

## PRÁCTICA 4: TEOREMA DE FUBINI

*“One should never try to prove anything that is not almost obvious.”*  
ALEXANDER GROTHENDIECK.

**Ejercicio 1.**

- (a) Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  medible tal que para casi todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $E_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$  tiene medida nula. Probar que  $E$  tiene medida nula y que para casi todo  $y \in \mathbb{R}$ ,  $E_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$  tiene medida nula.
- (b) Sea  $f(x, y)$  una función medible y no negativa definida sobre  $\mathbb{R}^2$ . Supongamos que para casi todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x, y)$  es finita para casi todo  $y$ . Probar que para casi todo  $y \in \mathbb{R}$ ,  $f(x, y)$  es finita para casi todo  $x$ .

**Ejercicio 2.** Sean  $f$  y  $g$  funciones medibles definidas sobre  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$  respectivamente. Probar que  $h(x, y) = f(x)g(y)$  definida sobre  $\mathbb{R}^{n+m}$  es medible.

Deducir que si  $E_1 \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $E_2 \subseteq \mathbb{R}^m$  son conjuntos medibles, entonces su producto cartesiano  $E_1 \times E_2 = \{(x, y) : x \in E_1 \wedge y \in E_2\}$  es medible en  $\mathbb{R}^{n+m}$  y  $|E_1 \times E_2| = |E_1||E_2|$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  medible y sea  $h : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $h(x, y) = f(x) - f(y)$ . Probar que si  $h$  es integrable sobre  $(0, 1) \times (0, 1)$ , entonces  $f$  es integrable sobre  $(0, 1)$ .

**Ejercicio 4.** Sean  $I = [0, 1]$  y  $E \subseteq I \times I$  tales que  $|E_x|_e = |I - E_y|_e = 0$  para todo  $(x, y) \in I \times I$ . Probar que  $E$  no es medible.

**Ejercicio 5.** Sea  $f$  una función medible no negativa definida sobre  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ . Para cada  $\alpha > 0$ , se define

$$\omega(\alpha) = |\{x \in E : f(x) > \alpha\}|.$$

La función  $\omega$  se llama *distribución de  $f$  sobre  $E$* . Probar que

- (a)  $\omega : (0, \infty) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  es una función decreciente.
- (b)  $\omega(\alpha+) = \omega(\alpha)$ , es decir,  $\omega$  es continua a derecha.
- (c)  $\omega(\alpha-) \geq |\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}|$ .
- (d)  $\omega$  continua en  $\alpha \Rightarrow |\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}| = |\{x \in E : f(x) > \alpha\}|$ .
- (e) Para cada  $\alpha \in (0, \infty)$ ,  $\{x : (x, \alpha) \in R(f, E)\} = \{x \in E : f(x) \geq \alpha\}$ .
- (f)  $\int_E f = \int_0^\infty \omega(\alpha) d\alpha$ .

(g) Para cada  $p : 0 < p < \infty$ ,

$$\int_E f^p dx = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \omega(\alpha) d\alpha.$$

**Ejercicio 6.** Sea  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  medible tal que para algún  $\alpha \in (0, 1)$ , vale la desigualdad  $|f(t)| \leq t^\alpha / (1+t)$  para todo  $t \geq 0$ . Consideramos la función  $G : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $G(x, t) = e^{-xt} f(t)$ . Probar que

(a)  $G$  es medible

(b)  $G \in L^1(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$

**Ejercicio 7.** Sea  $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $k(x, y) = x.y$ . Probar que si  $E \subseteq \mathbb{R}$  es medible entonces  $k^{-1}(E)$  es medible. Deducir que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es medible, entonces  $h(x, y) = f(x.y)$  es medible.

**Ejercicio 8.** Sean  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  conjuntos medibles. Probar que la función  $h(x) = |(A-x) \cap B|$  es medible y  $\int_{\mathbb{R}} h(x) dx = |A||B|$ .

**Ejercicio 9.** Probar el Teorema de Fubini para funciones a valores complejos.

**Ejercicio 10.** Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

(a) Probar que para cada  $\xi \in \mathbb{R}^n$  la función  $e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} f(x)$  es medible e integrable.

Se define la *Transformada de Fourier de  $f$*  como:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} f(x) dx, \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

(b) Probar que

(i)  $\hat{f}$  es acotada y uniformemente continua.

(ii)  $\hat{f}(\xi) \xrightarrow{\|\xi\| \rightarrow +\infty} 0$ , (*Lema de Riemann-Lebesgue*).

(iii) Si  $f(x) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$ , donde cada  $f_k(x_k) \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq k \leq n$ , entonces  $\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi_1) \dots \hat{f}_n(\xi_n)$ .

(iv) Si  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $(f * g)^\wedge = \hat{f} \hat{g}$ .

**Ejercicio 11.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  integrable y tal que  $f(x) = 0$ , para todo  $x \notin [a, b]$ . Se define

$$g(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt.$$

Probar que

$$\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx.$$

**Ejercicio 12.** Sean  $F \subseteq [a, b]$  un compacto ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) y  $\lambda > 0$ . Notamos con  $d(x, F)$  la distancia a  $F$  de un punto  $x \in \mathbb{R}$ . Para  $x \in [a, b]$ , sea

$$M_\lambda(x) := \int_a^b \frac{d(y, F)^\lambda}{|x - y|^{1+\lambda}} dy.$$

Probar que  $M_\lambda$  es medible e integrable sobre  $F$ . Probar además la estimación

$$\int_F M_\lambda(x) dx \leq \frac{2}{\lambda} |[a, b] \setminus F|.$$

**Ejercicio 13.** Probar que:

(a)  $\int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = 1/x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ .



Guido Fubini



Leonida Tonelli