+1}]} = f|_{[x_j,x_{j+1}]} + c_j \text{ ó } g|_{[x_j,x_{j+1}]} = -f|_{[x_j,x_{j+1}]} + c_j.$$

(b) Probar que toda función g como en (a) verifica que

- $|g'| = |f'|$ a.e.,
- $g(b) = \sum_{j=0}^{n-1} |f(x_{j+1}) - f(x_j)|$,
- $V - g$ es monótona creciente.

(c) Elegir una sucesión de funciones g_k como en (a) tales que $\sum_k V(x) - g_k(x) < \infty$ para casi todo x y aplicar el ejercicio anterior.

Ejercicio 16. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada. Sea $V : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $V(x) := V_a^x(f)$. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) f es continua si y sólo si V lo es.

(b) f es absolutamente continua si y sólo si V lo es. Además en este caso,

$$V(x) = \int_a^x \left|f'(y)\right| dy, \text{ para todo } x \in [a, b].$$

(c) $\int_a^b |f'| \leq V_a^b(f)$ y la igualdad vale si y sólo si f es absolutamente continua.

Ejercicio 17. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua. Probar que si $N \subseteq [a, b]$ tiene medida nula, entonces $f(N)$ tiene medida nula. Concluir que la imagen por f de un conjunto medible es un conjunto medible.
(Pista: la imagen por f de un intervalo [c,d] es un intervalo de medida menor a la variación de f en $[c, d]$).

Hardy y Littlewood